2004 ـ يىلى مەملىكەتلىك ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپ ئوقۇتۇش ماتېرىياللىرىنى
تەكشۈرۈپ بېكىتىش كومىتېتىنىڭ دەسلەپكى تەكشۈرۈشىدىن ئۆتكەن

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا 5

زۆرۈر دەرسلىك

شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

译　　者：吾尔卡西·阿布都热依木
复　　审：热米拉·阿布都热西提
责任编辑：热夏提·帕尔萨
责任校对：阿孜古丽·艾坦木

تەرجىمانى: ئۆركەش ئابدۇرېھىم
مۇھەررىرى: رەمىلە ئابدۇرېشىت
مەسئۇل مۇھەررىرى: رىشات پەرسا
مەسئۇل كوررېكتورى: ئارزۇگۇل ھېيتەم

普通高中课程标准实验教科书
数学 5
必修
A 版
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著
(维吾尔文)
*
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى تەرجىمە ۋە نەشر قىلدى
http://www.xjjycbs.com
شىنجاڭ شىنخۇا كىتابخانىسى تارقاتتى
ئۈرۈمچى خاۋكۇن رەڭلىك باسما چەكلىك شىركىتى باستى
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى كومپيۇتېر مەركىزى تىزدى
*
فورماتى: 1240 × 890، 1/16؛ باسما تاۋىقى: 8.5
2008 - يىل 6 - ئاي 1 - نەشرى
2009 - يىل 11 - ئاي 4 - بېسىلىشى
تىرازى: 15 750 - 1
ISBN 978 - 7 - 5370 - 6735 - 5
باھاسى: 7.32 يۈەن

ئادرېس: ئۈرۈمچى شەھىرى غالىبىيەت يولى 187 - نومۇر
پوچتا نومۇرى: 830049؛ تېلېفون نومۇرى: 2863761, 2870654(0991)

باش تۇز گۇچىدىن

ساۋاقداشلار، بۇ بىر يۈرۈش ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسلىكىنى ئىشلەتكەنلىكىڭلارنى قىزغىن قارشى ئالىمىز ھەمدە بۇ دەرسلىكلەرنىڭ ماتېماتىكا ئۆگىنىشتىكى ياخشى دوستۇڭلار بولۇپ قېلىشىنى ئۈمىد قىلىمىز.

سىلەر بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتىن پايدىلىنىپ ماتېماتىكا ئۆگىنىشنى باشلاشتىن ئىلگىرى، نېمە ئۈچۈن ماتېماتىكا ئۆگىنىش كېرەك؟ قانداق قىلغاندا ماتېماتىكىنى ياخشى ئۆگەنگىلى بولىدۇ؟ دېگەندەك مەسىلىلەر ئۈستىدە بەزى ئوي - پىكىرلىرىمىزنى ئوتتۇرىغا قويماقچىمىز.

نېمە ئۈچۈن ماتېماتىكا ئۆگىنىش كېرەك؟ بۇ مەسىلە ئۈستىدىكى قاراشلىرىمىزنى ئىككى تەرەپتىن چىقىپ بايان قىلىمىز.

ماتېماتىكا بىزگە ئەسقاتىدۇ. تۇرمۇش، ئىشلەپچىقىرىش، ئىلىم - پەن ۋە تېخنىكا، شۇنداقلا مۇشۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتىن ماتېماتىكىنىڭ نۇرغۇن قوللىنىشلىرىنى كۆرگىلى بولىدۇ. «سانلىق مۇناسىۋەت ۋە ئۇنىڭ بوشلۇقتىكى شەكلى» ئەمەلىيەت، نەزەرىيە، ماددىي دۇنيا ۋە روھىي دۇنيانىڭ ھەممىلا يېرىدە مەۋجۇت بولغانلىقتىن، ئاشۇ «سانلىق مۇناسىۋەت ۋە ئۇنىڭ بوشلۇقتىكى شەكلى» نى تەتقىق قىلىدىغان ماتېماتىكىمۇ ئەلۋەتتە ھەممىلا يەردە ئىشلىنىدۇ. ماتېماتىكا ھەممەيلەننىڭ ئەتراپىدا مەۋجۇت بولۇپ، ئۇ ئىلىم - پەننىڭ تىلى، بارلىق ئىلىم - پەن ۋە تېخنىكىنىڭ ئاساسى، شۇنداقلا تەپەككۇر قىلىشىمىز ۋە مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشىمىزدا كەم بولسا بولمايدىغان قورال ھېسابلىنىدۇ.

ماتېماتىكا ئۆگىنىش ئارقىلىق قابىلىيەتنى ئۆستۈرگىلى بولىدۇ. ھەممەيلەندە شۇنداق بىر تۇيغۇ باركى، ماتېماتىكىنى ياخشى ئۆگەنگەن ئادەم باشقا نەزەرىيىلەرنىمۇ ئاسان ئۆگىنىۋالالايدۇ. ئەمەلىيەتتە، نەزەرىيىلەر ئارىسىدا ئۆزئارا تۇتىشىدىغان ۋە ئورتاق تەرەپلەر بولىدۇ، «سانلىق مۇناسىۋەت ۋە ئۇنىڭ بوشلۇقتىكى شەكلى»، لوگىكىلىق قۇرۇلما ۋە ئىزدىنىپ تەپەككۇر قىلىش قاتارلىقلار بۇ نەزەرىيىلەرنىڭ تىرىكى ياكى تومۇرى بولۇپ، ماتېماتىكا دەل ئۇلارنىڭ يادروسى بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ماتېماتىكا ئۆگىنىش داۋامىدىكى مەشغۇلات ۋە تەربىيىلىنىشلەر بىزنىڭ باشقا نەزەرىيىلەرنى ئۆگىنىشىمىزگە ناھايىتى ياخشى ياردەم بېرىدۇ، ماتېماتىكا ساپاسىنىڭ يۇقىرى كۆتۈرۈلۈشى شەخس قابىلىيىتىنىڭ تەرەققىي قىلىشىدا ئىنتايىن مۇھىم رول ئوينايدۇ.

ئۇنداق بولسا، قانداق قىلغاندا ماتېماتىكىنى ياخشى ئۆگەنگىلى بولىدۇ؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، ئالدى بىلەن ماتېماتىكىغا نىسبەتەن توغرا تونۇشنى تىكلىۋېلىش كېرەك.

ماتېماتىكا تەبىئىي يوسۇندا ۋۇجۇدقا چىققان پەندۇر. بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتىكى ماتېماتىكا مەزمۇنلىرى ئىنسانلارنىڭ ئۇزاق مۇددەتلىك ئەمەلىيىتى جەريانىدا تاۋلىنىپ چىققان ماتېماتىكا جەۋھەرلىرى ۋە ماتېماتىكا ئاساسلىرى بولۇپ، ئۇنىڭدىكى ماتېماتىكىلىق ئۇقۇم، ماتېماتىكىلىق ئۇسۇل ۋە ماتېماتىكىلىق ئىدىيىلەرنىڭ ھەممىسى تەبىئىي يوسۇندا مەيدانغا چىققان ھەم تەرەققىي قىلغان. ئەگەر سىز بۇ ماتېماتىكا مەزمۇنلىرى ئىچىدىكى مەلۇم ئۇقۇمنى تەبىئىي ئەمەس، زورمۇزور كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان دەپ قارىسىڭىز، ئۇ ھالدا شۇ ئۇقۇمنىڭ ئارقا كۆرۈنۈشى، شەكىللىنىش جەريانى، قوللىنىلىشى ۋە ئۇنىڭ بىلەن باشقا ئۇقۇملار ئارىسىدىكى باغلىنىش ئۈستىدە ئويلىنىپ كۆرسىڭىزلا، ئۇنىڭ پىشىپ يېتىلگەن شارائىتتا تەبىئىي ھالدا بارلىققا كەلگەن ئەقىلگە مۇۋاپىق ھاسىلات بولۇپ، ھەتتا ئىنسانىي پۇراققىمۇ ئىگە ئىكەنلىكىنى بايقىيالايسىز. بۇنداق تەپەككۇر قىلىش ھەممەيلەننىڭ ماتېماتىكا ئۆگىنى-

شىگە ياردەم بېرىدۇ.

ماتېماتىكا ئېنىق پەندۇر. ئېنىق ئالدىنقى شەرت ۋە ئېنىق ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشتىن ئېنىق يەكۈن كېلىپ چىقىدۇ، ماتېماتىكىدىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرىسى توغرا، خاتاسى خاتا بولۇپ، ئۇنىڭدا ھېچقانداق مۈجمەللىك مەۋجۇت بولمايدۇ. ماتېماتىكا ئېنىق پەن بولغانلىقى ئۈچۈن، بىز ئۇنى ئۆگىنىش ئاسان دەپ ئېيتالايمىز، ھەممەيلەن ماتېماتىكا قائىدىلىرى ئاساسىدا تەرتىپ بويىچە ئۆگىنىپ، قەدەممۇ ـ قەدەم پىكىر يۈرگۈزسەك، ئۇنى چوقۇم چۈشەنگەن ھالدا ئۆگىنىپ كېتەلەيمىز؛ ماتېماتىكا ئېنىق پەن بولغانلىقى ئۈچۈن، بىز يەنە ئۇنى ئۆگىنىش تەس دەپمۇ ئېيتالايمىز. بۇنىڭ سەۋەبى شۇكى، ئەگەر بەزىلەر ماتېماتىكا قائىدىلىرى بويىچە ئۆگەنمەي ۋە پىكىر يۈرگۈزمەي، ھە دېسىلا ئۆزىنىڭ «شۇنداق بولۇشى كېرەك» دەپ ئويلىغانلىرىنى ماتېماتىكىغا زورمۇزور تېڭىپ، قوشۇشنى ئۆگەنمەي تۇرۇپلا كۆپەيتىشنى ئۆگىنىمەن دېسە، ئۇ ھالدا ھەربىر قەدەمدە توسالغۇغا ئۇچراپ، ئۆگىنىشنى داۋاملاشتۇرالماي قالىدۇ. ماتېماتىكىغا نىسبەتەن توغرا تونۇش تىكلىۋالغاندىن كېيىن، يەنە ئۆگىنىش ئۇسۇلىغىمۇ ئەھمىيەت بېرىش لازىم.

ماتېماتىكىنى ئۆگىنىشتە ھەربىر ئادەم ئۆزىگە خاس ئۆگىنىش ئۇسۇلىنى شەكىللەندۈرۈۋېلىشى كېرەك. ماتېماتىكا بىلىملىرىنى ئۆگىنىش، ئىگىلەش ۋە ئۇنىڭدىن جانلىق پايدىلىنىشنىڭ يوللىرى ناھايىتى كۆپ، ھەربىر ئادەمنىڭ باشقىلارنىڭكىگە ئوخشىمايدىغان ماتېماتىكا ئۆگىنىش ئۇسۇلى بولىدۇ. كۆنۈكمىلەرنى ئىشلەش، ماتېماتىكىدىن پايدىلىنىپ ھەر خىل مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش، ئۇقۇملارنى چۈشىنىش، ئىسپاتلاشنى ئۆگىنىۋېلىش، ماتېماتىكىلىق ئىدىيىلەرنى ئۆزلەشتۈرۈۋېلىش، ماتېماتىكىلىق ئۇسۇللارنى ئىگىلەش قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى ناھايىتى مۇھىم، لېكىن سوئالنىڭ رولىنى جارى قىلدۇرۇشقىمۇ سەل قارىماسلىق كېرەك، چۈنكى سوئاللار بىزنىڭ تەشەببۇسكارلىق بىلەن جانلىق ئۆگىنىشىمىزگە تۈرتكە بولۇپ، ئۆگىنىشتىكى ئىزدىنىشچانلىقىمىزنى كۈچەيتىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئورۇنلۇق سوئاللارنى دەل ۋاقتىدا ئوتتۇرىغا قويۇشنى ئۆگىنىۋېلىپ، ئۆزىمىز ۋە باشقىلار ئوتتۇرىغا قويغان سوئاللارنىڭ باشلامچىلىقىدا ئۆگىنىشنى قانات يايدۇرۇش كېرەك. بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتە بىز ئىمكانىيەت بارلىكى يەردە سوئاللارنى ئوتتۇرىغا قويدۇق، بۇنداق قىلغاندا سېلىشتۇرمىلىقى ۋە باغلىنىشلىقى بولغان ھالدا ئۆگەنگىلى بولىدۇ ـ دە، بىر تەرەپتىن، ئادەتتىكى ئۇقۇملاردىن ئۇنىڭ ئارقا كۆرۈنۈشىنى كۆرۈۋالغىلى، ئۇقۇملارنىڭ «يۇچەك» بولۇپ قېلىشىدىن ساقلانغىلى بولىدۇ، يەنە بىر تەرەپتىن، كونكرېت مىساللاردىن ئۇ ئۆز ئىچىگە ئالغان ئادەتتىكى ئۇقۇملارنى تەسەۋۋۇر قىلىپ، شەيئىلەرنى «روھى» مەنىگە ئىگە قىلغىلى بولىدۇ.

ساۋاقداشلار، **ياش چېغىڭلاردا پۇرسەتنى قولدىن بەرمەي ماتېماتىكا ئۆگىنىڭلار.** ھازىر ئۆمرۈڭلاردىكى ماتېماتىكا مەشغۇلاتلىرىنى قوبۇل قىلىش، ماتېماتىكا ئاساسىنى پۇختا ھازىرلاشنىڭ ئەڭ ياخشى مەزگىلى، بۇ مەزگىلدە كۈچ سەرپ قىلىپ ماتېماتىكا ئۆگىنىۋالساڭلار، ئۇنىڭدىن بىر ئۆمۈر مەنپەئەت ئالىسىلەر. بىز سىلەر ئۈچۈن مانا بۇ ماتېماتىكا دۇنياسىنى بەرپا قىلدۇق، ئۇنىڭ ھەممىڭلارنىڭ ئۆسۈپ يېتىلىشىڭلارغا پايدىلىق بولۇشىنى ئۈمىد قىلىمىز. سىلەر مانا مۇشۇ ماتېماتىكا دۇنياسىنىڭ خوجايىنى، ئۆگىنىش داۋامىدا ئۇنىڭغا قارىتا قىممەتلىك پىكىرلىرىڭلارنى بېرىشىڭلارنى، بۇ ماتېماتىكا دۇنياسىدا كۆڭۈللۈك ياشىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز.

كىرىش سۆز

بۇ بىر يۈرۈش تەجرىبە دەرسلىكنى «ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمى (تەجرىبە نۇسخا)»گە ئاساسەن تۈزۈپ چىقتۇق. بۇ كىتاب تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسىدە چوقۇم ئۆگىنىلىدىغان (زۆرۈر دەرس) بەش دەرس بۆلىكىنىڭ بىرى بولۇپ، مەزمۇنى ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، تەڭسىزلىك قاتارلىق ئۈچ بابنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ.

ئۈچبۇلۇڭ ئەڭ ئاساسىي گېئومېترىيىلىك شەكىل، ئۈچبۇلۇڭدىكى سانلىق مۇناسىۋەت ئەڭ ئاساسىي سانلىق مۇناسىۋەت بولۇپ، ناھايىتى كەڭ قوللىنىلىدۇ. بىز ئىلگىرى ئۆگەنگەن ئۈچبۇلۇڭ، تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ۋە تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشكە دائىر بىلىملەر ئاساسىدا، خالىغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەرەپ ـ بۇلۇڭ مۇناسىۋىتىنى تەتقىق قىلىش ئارقىلىق، ئۈچبۇلۇڭدىكى تەرەپ ئۇزۇنلۇقى بىلەن بۇلۇڭ گرادۇسى ئارىسىدىكى سانلىق مۇناسىۋەتنى بايقاپ ۋە ئىگىلەپ، ئۇلاردىن پايدىلىنىپ ئۆلچەش ۋە گېئومېترىيىلىك ھېسابلاشلارغا ئالاقىدار بەزىبىر ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىمىز.

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى بىر خىل ئالاھىدە فۇنكسىيە دەپ قاراشقا بولىدۇ، ئۇ تەبىئەت قانۇنىيىتىنى ئەكس ئەتتۈرۈپ بېرىدىغان ئاساسىي ماتېماتىكىلىق مودېل بولۇپ، بولۇپمۇ كومپيۇتېر تېخنىكىسىدا مۇھىم رول ئوينايدۇ. بىز كۈندىلىك تۇرمۇشتىكى نۇرغۇن ئەمەلىي مەسىلىلەرنى تەھلىل قىلىش ئارقىلىق، تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ۋە تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىن ئىبارەت بۇ ئىككى خىل سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى مودېلىنى تۇرغۇزۇپ، ئۇلاردىكى بەزىبىر ئاساسىي سانلىق مۇناسىۋەتلەر ئۈستىدە ئىزدىنىمىز ۋە ئۇنى ئىگىلەيمىز، بۇ ئىككى خىل سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى مودېلىنىڭ كەڭ قوللىنىلىشىنى ھېس قىلىمىز ھەمدە ئۇلاردىن پايدىلىنىپ بەزىبىر ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىمىز.

تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتى بىلەن تەڭ بولۇش مۇناسىۋىتى ئوبيېكتىپ مەۋجۇت بولغان ئاساسىي سانلىق مۇناسىۋەت بولۇپ، ماتېماتىكا تەتقىقاتىنىڭ مۇھىم مەزمۇنى ھېسابلىنىدۇ. تەڭ بولماسلىق ئۇقۇمىنى تۇرغۇزۇش، تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى بىر تەرەپ قىلىشنىڭ مۇھىملىقى تەڭ مىقدارلار مەسىلىسىنى بىر تەرەپ قىلىش بىلەن تەڭ ئورۇندا تۇرىدۇ. بۇ بۆلەكتە، ئوقۇغۇچىلار كونكرېت ئەھۋال (مۇھىت) ئارقىلىق، رېئال دۇنيا ۋە كۈندىلىك تۇرمۇشتا تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتى زور مىقداردا مەۋجۇت ئىكەنلىكىنى ھېس قىلىپ، تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) نىڭ تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى تەسۋىرلەشتىكى ئەھمىيىتى ۋە قىممىتىنى چۈشىنىدۇ؛ بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكنى يېشىشنىڭ ئاساسىي ئۇسۇلىنى ئىگىلەيدۇ ھەمدە بەزىبىر ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلالايدىغان بولىدۇ؛ تەكشىلىكتىكى ساھەنى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەشنى ئۆگىنىپ، بەزىبىر ئاددىي ئىككى نامەلۇملۇق سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىپ باقىدۇ؛ ئاساسىي تەڭسىزلىك ۋە ئۇنىڭ ئاددىي قوللىنىلىشى بىلەن تونۇشىدۇ؛ تەڭسىزلىك، تەڭلىمە ۋە فۇنكسىيە ئارىسىدىكى باغلىنىشنى ھېس قىلىدۇ.

ئۆگىنىش گۇمانىي سوئاللاردىن باشلىنىدۇ. بۇ كىتابتا ئۆگىنىلىدىغان ماتېماتىكا مەزمۇنلىرى مۇۋاپىق مەسىلە مۇھىتى ئارقىلىق ئوتتۇرىغا قويۇلىدۇ، ئۇنىڭدىن كېيىنكى «كۆزىتىش»، «مۇلاھىزە»، «ئىزدىنىش» قاتارلىق پائالىيەتلەردە، ساۋاقداشلار مەسىلىلەرنى بايقاش، سوئاللارنى ئوتتۇرىغا قويۇشقا،

شۇنداقلا ئەمەلىيەتتىن ئۆتكۈزۈش، تەشەببۇسكارلىق بىلەن تەپەككۇر قىلىش، كونكرېتلىقتىن ئابستراكتلىققا ئۆتۈش ۋە ئالاھىدىلىكتىن ئومۇمىيلىققا ئۆتۈشتىن ئىبارەت ئابستراكتسىيلەپ يىغىنچاقلاش پائالىيەتلىرىنى ئۆز بېشىدىن ئۆتكۈزۈش ئارقىلىق ئاساسىي ماتېماتىكا بىلىملىرىنى چۈشىنىۋېلىش ۋە ئىگىلىۋېلىشقا يېتەكلىنىپ، ماتېماتىكا ئاساسىنى پۇختىلىۋېلىش ئىمكانىيىتىگە ئىگە قىلىنىدۇ.

ئۆگىنىشتە ئويلىنىش بولمىسا بىلىم ئىگىلەش تەسكە توختايدۇ. پەقەت مۇستەقىل پىكىر يۈرگۈزگەندىلا ھەممە ئىلمىي تەپەككۇر قىلىش ئۇسۇلىنى ئىگىلىۋالغاندىلا، ئاندىن ماتېماتىكىنى ھەقىقىي ئۆگەنگىلى بولىدۇ. بۇ كىتابتا، ماتېماتىكا مەزمۇنلىرى ئارىسىدىكى ئىچكى باغلىنىش، بولۇپمۇ ماتېماتىكا بىلىملىرى ئىچىگە يوشۇرۇنغان ماتېماتىكىلىق ئىدىيە ـ ئۇسۇللار ئارقىلىق ساۋاقداشلار سېلىشتۇرۇش، كېڭەيتىش، ئالاھىدىلەشتۈرۈش، ئايلاندۇرۇش قاتارلىق ماتېماتىكىلىق تەپەككۇر قىلىشتا كۆپ ئىشلىتىلىدىغان لوگىكىلىق ئۇسۇللارنى ئۆگىنىشكە ئىلھاملاندۇرۇلۇپ ۋە يېتەكلىنىپ، ماتېماتىكىلىق تەپەككۇر قىلىش ۋە ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشنى ئۆگىنىۋېلىش ۋە شۇ ئارقىلىق ماتېماتىكىلىق تەپەككۇر قىلىش قابىلىيىتىنى ئۈزلۈكسىز يۇقىرى كۆتۈرۈش ئىمكانىيىتىگە ئىگە قىلىنىدۇ.

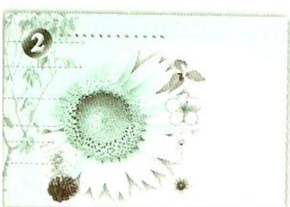
ئۆگىنىشنىڭ ئاساسىي مەقسىتى قوللىنىش. بۇ كىتابتا ساۋاقداشلارغا ماتېماتىكىغا دائىر مەسىلەلەر ۋە باشقا مەسىلىلەرنى ماتېماتىكا بىلىملىرىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىش پۇرسىتى ئىمكانىيەتنىڭ بارچە كۆپرەك يارىتىپ بېرىلىپ، ئۇلار ماتېماتىكا ئۇقۇملىرىنىڭ ماھىيىتىگە بولغان چۈشىنىشىنى چوڭقۇرلاشتۇرۇش، ماتېماتىكا بىلىملىرى بىلەن ئەمەلىيەتنىڭ باغلىنىشىنى تونۇپ يېتىش ھەممە بەزى ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ماتېماتىكىلىق بىلىم ۋە ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشنى ئۆگىنىۋېلىش ئىمكانىيىتىگە ئىگە قىلىنىدۇ. ئۇنىڭدىن باشقا، كىتابتا يەنە «كۆزىتىش ۋە قىياس قىلىش»، «ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە»، «ئىزدىنىش ۋە بايقاش»، «ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى» دېگەندەك ئىستونلارمۇ بەرپا قىلىنىپ، قىزىقىدىغان ساۋاقداشلارنىڭ ئۇلاردىكى بەزى مەزمۇنلارنى ئۆزى تاللاپ ئىزدىنىش ئېلىپ بېرىشى ئۈچۈن ئىمكانىيەت يارىتىپ بېرىلگەن.

ساۋاقداشلارنىڭ بۇ قىسىم دەرسلىكنى ئۆگىنىش ئارقىلىق تېخىمۇ كۆپ ماتېماتىكا بىلىملىرىنى ئىگىلىۋېلىشى، ماتېماتىكا قابىلىيىتى ۋە ماتېماتىكىدىن پايدىلىنىپ مەسىلە ھەل قىلىش قابىلىيىتىنى يەنىمۇ ئۆستۈرۈۋېلىشى ھەممە ماتېماتىكا ئۆگىنىش ھەۋىسىنى يەنىمۇ چوڭقۇرلاپ يېتىلدۈرۈپ، ماتېماتىكا پېنىنى تېخىمۇ ئەتراپلىق تونۇۋېلىشىنى ئۈمىد قىلىمىز.

بۇ كىتابتىكى قىسمەن ماتېماتىكىلىق بەلگىلەر

$\sin x$	x نىڭ سىنۇسى
$\cos x$	x نىڭ كوسىنۇسى
$\tan x$	x نىڭ تانگېنسى
$\cot x$	x نىڭ كوتانگېنسى
$\sin^2 x$	$\sin x$ نىڭ كۋادراتى
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$ ۋېكتور
$\mathbf{N}^*$	مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمى
a_n	سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ n ـنچى ئەزاسى
S_n	سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى
d	تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئايرىمىسى
q	تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي نىسبىتى
$>$	چوڭ
$<$	كىچىك
$\geqslant$	چوڭ ياكى تەڭ
$\leqslant$	كىچىك ياكى تەڭ

مۇندەرىجە



1 ـ باب.

ئۇچبۇلۇڭنى يېشىش

ئېلىمىزدە قەدىمكى زاماندىلا چاڭئې (رىۋايەتتىكى ئاي پەرىسى) نىڭ ئايغا چىقىشى ھەققىدىكى رىۋايەت بار ئىدى. بىز كېچە ئاسمىنىدىكى ئايغا قاراپ چەكسىز ئويغا چۆممىز، ئىختىيارسىز ھالدا، كۆز يەتكۈسىز ئاي يەر شارىدىن زادى قانچىلىك يىراقلىقتىدۇ؟ دەپ سوراپ قالىمىز.

فرانسىيىلىك ئىككى ئاسترونوم 1671 ـ يىلىلا يەر شارى بىلەن ئاي شارى ئارىسىدىكى ئارىلىقنىڭ تەخمىنەن 385400km ئىكەنلىكىنى ئۆلچەپ چىققان. ئۇلار بۇ ئارىلىقنى قانداق ئۆلچىگەن؟

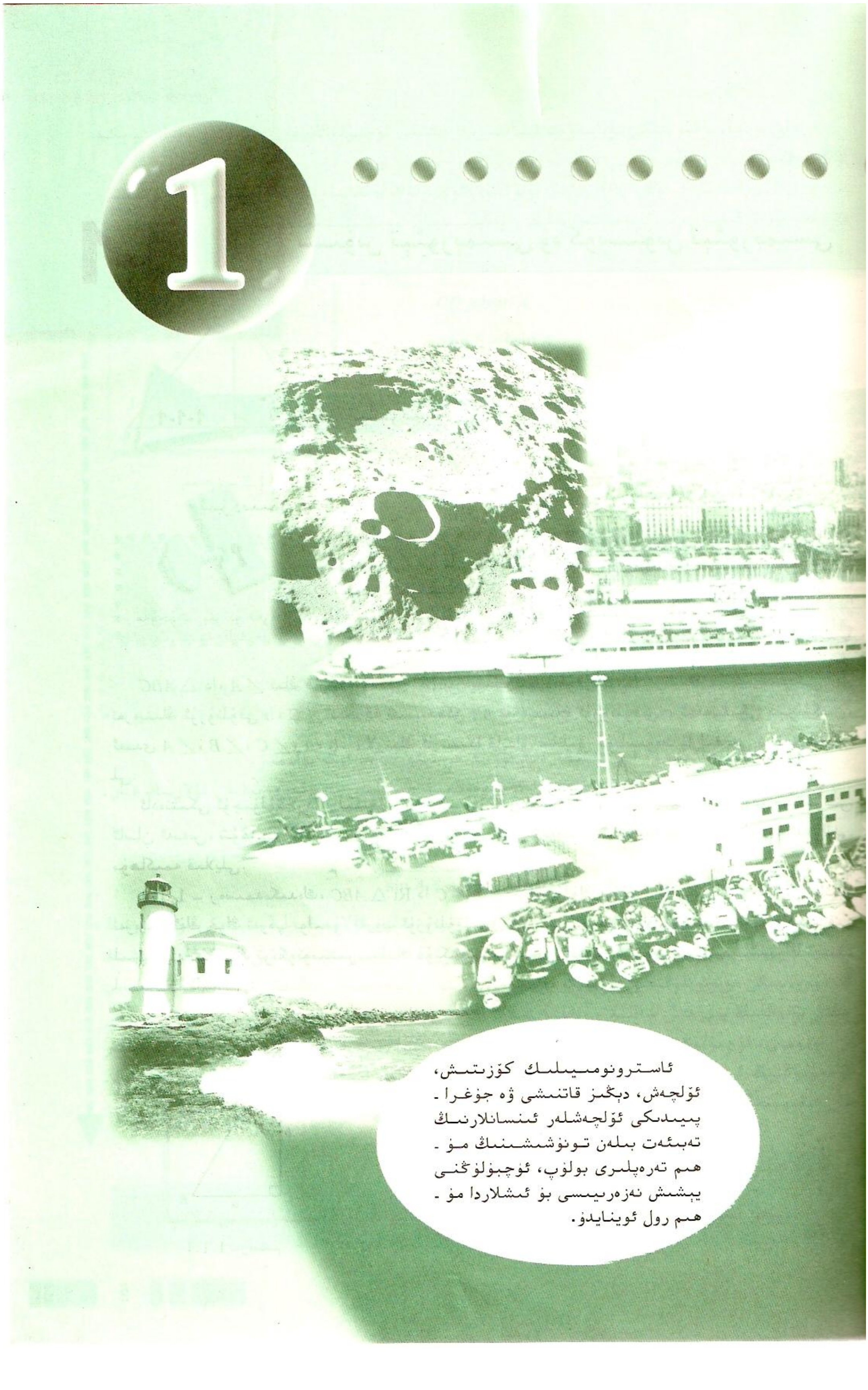
ماتېماتىكىنىڭ تەرەققىيات تارىخىدا، ئاسترونومىيىلىك ئۆلچەش، دېڭىز قاتنىشى ۋە جۇغراپىيىدىكى ئۆلچەش قاتارلىق ئەمەلىي پائالىيەتلەرنىڭ تۈرتكىسىدە، ئۇچبۇلۇڭنى يېشىش نەزەرىيىسى ئۈزلۈكسىز تەرەققىي قىلىپ، نۇرغۇنلىغان ئۆلچەش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىشتا قوللىنىلدى.

تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتە، بىز تىك بۇلۇڭلۇق ئۇچبۇلۇڭغا دائىر بەزىبىر ئۆلچەش مەسىلىلىرىنى تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشنى بىلىۋالغانىدۇق، ئەمەلىي خىزمەتلەر داۋامىدا بۇنىڭدىن باشقا يەنە نۇرغۇنلىغان ئۆلچەش مەسىلىلىرىگە دۇچ كېلىمىز، بۇ مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا پەقەت تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىگىلا تايانساق يېتەرلىك بولمايدۇ، مەسىلەن:

1. دېڭىز سەپىرىدە دېڭىزدىكى ئىككى ئارالنىڭ ئارىلىقىنى قانداق ئۆلچەش كېرەك؟
2. تۇۋىگە بارغىلى بولمايدىغان قۇرۇلۇشنىڭ ئېگىزلىكىنى قانداق ئۆلچەش كېرەك؟
3. گورىزونتال يۆنىلىشتە ئۇچۇۋاتقان ئايروپىلاندا تۇرۇپ ئاستى تەرەپتىكى تاغ چوققىسىنىڭ دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكىنى قانداق ئۆلچەش كېرەك؟
4. دېڭىزدا كېتىۋاتقان پاراخوتنىڭ سۈرئىتى بىلەن يۆنىلىشىنى قانداق ئۆلچەش كېرەك؟

بۇ مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش ئۈچۈن، يەنىمۇ ئىلگىرىلىگەن ھالدا خالىغان ئۇچبۇلۇڭدىكى تەرەپ ـ بۇلۇڭ مۇناسىۋىتىگە دائىر بىلىملەرنى ئۆگىنىشىمىزگە توغرا كېلىدۇ.

بۇ بابتا بىز سىنۇس تېئورېمىسى بىلەن كوسىنۇس تېئورېمىسىنى ھەمدە بۇ ئىككى تېئورېمىدىن پايدىلىنىپ ئۇچبۇلۇڭنى يېشىش ۋە ئەمەلىي ئۆلچەشتىكى بەزىبىر مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشنى ئۆگىنىمىز.


1
ئاسترونومىيىلىك كۆزىتىش، ئۆلچەش، دېڭىز قاتنىشى ۋە جۇغرا- پىيىدىكى ئۆلچەشلەر ئىنسانلارنىڭ تەبىئەت بىلەن تونۇشىشىنىڭ مۇ- ھىم تەرەپلىرى بولۇپ، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش نەزەرىيىسى بۇ ئىشلاردا مۇ- ھىم رول ئوينايدۇ.

CHAPTER 1

1-1 سىنۇس تېئورېمىسى ۋە كوسىنۇس تېئورېمىسى

1-1-1 سىنۇس تېئورېمىسى

ئىزدىنىش

بىزگە مەلۇمكى، خالىغان ئۈچبۇلۇڭدا چوڭ تەرەپنىڭ قارشىسىدا چوڭ بۇلۇڭ، كىچىك تەرەپنىڭ قارشىسىدا كىچىك بولۇڭ بولۇشتەك تەرەپ - بۇلۇڭ مۇناسىۋىتى مەۋجۇت. بىز بۇ تەرەپ - بۇلۇڭ مۇناسىۋىتىنىڭ ئېنىق مىقدارلاشقان ئىپادىسىگە ئېرىشەلەمدۇق؟

$\triangle ABC$ دا، $\angle A$ نىڭ قارشىسىدىكى BC تەرەپنىڭ ئۇزۇنلۇقى a، $\angle B$ نىڭ قارشىسىدىكى AC تەرەپنىڭ ئۇزۇنلۇقى b، $\angle C$ نىڭ قارشىسىدىكى AB تەرەپنىڭ ئۇزۇنلۇقى c ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئەمدى $\angle A$، $\angle B$، $\angle C$، a، b، c لارنىڭ ئارىسىدا قانداق سانلىق مۇناسىۋەت بارلىقىنى تەتقىق قىلايلى.

ئادەتتىكى ئۈچبۇلۇڭلاردا بولىدىغان تەرەپ - بۇلۇڭ مۇناسىۋىتىنى بىۋاسىتە كەلتۈرۈپ چىقىرىش ئاسان ئەمەس، شۇڭا بىز ئالدى بىلەن تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭدىن ئىبارەت بۇ خىل ئالاھىدە ئەھۋالنى مۇھاكىمە قىلايلى.

1.1.1 - رەسىمدىكىدەك، Rt $\triangle ABC$ دا $\angle C$ ئەڭ چوڭ بۇلۇڭ بولۇپ، ئۇنىڭ قارشىسىدىكى يانتۇ تەرەپ c ئەڭ چوڭ تەرەپ بولىدۇ، تەرەپ ئۇزۇنلۇقلىرى ئارىسىدىكى سانلىق مۇناسىۋەتنى مۇھاكىمە قىلىش تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىگە چېتىلىدۇ. سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

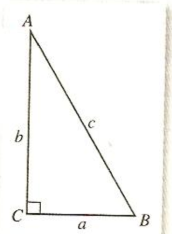
$$\frac{a}{c} = \sin A,$$

$$\frac{b}{c} = \sin B.$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c.$$

$$\because \quad \sin C = 1,$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

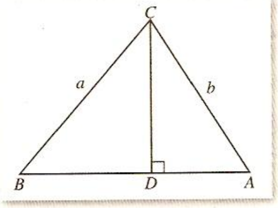


1.1.1 ـ رەسىم

1 ـ باب

ئۇنداق بولسا، يۇقىرىدىكى مۇناسىۋەت ئىپادىسى ئادەتتىكى ئۈچبۇلۇڭلارغا نىسبەتەنمۇ يەنىلا كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟

2.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، $\triangle ABC$ تار بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولغاندا، AB تەرەپتىكى ئېگىزلىكنى CD دەپ پەرەز قىلساق، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:



2.1.1 ـ رەسىم

$$CD = a\sin B,$$

$$CD = b\sin A,$$

$$\therefore \quad a\sin B = b\sin A,$$

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

ئوخشاشلا، $\triangle ABC$ دا:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

ئىزدىنىش

$\triangle ABC$ كەڭ بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولغاندا، يۇقىرىدىكى تەڭلىك يەنىلا كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟

سىنۇس تېئورېمىسىنى باشقا ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىغىلى بولامدۇ؟

يۇقىرىدىكى مۇھاكىمە ۋە ئىزدىنىشلەردىن تۆۋەندىكى تېئورېمىغا ئىگە بولىمىز.

سىنۇس تېئورېمىسى(law of sines): بىر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ھەرقايسى تەرەپلىرى بىلەن ئۇلارنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ سىنۇسىنىڭ نىسبەتلىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ، يەنى:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

سىنۇس تېئورېمىسى خالىغان ئۈچبۇلۇڭدىكى ئۈچ تەرەپ بىلەن ئۇلارنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭلارنىڭ سىنۇسلىرى ئارىسىدىكى بىر مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ. سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ ئۆزگىرىشچانلىقى مونوتونلۇقىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، سىنۇس تېئورېمىسى خالىغان ئۈچبۇلۇڭدىكى تەرەپ بىلەن بۇلۇڭنىڭ بىر خىل سانلىق مۇناسىۋىتىنى ناھايىتى ياخشى تەسۋىرلەپ بەرگەن.

ئومۇمەن، ئۈچبۇلۇڭنىڭ A، B، C ئۈچ بۇلۇڭى بىلەن ئۇلارنىڭ قارشىسىدىكى a، b، c تەرەپلەر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئېلېمېنتى دەپ ئاتىلىدۇ. ئۈچبۇلۇڭنىڭ بېرىلگەن بىرقانچە ئېلېمېنتىغا ئاساسەن قالغان ئېلېمېنتلىرىنى تېپىش جەريانى **ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش** (solving triangles) دەپ ئاتىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشكە دائىر قانداق مەسىلىلەرنى ھەل قىلالايمىز؟

CHAPTER

سىنۇس تېئورېمىسىنى تەھلىل قىلىش ئارقىلىق بىلىشكە بولىدۇكى، ئەگەر ئۈچبۇلۇڭنىڭ خالىغان ئىككى بۇلۇڭى ۋە بىر تەرىپى بېرىلسە، ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىچكى بۇلۇڭلىرى يىغىندىسى تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچىنچى بۇلۇڭىنى ھېسابلاپ چىقىشقا ھەمدە سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئۈچبۇلۇڭنىڭ قالغان ئىككى تەرىپىنى ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ؛ ئەگەر ئۈچبۇلۇڭنىڭ خالىغان ئىككى تەرىپى ۋە ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى بىر تەرەپنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ بېرىلسە، سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ يەنە بىر تەرەپنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭنىڭ سىنۇس قىممىتىنى ھېسابلاپ چىقىشقا ۋە بۇ ئارقىلىق مۇشۇ بۇلۇڭ بىلەن ئۈچبۇلۇڭنىڭ قالغان تەرەپ ۋە بۇلۇڭلىرىنى ئېنىقلاپ چىقىشقا بولىدۇ.

1 - مىسال. $\triangle ABC$ دا، $A = 32.0°$، $B = 81.8°$، $a = 42.9\text{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ ئۈچبۇلۇڭنى يېشەيلى.

يېشىش: ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىچكى بۇلۇڭلىرى يىغىندىسى تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$\begin{aligned} C &= 180° - (A + B) \\ &= 180° - (32.0° + 81.8°) \\ &= 66.2°. \end{aligned}$$

سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{42.9\sin 81.8°}{\sin 32.0°} \approx 80.1(\text{cm});$$

سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{42.9\sin 66.2°}{\sin 32.0°} \approx 74.1(\text{cm});$$

2 - مىسال. $\triangle ABC$ دا، $a = 20\text{cm}$، $b = 28\text{cm}$، $A = 40°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ ئۈچبۇلۇڭنى يېشەيلى (بۇلۇڭ گرادۇسى $1°$ قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1cm غىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش: سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{28\sin 40°}{20} \approx 0.899\,9.$$

$\because 0° < B < 180°$، $\therefore B \approx 64°$ ياكى $B \approx 116°$.

(1) $B \approx 64°$ بولغاندا:

$$C = 180° - (A + B) \approx 180° - (40° + 64°) = 76°,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{20\sin 76°}{\sin 40°} \approx 30(\text{cm});$$

(2) $B \approx 116°$ بولغاندا:

$$C = 180° - (A + B) \approx 180° - (40° + 116°) = 24°,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{20\sin 24°}{\sin 40°} \approx 13(\text{cm}).$$

1 ـ باب

مەشىق

1. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 1° قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1cm غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $A=45^\circ$, $C=30^\circ$, $c=10\,\text{cm}$;

(2) $A=60^\circ$, $B=45^\circ$, $c=20\,\text{cm}$;

2. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 1°قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1cm غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $a=20\,\text{cm}$, $b=11\,\text{cm}$, $B=30^\circ$;

(2) $c=54\,\text{cm}$, $b=39\,\text{cm}$, $C=115^\circ$;

2-1-1 كوسىنۇس تېئورېمىسى

ئىزدىنىش

ئەگەر بىر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى بېرىلگەن بولسا، ئۈچبۇلۇڭلارنىڭ تەڭلىكىگە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇلىغا ئاساسەن، بۇ ئۈچبۇلۇڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى، شەكلى پۈتۈنلەي ئېنىقلانغان ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

بىز يەنىلا مىقدارلاشتۇرۇش نۇقتىسىدىن چىقىپ بۇ مەسىلىنى تەتقىق قىلىمىز، يەنى بېرىلگەن ئىككى تەرەپ ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىدىن پايدىلىنىپ ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچىنچى تەرىپى بىلەن قالغان ئىككى بۇلۇڭنى قانداق ھېسابلاپ چىقىش مەسىلىسىنى تەتقىق قىلىمىز.

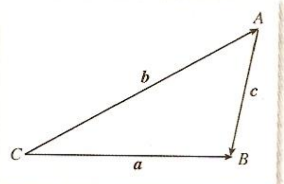
ئالدى بىلەن ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچىنچى تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى قانداق ھېسابلاشنى ئويلىشىمىز. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئۈچىنچى تەرەپنى بېرىلگەن ئىككى تەرەپ ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى ئارقىلىق قانداق ئىپادىلەش مەسىلىسىنى تەتقىق قىلىش كېرەك.

ئەگەر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $BC=a$ ، $AC=b$ ، BC تەرەپ بىلەن AC تەرەپىنىڭ ئارا بۇلۇڭى C ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، بىز ئامال قىلىپ بېرىلگەن a ، b ۋە C بىلەن ئۈچىنچى تەرەپ c ئارىسىدىكى بىر مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى ياكى ئۈچىنچى تەرەپ c بېرىلگەن a ، b ۋە C ئارقىلىق ئىپادىلەنگەن بىر فورمۇلىنى تېپىپ چىقىشىمىز كېرەك.

مۇلاھىزە؟

بىز ئۆگىنىپ بولغان بىلىم ۋە ئۇسۇللارغا باغلاپ، بۇ مەسىلىنى قايسى يول بىلەن ھەل قىلىشىمىز كېرەك؟

بۇ مەسىلە تەرەپ ئۇزۇنلۇقى مەسىلىسىگە چېتىلىدىغانلىقتىن، ئۇنى ۋېكتورلارنىڭ سانلىق كۆپەيتىمىسى ياكى ئانالىتىك گېئومېترىيىدىكى ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىق فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشنى ئويلاشساق بولىدۇ.



3.1.1 – رەسىم

3.1.1 – رەسىمدىكىدەك، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$، $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=a^2+b^2-2ab\cos C,\end{aligned}$$

$$\therefore\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

بۇ ئىسپاتلاش جەريانىدىن ۋېكتور ئەمەلىنىڭ رولىنى ھېس قىلدىڭىزمۇ؟

ئوخشاش يول بىلەن:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكى تېئورېمىغا ئېرىشىمىز:

كوسىنۇس تېئورېمىسى (law of cosines): ئۈچبۇلۇڭنىڭ ھەرقانداق بىر تەرىپىنىڭ كۋادراتى قالغان ئىككى تەرەپ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسىدىن مۇشۇ ئىككى تەرەپ بىلەن ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى كوسىنۇسىنىڭ كۆپەيتمىسىنىڭ ئىككى ھەسسىسىنى ئېلىۋەتكەنگە تەڭ. يەنى:

كوسىنۇس تېئورېمىسىنى كوئوردېنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ قانداق ئىسپاتلاش كېرەك؟ يەنە باشقا ئۇسۇل بارمۇ؟

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ، ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچىنچى تەرىپىنى بېرىلگەن ئىككى تەرەپ ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىغا ئاساسەن ھېسابلاپ چىقالايمىز.

مۇلاھىزە ؟

كوسىنۇس تېئورېمىسى ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپى بىلەن ئۇنىڭ بىر بۇلۇڭى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ، كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ، ئۈچبۇلۇڭنىڭ بېرىلگەن ئۈچ تەرىپىگە ئاساسەن ئۈچبۇلۇڭنىڭ بۇلۇڭلىرىنى ئېنىقلاش مەسىلىسىنى ھەل قىلالايمىز، ئۇنداق بولسا، كونكرېت باسقۇچلىرى قانداق بولىدۇ؟

كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن ئۇنىڭ نەتىجىسىگە ئېرىشەلەيمىز:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

يۇقىرىقى نەتىجىدىن پايدىلىنىپ، ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپىگە ئاساسەن ئۇنىڭ ئۈچ بۇلۇڭىنى ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ.

يۇقىرىقىلاردىن بىلىشكە بولىدۇكى، كوسىنۇس تېئورېمىسى ۋە ئۇنىڭ نەتىجىسى «تەرەپ، بۇلۇڭ، تەرەپ» بىلەن «تەرەپ، تەرەپ، تەرەپ» تىن پايدىلىنىپ ئۈچبۇلۇڭلارنىڭ تەڭلىكىگە ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇلىنى مىقدارلاشتۇرۇش نۇقتىسىدىن تەسۋىرلەپ، ئۇنى ھېسابلاشقا بولىدىغان فورمۇلىغا ئايلاندۇرۇپ بېرىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

گوگۇ تېئورېمىسى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپىنىڭ كۋادراتلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ، كوسىنۇس تېئورېمىسى بولسا ئادەتتىكى ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپىنىڭ كۋادراتلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ، بۇ ئىككى تېئورېما ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتكە قانداق قاراش كېرەك؟

كوسىنۇس تېئورېمىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەگەر بىر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى ئۈچىنچى تەرىپىنىڭ كۋادراتىغا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا ئۈچىنچى تەرىپىنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ تىك بۇلۇڭ بولىدۇ؛ ئەگەر ئۈچىنچى تەرىپىنىڭ كۋادراتىدىن كىچىك بولسا، ئۇ ھالدا ئۈچىنچى تەرىپىنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ كەڭ بۇلۇڭ بولىدۇ؛ ئەگەر ئۈچىنچى تەرىپىنىڭ كۋادراتىدىن چوڭ بولسا، ئۇ ھالدا ئۈچىنچى تەرىپىنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ تار بۇلۇڭ بولىدۇ. دېمەك، كوسىنۇس تېئورېمىسىنى گوگۇ تېئورېمىسىنىڭ كېڭەيتىلىشى دەپ قاراشقا بولىدۇ.

گېئومېترىيىدىكى ئۈچبۇلۇڭغا دائىر خۇسۇسىيەت جەھەتتىكى يەكۈنلەرنى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىدىن پايدىلىنىپ مىقدار جەھەتتىن ھېسابلاشقا بولىدىغان فورمۇلىلارغا ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ، بۇنىڭ بىلەن سىز ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىگە تېخىمۇ ئامراق بولۇپ قالغانسىز!

سىنۇس تېئورېمىسى بىلەن كوسىنۇس تېئورېمىسىنى بىرلەشتۈرۈپ قوللىنىش ئارقىلىق، ئۈچبۇلۇڭغا دائىر مەسىلىلەرنى ناھايىتى ياخشى ھەل قىلالايمىز.

3 - مىسال. $\triangle ABC$ دا، $b = 60\text{cm}$، $c = 34\text{cm}$، $A = 41^\circ$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 1° قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1cm غىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش: كوسىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 60^2 + 34^2 - 2 \times 60 \times 34 \times \cos 41^\circ \\ &\approx 3\,600 + 1\,156 - 4\,080 \times 0.754\,7 \end{aligned}$$

$$\approx 1676.82.$$

$$\therefore \quad a \approx 41(\mathrm{cm}).$$

سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$\sin C = \frac{c\sin A}{a} \approx \frac{34 \times \sin 41^\circ}{41} \approx \frac{34 \times 0.656}{41} \approx 0.5440.$$

c ئۈچبۇلۇڭدىكى ئەڭ چوڭ تەرەپ بولمىغانلىقتىن، C تار بۇلۇڭ بولىدۇ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق:

$$C \approx 33^\circ,$$
$$B = 180^\circ - (A + C) \approx 180^\circ - (41^\circ + 33^\circ) = 106^\circ.$$

4 - مىسال. $\triangle ABC$ دا، $a = 134.6\,\mathrm{cm}$ ، $b = 87.8\,\mathrm{cm}$ ، $c = 161.7\,\mathrm{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ ئۈچبۇلۇڭنى يېشەيلى (بۇلۇڭ گرادۇسى $1'$ قىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش: كوسىنۇس تېئورېمىسىنىڭ نەتىجىسىگە ئاساسەن:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$= \frac{87.8^2 + 161.7^2 - 134.6^2}{2 \times 87.8 \times 161.7}$$
$$\approx 0.5543,$$
$$A \approx 56^\circ 20'$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$
$$= \frac{134.6^2 + 161.7^2 - 87.8^2}{2 \times 134.6 \times 161.7}$$
$$\approx 0.8398,$$
$$B \approx 32^\circ 53'$$
$$C = 180^\circ - (\mathrm{A} + \mathrm{B}) \approx 180^\circ - (56^\circ 20' + 32^\circ 53')$$
$$= 90^\circ 47'.$$

ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش جەريانىدا، مەلۇم بىر بۇلۇڭنى تېپىشتا بەزىدە ھەم كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن، ھەم سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىشقا بولىدۇ، ئىككى خىل ئۇسۇلنىڭ قانداق ئارتۇقچىلىقى ۋە كەمچىلىكى بار؟

مۇلاھىزە

بىز مۇھاكىمە قىلغان ئۈچبۇلۇڭ يېشىش مەسىلىسىنى قانچە خىل تىپقا ئايرىشقا بولىدۇ؟ يېشىمى ئايرىم - ئايرىم قانداق تېپىلىدۇ؟ ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش ئۈچۈن، ئۈچبۇلۇڭنىڭ بىر تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى چوقۇم بېرىلىشى كېرەكمۇ؟

مەشىق

1. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن بولسا، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 0.1° قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى $0.1\mathrm{cm}$ غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $a = 2.7\,\mathrm{cm}$, $b = 3.6\,\mathrm{cm}$, $C = 82.2^\circ$;

(2) $b = 12.9\,\mathrm{cm}$, $c = 15.4\,\mathrm{cm}$, $A = 42.3^\circ$.

1 - باب

2. △ABC دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن بولسا، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 0.1° قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 0.1cm غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $a=7\,\text{cm},\ b=10\,\text{cm},\ c=6\,\text{cm}$;

(2) $a=9.4\,\text{cm},\ b=15.9\,\text{cm},\ c=21.1\,\text{cm}$.

ئۈچبۇلۇڭ يېشىشنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ مۇھاكىمە قىلىش

ئالدى بىلەن تۆۋەندىكى مەسىلىنى تەتقىق قىلايلى.

بېرىلگىنى: △ABC دا، $a=22\text{cm}$، $b=25\text{cm}$، $A=133^\circ$. بۇ ئۈچبۇلۇڭنى يېشەيلى.

سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{25\sin 133^\circ}{22}\approx 0.831\ 1.$$

$\because$ $0^\circ<B<180^\circ$، $\therefore$ $B\approx 56.21^\circ$ ياكى $B\approx 123.79^\circ$.

$$\therefore\quad C=180^\circ-(A+B)\approx 180^\circ-(133^\circ+56.21^\circ)=-9.21^\circ$$

ياكى

$$C=180^\circ-(A+B)\approx 180^\circ-(133^\circ+123.79^\circ)=-76.79^\circ.$$

بۇ يەرگە كەلگەندە، ھېسابلاپ چىقىلغان بۇلۇڭنىڭ مەنپىي بۇلۇڭ بولۇپ قېلىشى بىزنى ھەيران قالدۇرىدۇ.

مەسىلە نەدىن چىقتى؟ بېرىلگەن شەرتتە مەسىلە بارمۇ؟

بېرىلگەن شەرتنى تەھلىل قىلىپ، $a=22\text{cm}$، $b=25\text{cm}$ ئىكەنلىكىگە دىققەت قىلساق، بۇ يەردە $a<b$، $A=133^\circ$ بولۇپ، A كەڭ بۇلۇڭ بولىدۇ، ئۈچبۇلۇڭنىڭ خۇسۇسىيىتىگە ئاساسلانساق، $A<B$ بولۇشى، شۇنىڭ بىلەن B مۇ كەڭ بۇلۇڭ بولۇشى كېرەك، ئەمما بىر ئۈچبۇلۇڭدا ئىككى كەڭ بۇلۇڭنىڭ بولۇشى مۇمكىن ئەمەس. بۇ، بېرىلگەن شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ مەۋجۇت ئەمەسلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

يۇقىرىدىكى تەھلىلدىن شۇنى بايقايمىزكى، ئۈچبۇلۇڭنى يەشكەندە، ئەگەر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى ۋە ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى بىر تەرەپنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ بېرىلگەن بولسا، بەزىدە يېشىمى يوق بولۇش ئەھۋالى كېلىپ چىقىشى مۇمكىن. تۆۋەندە مۇشۇ خىل ئەھۋال ئاستىدا ئۈچبۇلۇڭ يېشىش مەسىلىسىنى يەنىمۇ چوڭقۇرلىغان ھالدا تەتقىق قىلىپ كۆرەيلى.

a، b، A لار بېرىلگەندىكى ئۈچبۇلۇڭ يېشىش مەسىلىسىنى مىسال قىلىپ مۇھاكىمە قىلايلى. بۇ خىل ئەھۋالدا، ئالدى بىلەن سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ يەنە بىر تەرەپنىڭ قار-

CHAPTER

شىسىدىكى بۇلۇڭنىڭ سىنۇس قىممىتى

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a}$$

نى ھېسابلاپ چىقىمىز ھەمدە بۇنىڭغا ئاساسەن B نى تاپىمىز؛ ئاندىن ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىچكى بۇلۇڭلىرى يىغىندىسى تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئۈچىنچى بۇلۇڭ

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

نى ھېسابلاپ چىقىپ، ئاخىرىدا سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئۈچىنچى تەرەپنى ھېسابلاپ چىقىمىز:

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}.$$

1. ئەگەر بېرىلگەن A بۇلۇڭ كەڭ بۇلۇڭ ياكى تىك بۇلۇڭ بولسا، ئۇ ھالدا چوقۇم $a>b$ بولغاندىلا مەسىلىنىڭ يېشىمى بولىدۇ، بۇ ۋاقىتتا $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ دىن پايدىلىنىپ B نى ھېسابلىغاندا، B نىڭ تار بۇلۇڭلۇق قىممىتىنىلا ئېلىشقا بولىدۇ، شۇڭا مەسىلىنىڭ بىر يېشىمى بار.

2. ئەگەر بېرىلگەن A بۇلۇڭ تار بۇلۇڭ ھەمدە $a>b$ ياكى $a = b$ بولسا، بۇ ۋاقىتتا $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ دىن پايدىلىنىپ B نى ھېسابلىغاندىمۇ يەنىلا B نىڭ تار بۇلۇڭلۇق قىممىتىنىلا ئېلىشقا بولىدۇ، شۇڭا بۇ چاغدىمۇ مەسىلىنىڭ بىرلا يېشىمى بار بولىدۇ.

3. ئەگەر بېرىلگەن A بۇلۇڭ تار بۇلۇڭ ھەمدە $a<b$ بولسا، تۆۋەندىكى ئۈچ خىل ئەھۋالغا بۆلۈپ مۇھاكىمە قىلىمىز:

(1) ئەگەر $a>b\sin A$ بولسا، $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ دىن $\sin B<1$ نى ھېسابلاپ چىقىقىلى بولىدۇ ـ دە، B بىر تار بۇلۇڭلۇق قىممەت بىلەن بىر كەڭ بۇلۇڭلۇق قىممەتنى ئالالايدۇ، شۇڭا بۇ چاغدا مەسىلىنىڭ ئىككى يېشىمى بار بولىدۇ.

(2) ئەگەر $a = b\sin A$ بولسا، $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ دىن $\sin B = 1$ نى ھېسابلاپ چىقىقىلى بولىدۇ ـ دە، B پەقەت تىك بۇلۇڭ بولىدۇ، شۇڭا بۇ چاغدا مەسىلىنىڭ بىرلا يېشىمى بار بولىدۇ.

(3) ئەگەر $a<b\sin A$ بولسا، $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ دىن $\sin B>1$ نى ھېسابلاپ چىقىقىلى بولىدۇ ـ دە، بىر بۇلۇڭنىڭ سىنۇس قىممىتى 1 دىن چوڭ بولمايدىغانلىقتىن، بۇ چاغدا مەسىلىنىڭ يېشىمى بولمايدۇ.

يۇقىرىدا بېرىلگەن ھەر خىل ئەھۋاللاردىكى ئۈچبۇلۇڭنىڭ يېشىمىنى رەسىم سىزىش ئارقىلىق ئىپادىلىيەلەمسىز؟

ئەگەر بىر تەرەپ بىلەن ئىككى بۇلۇڭ بېرىلسە، يېشىمى يوق بولۇش ئەھۋالى كۆرۈلەمدۇ؟

بىزگە مەلۇمكى، ھەرقانداق ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپىنىڭ يىغىندىسى ئۈچىنچى تەرىپىدىن چوڭ بولىدۇ. بېرىلگەن ئۈچ تەرەپ بويىچە ئۈچبۇلۇڭ ھاسىل قىلىشتا، بېرىلگەن بۇ ئۈچ تەرەپ چوقۇم يۇقىرىدىكى شەرتنى قانائەتلەندۈرۈشى كېرەك. مەسىلەن، ئەگەر بېرىلگەن

1 - باب

ئۈچ تەرەپنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم 3cm ، 4cm ، 5cm بولسا، بىز بۇ ئۈچبۇلۇڭنى ھاسىل قىلالايمىز. ئۈچ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم 3cm ، 4cm ، 7cm ياكى 3cm ، 4cm ، 8cm بولغان ئۈچبۇلۇڭنى ھەرگىزمۇ ھاسىل قىلالمايمىز. چۈنكى، بۇ يەردە بېرىلگەن ئىككى تەرەپ-نىڭ يىغىندىسى ئۈچىنچى تەرەپكە تەڭ ياكى ئۇنىڭدىن كىچىك بولۇپ قالغان. بۇ خىل ئەھۋالدا ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشمۇ ئەلۋەتتە مۇمكىن بولماي قالىدۇ. يۇقىرىقىلاردىن بىلىشكە بو-لىدۇكى، ئۈچبۇلۇڭنى بېرىلگەن ئۈچ تەرىپى بويىچە يەشكەندە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقلىرى چوقۇم ئۈچبۇلۇڭ ھاسىل قىلىش شەرتىنى قانائەتلەندۈرۈشى كېرەك، مۇشۇنداق بولغاندىلا ئۈچبۇلۇڭ-نى يېشىش ئاندىن مەنىگە ئىگە بولىدۇ.

ئەگەر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئۈچبۇلۇڭ بىردىنبىر ئېنىقلانغان بولىدۇ ھەم ئۇنى يەشكىلىمۇ بولىدۇ. بۇ چاغدا كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئۈچىنچى تەرەپنى ھېسابلاپ چىقىپ، كوسىنۇس تېئورېمىسىنىڭ نەتىجىسى ياكى سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ قالغان بۇلۇڭلارنى ھېسابلاپ چىقالايمىز.

1.1 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 1° قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1cm غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $A=70^\circ$, $C=30^\circ$, $c=20\,\mathrm{cm}$;

(2) $A=34^\circ$, $B=56^\circ$, $c=68\,\mathrm{cm}$.

2. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 1° قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1cm غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $b=26\,\mathrm{cm}$, $c=15\,\mathrm{cm}$, $C=23^\circ$;

(2) $a=15\,\mathrm{cm}$, $b=10\,\mathrm{cm}$, $A=60^\circ$;

(3) $b=40\,\mathrm{cm}$, $c=20\,\mathrm{cm}$, $C=25^\circ$.

3. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 1° قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1cm غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $a=49\,\mathrm{cm}$, $b=26\,\mathrm{cm}$, $C=107^\circ$;

(2) $c=55\,\mathrm{cm}$, $a=58\,\mathrm{cm}$, $B=66^\circ$;

(3) $b=38\,\mathrm{cm}$, $c=40\,\mathrm{cm}$, $A=106^\circ$.

4. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن، ئۈچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى 1° قىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $a = 9\,\text{cm},\ b = 10\,\text{cm},\ c = 15\,\text{cm}$;

(2) $a = 31\,\text{cm},\ b = 42\,\text{cm},\ c = 27\,\text{cm}$.

B گۇرۇپپا

1. ئىسپاتلاڭ: ئۈچبۇلۇڭغا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەرنىڭ رادىئۇسى R بولسا، ئۇ ھالدا:

$$a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,\quad c = 2R\sin C.$$

2. ئەگەر $\triangle ABC$ دا خۇسۇسىيەت $a\cos A = b\cos B$ كۆچكە ئىگە بولسا، بۇ ئۈچبۇلۇڭنىڭ شەكلى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە بولىدۇ؟

2-1 ئەمەلىي مىساللار

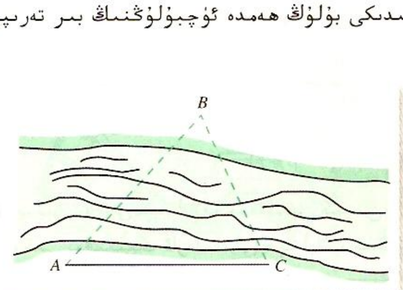
سىنۇس تېئورېمىسى بىلەن كوسىنۇس تېئورېمىسى ئەمەلىي ئۆلچەشلەردە كەڭ قوللىنىلىدۇ، تۆۋەندە ئۇلارنىڭ ئارىلىق، ئېگىزلىك، بۇلۇڭ گرادۇسى قاتارلىقلارنى ئۆلچەش مەسىلىلىرىدىكى بەزىبىر قوللىنىلىشلىرىنى تونۇشتۇرىمىز. بۇ ئەمەلىي مىساللاردا، ئۆلچىگۈچى بۇلۇڭ ۋە ئارىلىقنى ئۆلچەشتە ئىشلىتىلىدىغان تېئودولىت ۋە پولات رۇلېتكا (پولات يۆگىمە سىزغۇچ) قاتارلىق قوراللاردىن پايدىلىنىپ ئۆلچەش ئېلىپ بارىدۇ.

ئۆگىنىش داۋامىدا، ساۋاقداشلار مىسالدا نېمە ئۈچۈن باشقا شەرتلەر بېرىلمەستىن، مۇشۇ شەرتلەر بېرىلىدۇ؟ دېگەن سوئال ئۈستىدە ھەر ۋاقىت ئويلىنىشى، شۇنداقلا ئۇلگە مىسال ۋە كۆنۈكمىلەردىكى بىر گۇرۇپپا بېرىلگەن شەرت كۆپ ھاللار مۇشۇ تۈردىكى ئۆلچەش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىشنىڭ مەلۇم خىل ئالاھىدە مۇھىت ۋە شەرت چەكلىمىسى ئاستىدىكى بىر ئۆلچەش لايىھىسىنى يوشۇرۇن ھالدا ئۆز ئىچىگە ئالىدىغانلىقىغا دىققەت قىلىشى كېرەك. بۇ خىل مۇھىت ۋە شەرت چەكلىمىسى ئاستىدا، باشقا لايىھەلەردە بەزى مىقدارلارنى ئۆلچەش ئىمكانىيىتى بولماي قېلىشى مۇمكىن، شۇ سەۋەبتىن، ئاشۇ بىر گۇرۇپپا بېرىلگەن شەرتكە نىسبەتەن باشقا ئۆلچەش لايىھەلىرىنى قوللىنىشقا بولمايدۇ.

تۆۋەندە ئارىلىقنى ئۆلچەشكە دائىر بىرقانچە مەسىلە بېرىلدى.

1 - مىسال. 1.2.1 - رەسىمدىكىدەك، دەريانىڭ ئىككى قىرغىقىدىكى A، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى ئۆلچەش ئۈچۈن، ئۆلچىگۈچى A بىلەن ئوخشاش بىر ياقتىكى دەريا قىرغىقىدىن بىر C نۇقتىنى تاللاپ، A بىلەن C نىڭ ئارىلىقى 55m، $\angle BAC = 51^\circ$، $\angle ACB = 75^\circ$ ئىكەنلىكىنى ئۆلچەپ چىققان. A، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى تاپايلى (0.1m غىچە ئېنىقلىقتا).

تەھلىل: تاپماقچى بولغان AB تەرەپنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ ھەمدە ئۈچبۇلۇڭنىڭ بىر تەرىپى AC بېرىلگەن، ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىچكى بۇلۇڭلىرى يىغىندىسى تېئورېمىسىغا ئاساسەن AC تەرەپنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭنى، سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن AB تەرەپنى ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ.



1.2.1 - رەسىم

يېشىش: سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

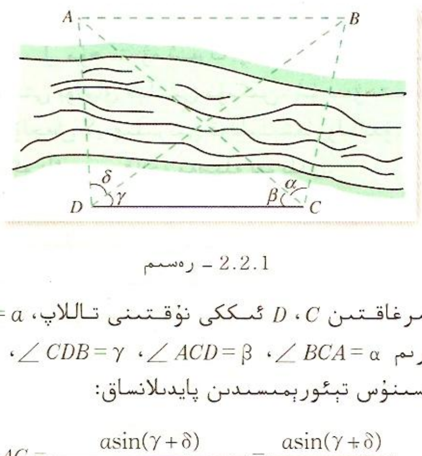
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$AB=\frac{AC\sin C}{\sin B}$$
$$=\frac{55\sin C}{\sin B}$$
$$=\frac{55\sin\ 75^{\circ}}{\sin(180^{\circ}-51^{\circ}-75^{\circ})}$$
$$=\frac{55\sin\ 75^{\circ}}{\sin 54^{\circ}}$$
$$\approx 65.7(\text{m}).$$

جاۋابى: A، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقى 65.7 مېتىر.

2 ـ مىسال. 2.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك، A، B نۇقتىلارنىڭ ھەر ئىككىسى دەريانىڭ قارشى قىرغىقىدا (بارغىلى بولمايدۇ) بولسا، A، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى ئۆلچەشكە بولىدىغان بىر خىل ئۇسۇل لايىھىلەيلى.

تەھلىل: دەريانىڭ بۇ قىرغىقىدىكى بىر C نۇقتىدىن قارشى قىرغاقتىكى ئىككى نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلارنى 1 ـ مىسالدىكى ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ، ئاندىن $\angle BCA$ نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى ئۆلچەپ چىقساق، A، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ.



2.2.1 ـ رەسىم

يېشىش: ئۆلچىگۈچى قىرغاقتىن C، D ئىككى نۇقتىنى تاللاپ، $CD=a$ نى ھەمدە C، D ئىككى نۇقتىدا تۇرۇپ ئايرىم ـ ئايرىم $\angle BCA=\alpha$، $\angle ACD=\beta$، $\angle CDB=\gamma$، $\angle BDA=\delta$ نى ئۆلچىۋالدۇ. $\triangle ADC$ بىلەن $\triangle BDC$ دا، سىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلانساق:

$$AC=\frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin[180^{\circ}-(\beta+\gamma+\delta)]}=\frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)},$$
$$BC=\frac{a\sin\ \gamma}{\sin[180^{\circ}-(\alpha+\beta+\gamma)]}=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

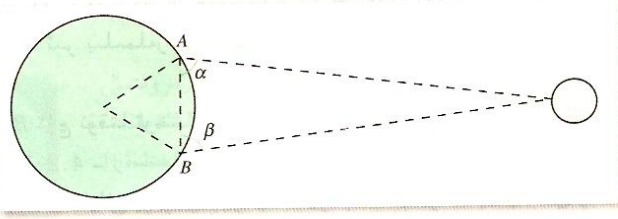
AC بىلەن BC نى ھېسابلاپ چىققاندىن كېيىن، $\triangle ABC$ دا، كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ A، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ:

$$AB=\sqrt{AC^{2}+BC^{2}-2AC\times BC\cos\ \alpha}.$$

قېنى ئويلاپ بېقىڭلار، يەنە باشقا ئۆلچەش ئۇسۇلى بارمۇ ـ يوق؟

1 ـ باب

ئۆلچەشتە، بىز ئۆلچەش ئېھتىياجىغا ئاساسەن بەلگىلىۋالىدىغان كېـ-ـسىك ئاساسىي سىزىق دەپ ئاتىلىدۇ، مەسىلەن، 1 ـ مىسالدىكى AC ، 2 ـ مىسالدىكى CD دېگەندەك. ئۆلچەش جەريانىدا، ئۆلچەشنى يۇقىرى ئې-ـنىقلىق دەرىجىسىگە ئىگە قىلىش ئۈچۈن، ئاساسىي سىزىقنىڭ ئۇزۇنلۇ-ـقىنى ئەمەلىي ئېھتىياجغا ئاساسەن مۇۋاپىق بېكىتىۋېلىش كېرەك. ئومۇ-ـمەن، ئاساسىي سىزىق قانچە ئۇزۇن بولسا، ئۆلچەشنىڭ ئېنىقلىق دەرىجە-ـسى شۇنچە يۇقىرى بولىدۇ. مەسىلەن، فرانسىيىلىك ئىككى ئاسترونوم 1671 ـ يىلى يەر شارى بىلەن ئاي شارىنىڭ ئارىلىقىنى ئۆلچەش ئۈچۈن، ئورنى ئاساسەن ئوخشاش بىر مېرىدىئان سىزىقىدا بولغان بېرلىن ۋە ئۇمىد تۇمشۇقىدىن پايدىلىنىپ، α ، β نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى ھەم بۇ ئىككى جاينىڭ ئارىلىقى AB نى ئۆلچەش ۋە ھېسابلاپ چىقىش ئارقىلىق، يەر شارى بىلەن ئاي شارىنىڭ ئارىلىقى تەخمىنەن 385400km ئىكەنلىكىنى ھېسابلاپ چىققان (3.2.1 ـ رەسىم). يەر شارىدا پايدىلىنىشىمىزغا بولىدىغان ئەڭ ئۇزۇن ئاساسىي سىزىق يەر شارىنىڭ ئېللىپس شەكىللىك ئوربىتىسىنىڭ ئۇزۇن ئوقىنىڭ ئۇزۇن-ـلۇقىدىن ئىبارەت. ئەلۋەتتە، پەن ـ تېخنىكىنىڭ تەرەققىي قىلىشىغا ئەگىشىپ، تېخىمۇ ئىلغار ۋە توغرا بولغان ئارىلىق ئۆلچەش ئۇسۇللىرى مەيدانغا كەلمەكتە.

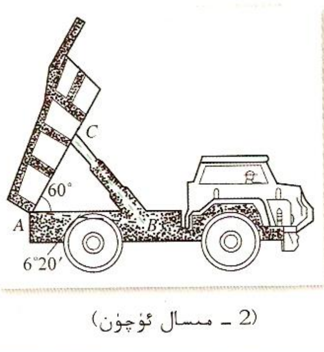


3.2.1 ـ رەسىم

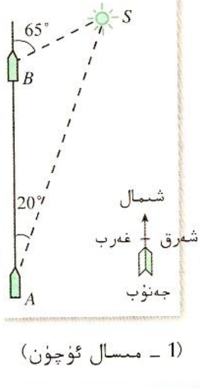
مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، بىر پاراخوت 32.2n mile/h تېزلىك بىلەن دەل شىمالغا قاراپ ماڭىدۇ. A ئورۇندىن قارى-ـغاندا، S ماياك پاراخوتنىڭ شىمالدىن شەرققە °20 ئاغقان يۆنىلىشىدە تۇرغان، 30min تىن كېيىن B ئورۇنغا بې-ـرىپ قارىغاندا، S ماياك پاراخوتنىڭ شىمالدىن شەرققە °65 ئاغقان يۆ-ـنىلىشىدە تۇرغان. بۇ ماياكنىڭ 6.5n mile نېرىسىدىكى دېڭىز رايو-ـنى بىخەتەر رايون بولسا، بۇ پاراخوت دەل شىمالغا قاراپ داۋاملىق ماڭسا بولامدۇ؟

2. ئاپتوماتىك يۈك چۈشۈرۈش ئاپتوموبىلىنىڭ كوزۇپىدا سۈيۈق-ـلۇق بېسىمى قۇرۇلمىسى ئىشلىتى-ـلىدۇ. قۇرۇلمىنى لايىھەلىگەندە ماي پومپىسىنىڭ تىرەش دەستىسى BC



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

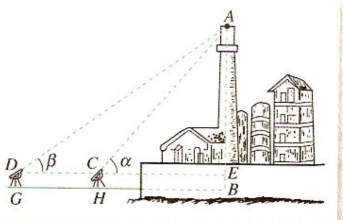
نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ھېسابلاشقا توغرا كېلىدۇ. كوزۇپنىڭ ئەڭ چوڭ ئېچىلىش بۇلۇڭى $60°$، ماي پومپىسىنىڭ چوققا نۇقتىسى B بىلەن كوزۇپنىڭ تايىنىش نۇقتىسى A ئارىسىدىكى ئارىلىق AB 1.95m، AB بىلەن گورىزونتال سىزىق ئارىسىدىكى بۇلۇڭ $6°20'$، AC نىڭ ئۇزۇنلۇقى 1.40m ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، BC نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ھېسابلاڭ (0.01m غىچە ئېنىقلىقتا).

ئەمدى ئېگىزلىك ئۆلچەشكە دائىر بىرقانچە مەسىلىنى كۆرۈپ ئۆتەيلى.

3 ـ مىسال. AB تۆۋىي B غا بارغىلى بولمايدىغان بىر قۇرۇلۇش بولۇپ، A بولسا بۇ قۇرۇلۇشنىڭ ئەڭ يۇقىرى نۇقتىسى. قۇرۇلۇشنىڭ ئېگىزلىكى AB نى ئۆلچەشنىڭ بىر خىل ئۇسۇلىنى لايىھەلەيلى.

تەھلىل: قۇرۇلۇشنىڭ تۆۋىي B غا بارغىلى بولمايدىغانلىقتىن، قۇرۇلۇشنىڭ ئېگىزلىكىنى بىۋاسىتە ئۆلچەپ چىقىشقا بولمايدۇ. تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشكە دائىر بىلىملەرگە ئاساسەن، بىر C نۇقتىدىن قۇرۇلۇشنىڭ چوققىسى A غىچە بولغان ئارىلىق CA نى ھەمدە C نۇقتىدىن A نى كۆزەتكەندىكى يۇقىرىغا قاراش بۇلۇڭىنى ئۆلچەپ چىقالىساقلا، قۇرۇلۇشنىڭ ئېگىزلىكىنى ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ. شۇڭا، ئالدى بىلەن CA نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشكە دائىر بىلىملەردىن پايدىلىنىپ ئۆلچەپ چىقىشىمىز كېرەك.

يېشىش: B، G، H ئۈچ نۇقتا ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتىدىغان قىلىپ بىر گورىزونتال ئاساسىي سىزىق HG (4.2.1 ـ رەسىم) نى تاللايمىز. بۇلۇڭ ئۆلچەش ئەسۋابىدىن پايدىلىنىپ، G، H ئىككى نۇقتىدا تۇرۇپ A غا قاراش بۇلۇڭى ئايرىم ـ ئايرىم α، β بولىدىغانلىقىنى ۋە $CD=a$ نى ئۆلچەپ چىقىمىز، بۇلۇڭ ئۆلچەش ئەسۋابىنىڭ ئېگىزلىكى h. شۇنىڭ بىلەن، $\triangle ACD$ دا سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:



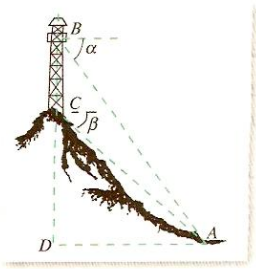
4.2.1 ـ رەسىم

$$AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$
$$AB=AE+h$$
$$=AC\sin\alpha+h$$
$$=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}+h.$$

4 ـ مىسال. 5.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك، تاغ چوققىسىدىكى تۆمۈر مۇنارنىڭ B ئورنىدا تۇرۇپ ئۆلچىگەندە يەر يۈزىدىكى بىر A نۇقتىنىغا قاراش بۇلۇڭى $\alpha=54°40'$، مۇنار تۆۋىدىكى C ئورنىدا تۇرۇپ ئۆلچىگەندە A غا قاراش بۇلۇڭى $\beta=50°1'$ بولغان. تۆمۈر مۇنارنىڭ BC بۆلىكىنىڭ ئېگىزلىكى 27.3m ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، تاغنىڭ ئېگىزلىكى CD نى تاپايلى (1m غىچە ئېنىقلىقتا).

تەھلىل: بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، ئالدى بىلەن AB ياكى AC نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ھېسابلاپ چىقىشىمىز كېرەك.

يېشىش: $\triangle ABC$ دا، $\angle BCA=90°+\beta$، $\angle ABC=90°-\alpha$، $\angle BAC=\alpha-\beta$، $\angle BAD=\alpha$. سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:



5.2.1 ـ رەسىم

$$\frac{BC}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{AB}{\sin(90^\circ+\beta)},$$

$$\therefore\quad AB=\frac{BC\sin(90^\circ+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{BC\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Rt $\triangle ABD$ نى يەشسەك:

$$BD=AB\sin\angle BAD$$
$$=\frac{BC\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

ئۆلچەنگەن سانلىق مەلۇماتلارنى يۇقىرىقى ئىپادىگە قويساق:

$$BD=\frac{27.3\cos50^\circ1'\sin54^\circ40'}{\sin(54^\circ40'-50^\circ1')}$$
$$=\frac{27.3\cos50^\circ1'\sin54^\circ40'}{\sin4^\circ39'}$$
$$\approx177(\mathrm{m}).$$
$$CD=BD-BC\approx177-27.3\approx150(\mathrm{m}).$$

جاۋابى: تاغنىڭ ئېگىزلىكى تەخمىنەن 150 مېتىر.

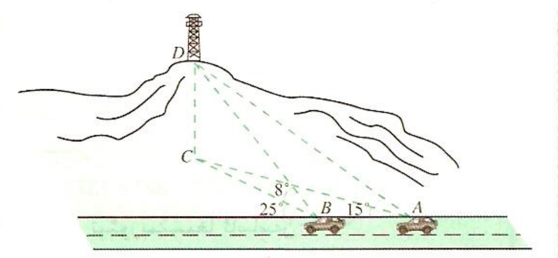
5 ـ مىسال. 6.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر ئاپتوموبىل گورىزونتال تاشيولدا دەل غەربكە قاراپ ماڭدى، A ئورۇنغا كەلگەندە، تاشيولنىڭ شىمال تەرىپىدىكى يىراق بىر تاغ چوققىسى D نىڭ غەربتىن شىمالغا 15° ئاغقان يۆنىلىشتە ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن، يەنە 5km مېڭىپ B ئورۇنغا كەلگەندە، بۇ تاغ چوققىسىنىڭ غەربتىن شىمالغا 25° ئاغقان يۆنىلىشتە، ئۇنىڭغا قاراش بۇلۇڭى 8° ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن بولسا، بۇ تاغنىڭ ئېگىزلىكى CD نى تاپايلى.

تەھلىل: ئېگىزلىك CD نى ئۆلچەش ئۈچۈن، ئېگىزلىك ياتقان تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ يەنە بىر تىك تەرىپى ياكى يانتۇ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۆلچەپ چىقساقلا، بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن BC نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ.

يېشىش: $\triangle ABC$ دا،

$$\angle A=15^\circ,\ \angle C=25^\circ-15^\circ=10.$$

سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:



6.2.1 ـ رەسىم

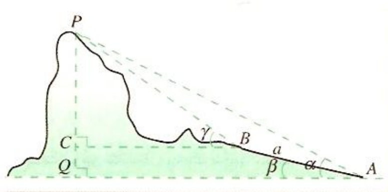
$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C},$$
$$BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}=\frac{5\sin15^\circ}{\sin10^\circ}$$
$$\approx7.4524(\mathrm{km}).$$
$$CD=BC\times\tan\angle DBC$$
$$\approx BC\times8^\circ\approx1047(\mathrm{m}).$$

جاۋابى: تاغنىڭ ئېگىزلىكى تەخمىنەن 1047 مېتىر.

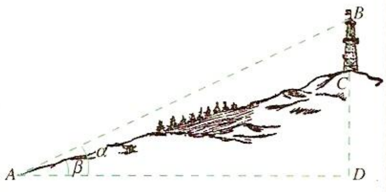
CHAPTER

مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، تاغ ئېتىكىدىكى A ئورۇندىن تاغ چوققىسى P غا قاراش بۇلۇڭى α ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن بولۇپ، يانتۇلۇق بۇلۇڭى β بولغان يانتۇلۇقنى بويلاپ يۇقىرىغا a مېتىر مېڭىپ B ئورۇنغا كەلگەندە، B ئورۇندىن تاغ چوققىسى P غا قاراش بۇلۇڭى γ ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن بولسا، تاغنىڭ ئېگىزلىكى $h=\dfrac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.



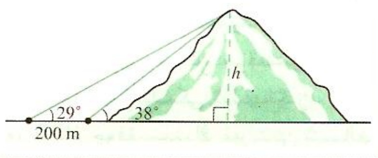
(1 ـ مىسال ئۈچۈن)



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. تاغ ئۈستىدىكى نېفىت قۇدۇقى جازىسى BC نىڭ ئېگىزلىكىنى ئۆلچەش ئۈچۈن، تاغ ئېتىكىدىكى A ئورۇندا تۇرۇپ ئۆلچىگەندە $AC=65.3\text{m}$، جازىنىڭ چوققىسى B غا قاراش بۇلۇڭى $\alpha=25°25'$ بولغان. تاغ يانباغرىنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\beta=17°38'$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، قۇدۇق جازىسىنىڭ ئېگىزلىكى BC نى تېپىڭ.

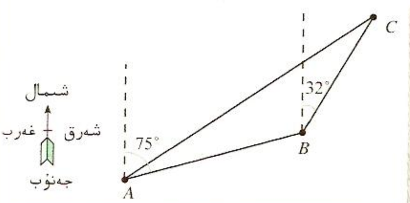
3. چارلاش ئەترىتىنىڭ ئەزاسى بىر تاغقا قاراپ ماڭىدى، ئۇ ئالدى ـ كەينى ئىككى جايدا تاغ چوققىسىغا قاراش بۇلۇڭىنىڭ ئايرىم ـ ئايرىم $29°$ ۋە $38°$ ئىكەنلىكىنى كۆزەتكەن بولۇپ، بۇ ئىككى كۆزىتىش نۇقتىسىنىڭ ئارىلىقى 200m بولسا، بۇ تاغنىڭ ئېگىزلىكىنى تېپىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

تۆۋەندە بۇلۇڭنى ئۆلچەشكە دائىر بىر مەسىلە بېرىلدى.

6 ـ مىسال. 7.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر پاراخوت A دىن يولغا چىقىپ، شىمالدىن شەرققە $75°$ ئاغقان يۆنىلىش بويىچە 67.5 n mile مېڭىپ B ئارالغا، ئاندىن B دىن يولغا چىقىپ، شىمالدىن شەرققە $32°$ ئاغقان يۆنىلىش بويىچە 54.0 n mile مېڭىپ C ئارالغا يېتىپ بارغان. ئەگەر كېيىنكى قېتىملىق دېڭىز سەپىرىدە A دىن يولغا چىقىپ C غا بىۋاستە بارماقچى بولسا، بۇ پاراخوت قانداق يۆنىلىشتە قانچىلىك مېڭىشى كېرەك (بۇلۇڭ گرادۇسى $0.1°$ قىچە، ئارىلىق 0.01 n mile غىچە ئېنىقلىقتا)؟



7.2.1 ـ رەسىم

يېشىش: $\triangle ABC$ دا،

$$\angle ABC=180°-75°+32°=137°,$$

كوسىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

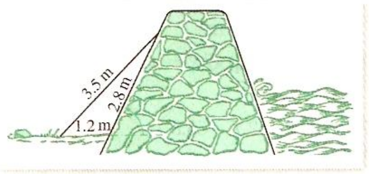
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\angle ABC}$$
$$= \sqrt{67.5^2 + 54.0^2 - 2 \times 67.5 \times 54.0 \times \cos 137^\circ}$$
$$\approx 113.15,$$

سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$\frac{BC}{\sin\angle CAB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC},$$
$$\sin\angle CAB = \frac{BC\sin\angle ABC}{AC}$$
$$= \frac{54.0\sin 137^\circ}{113.15}$$
$$\approx 0.3255,$$
$$\therefore \quad \angle CAB = 19.0^\circ,$$
$$75^\circ - \angle CAB = 56.0^\circ.$$

جاۋابى: بۇ پاراخوت شىمالدىن شەرققە °56.0 ئاغقان يۆنىلىشتە 113.15 n mile مېڭىشى كېرەك.

مەشىق



3.5m ئۇزۇنلۇقتىكى تاياق توسمىغا تىرەپ قويۇلغان بولۇپ، تاياقنىڭ تۆۋەن ئۇچى توسما تۆۋىدىن 1.2m يىراقلىقتىكى يەر يۈزىدە، يۇقىرى ئۇچى توسما تېمىنىڭ 2.8m كېلىدىغان يېرىدە بولسا، توسمىنىڭ يەر يۈزىگە نىسبەتەن يانتۇلۇق بۇلۇڭى α نى تېپىڭ.

سىنۇس تېئورېمىسى بىلەن كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ، يەنىمۇ ئىلگىرىلىگەن ھالدا ئۈچبۇلۇڭغا دائىر بەزىبىر ھېسابلاش مەسىلىلىرىنى ۋە تىرگونومېتىرىيىلىك تەپمۇتەڭلىكنى ئىسپاتلاش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلالايمىز.

$\triangle ABC$ دا، BC، CA، AB تەرەپلەردىكى ئېگىزلىكلەرنى ئايرىم ـ ئايرىم h_a، h_b، h_c قىلىپ يېزىۋالساق، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكىلەرنى ئاسانلا ئىسپاتلىيالايمىز:

$$h_a = b\sin C = c\sin B,$$
$$h_b = c\sin A = a\sin C,$$
$$h_c = a\sin B = b\sin A.$$

ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈز فورمۇلىسى $S = \frac{1}{2}ah$ قا ئاساسەن، ئۈچبۇلۇڭنىڭ تۆۋەندىكىدەك يۈز فورمۇلىسى ئېگىزلىك فورمۇلىسى $h_a = b\sin C$ دىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

ئوخشاش يول بىلەن:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

7 - مىسال. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزى S نى تاپايلى (0.1cm^2 غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $B=148.5°$ ، $c=23.5\text{cm}$ ، $a=14.8\text{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن؛

(2) $b=3.16\text{cm}$ ، $C=65.8°$ ، $B=62.7°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن؛

(3) ئۈچ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم $c=38.7\text{cm}$ ، $b=27.3\text{cm}$ ، $a=41.4\text{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

يېشىش: (1) $S=\frac{1}{2}ca\sin B$ دىن پايدىلانساق:

$$S=\frac{1}{2}\times 23.5\times 14.8\times \sin 148.5°\approx 90.9(\text{cm}^2);$$

(2) سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B},$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b^2\frac{\sin C\sin A}{\sin B},$$

$$A=180°-(B+C)=180°-(62.7°+65.8°)$$
$$=51.5°,$$

$$S=\frac{1}{2}\times 3.16^2\times\frac{\sin 65.8°\ \sin 51.5°}{\sin 62.7°}\approx 4.0(\text{cm}^2);$$

(3) كوسىنۇس تېئورېمىسىنىڭ نەتىجىسىگە ئاساسەن:

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=\frac{38.7^2+41.4^2-27.3^2}{2\times 38.7\times 41.4}$$
$$\approx 0.7697,$$

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}\approx\sqrt{1-0.7697^2}\approx 0.6384.$$

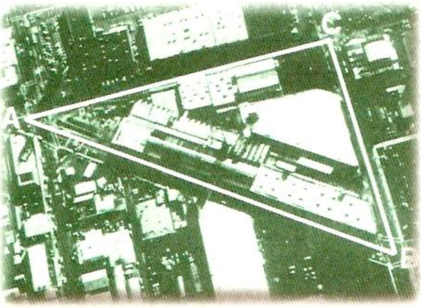
$S=\frac{1}{2}ca\sin B$ دىن پايدىلانساق:

$$S\approx\frac{1}{2}\times 38.7\times 41.4\times 0.6384\approx 511.4(\text{cm}^2).$$

8 - مىسال. 8.2.1 - رەسىمدىكىدەك، مەلۇم شەھەر شەھەر مۇھىتى قۇرۇلۇشى ئېلىپ بارغاندا، ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك بىر رايوننى شەھەر ئىچى باغچىسى قىلىپ ئۆزگەرتمەكچى بولغان، بۇ ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك رايوننىڭ ئۈچ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم 68m ، 88m ، 127m ئىكەنلىكى ئۆلچەن-

گەن بولسا، بۇ رايوننىڭ يەر مەيدانى (يۈزى) قانچىلىك ($0.1\mathrm{m}^2$ غىچە ئېنىقلىقتا)؟

يېشىش: $a=68\mathrm{m}$، $b=88\mathrm{m}$، $c=127\mathrm{m}$ دەپ پەرەز قىلساق، كوسىنۇس تېئورېمىسىنىڭ نەتىجىسىگە ئاساسەن:



8.2.1 ـ رەسىم

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{127^2+68^2-88^2}{2\times127\times68}$$

$$\approx 0.7532,$$

$$\sin B=\sqrt{1-0.7532^2}\approx 0.6578.$$

$S=\frac{1}{2}ca\sin B$ دىن پايدىلانساق:

$$S\approx\frac{1}{2}\times127\times68\times0.6578\approx 2840.4(\mathrm{cm}^2).$$

جاۋابى: بۇ رايوننىڭ يەر مەيدانى $2840.4\mathrm{m}^2$.

9 ـ مىسال. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلايلى:

(1) $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}$;

(2) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$.

ئىسپات: (1) سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$$

دەپ پەرەز قىلىشقا بولىدۇ، روشەنكى، $k\neq0$، شۇڭا

$$\text{سول تەرەپ}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{k^2\sin^2A+k^2\sin^2B}{k^2\sin^2C}$$

$$=\frac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}=\text{ئوڭ تەرەپ};$$

(2) كوسىنۇس تېئورېمىسىنىڭ نەتىجىسىگە ئاساسەن:

$$\text{ئوڭ تەرەپ}=2\left(bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$=(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)$$

$$=a^2+b^2+c^2=\text{سول تەرەپ}.$$

مەشىق

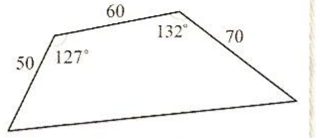
1. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزى S نى تېپىڭ ($0.01\mathrm{cm}^2$ غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $a=18\mathrm{cm}$، $c=25\mathrm{cm}$، $B=48.5^\circ$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن؛

(2) $B=52.8^\circ$، $C=75.8^\circ$، $b=16\mathrm{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن؛

(3) ئۈچ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم $a = 44\text{cm}$، $\text{b} = 23\text{cm}$، $\text{c} = 37\text{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

2. تۆت تەرەپلىك شەكلىدىكى بىر پارچە يەرنىڭ شەكلى رەسىمدىكىدەك بولۇپ، ئۇنىڭ ئۈچ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم 50m، 60m، 70m، ئىككى ئىچكى بۇلۇڭى $127°$ ۋە $132°$ بولسا، بۇ تۆت تەرەپلىكنىڭ يۈزىنى تېپىڭ (0.01m^2 غىچە ئېنىقلىقتا).



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

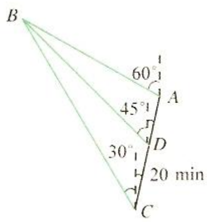
$$a = b\cos C + c\cos B,$$
$$b = c\cos A + a\cos C,$$
$$c = a\cos B + b\cos A.$$

2.1 ـ كۆنۈكمە

A گورۇپپا

(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. رەسىمدىكىدەك، يۈك پاراخوتى دېڭىزدا 35 n mile/h تېزلىك بىلەن ئازىمۇت بۇلۇڭ (شىمالنى كۆرسىتىپ تۇرغان يۆنىلىشتىن سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ يۆنىلىشى بويىچە نىشان يۆنىلىشى سىزىقىغا ئايلىنىپ كەلگەندىكى گورىزونتال بۇلۇڭ) $148°$ بولغان يۆنىلىشتە ماڭدى. پاراخوتنىڭ ئورنىنى بەلگىلەش ئۈچۈن، B نۇقتىدىن A ماياكنى كۆزەتكەندىكى ئازىمۇت بۇلۇڭ $126°$ بولغان، يېرىم سائەت مېڭىپ C نۇقتىغا كەلگەندىن كېيىن، A ماياكنى كۆزەتكەندىكى ئازىمۇت بۇلۇڭ $78°$ بولغان بولسا، يۈك پاراخوتىنىڭ C نۇقتىغا كەلگەن چاغدىكى A ماياك بىلەن بولغان ئارىلىقىنى تېپىڭ (0.01 n mile غىچە ئېنىقلىقتا).

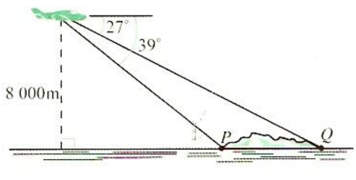


(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. A پاراخوت بىلەن B پاراخوت سائەت 12 دە C پورتتىن ئايرىلغان بولۇپ، ئىككى پاراخوتنىڭ مېڭىش يۆنىلىشى ئارىسىدىكى بۇلۇڭ $120°$، A پاراخوتنىڭ مېڭىش تېزلىكى 25 n mile/h، B پاراخوتنىڭ مېڭىش تېزلىكى 15 n mile/h بولسا، چۈشتىن كېيىن سائەت 2 دە ئىككى پاراخوتنىڭ ئارىلىقى قانچىلىك بولىدۇ؟

3. رەسىمدىكىدەك، بىر پاراخوت 30 n mile/h تېزلىك بىلەن شىمالدىن شەرققە $10°$ ئاغقان يۆنىلىشتىكى A ئارالغا قاراپ مېڭىپ، A ئارالدا 10min توختىغاندىن كېيىن يەنە A ئارالنىڭ شىمالدىن غەربكە $60°$ ئاغقان يۆنىلىشىدىكى B ئارالغا قاراپ ماڭماقچى بولدى. پاراخوت دەل چۈشتىن بۇرۇن سائەت 10 دا C ئورۇنغا يېتىپ بارغان، بۇ چاغدا B ئارالنىڭ شىمالدىن غەربكە $30°$ ئاغقان يۆنىلىشتە ئى-

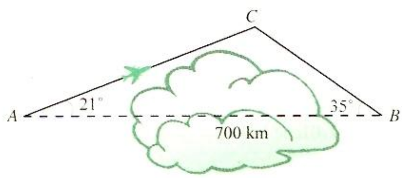
كەنلىكى ئۆلچەنگەن، پاراخوت C ئورۇندىن يەنە 20min مېڭىپ D ئورۇنغا يېتىپ بارغان، بۇ چاغدا B ئارالنىڭ شىمالدىن غەربكە °45 ئاغقان يۆنىلىشتە ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن، مۇشۇ بويىچە ھې-سابلىغاندا، بۇ پاراخوت قايسى ۋاقىتتا B ئارالغا يېتىپ بارالايدۇ؟



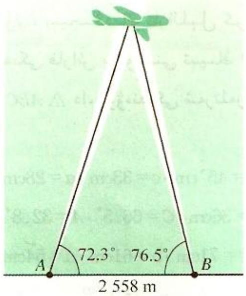
(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. بىر ئايروپىلان دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكى 8000m بولغان ھاۋا بوشلۇقىدا ئۇچتى. بوشلۇقتا ئالدى تەرەپتىكى دېڭىز ئارىلى-نىڭ ئىككى يېقىدىكى قىرغىقىغا قاراش بۇلۇڭى ئايرىم ـ ئايرىم °27 ۋە °39 ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن بولسا، بۇ دېڭىز ئارىلىنىڭ كەڭلىكىنى ھېسابلاڭ.

5. بىر ئايروپىلان A جايدىن 700km نېرىدىكى B جايغا قاراپ ئۇچتى. ئۇچقۇچى مەلۇم رايوندىكى قارا يامغۇر-لۇق بۇلۇت قاتلىمىدىن چەتنەپ ئۆتۈش ئۈچۈن، ئايروپورتتىن كۆتۈرۈلۈپلا ئەسلىدىكى ئۇچۇش يۆنىلىشى بىلەن °21 لۇق بۇلۇڭ ھاسىل قىلىدىغان يۆنىلىشتە ئۇچۇپ، يېرىم يولغا كەلگەندە يەنە ئەسلىدىكى ئۇچۇش يۆنىلىشى بىلەن °35 لۇق بۇلۇڭ ھاسىل قىلىدىغان يۆنىلىشتە ئاخىرقى نۇقتى-غىچە ئۇچقان بولسا، ئايروپىلاننىڭ ئۇچۇش مۇساپىسى ئەسلىدىكى 700km دىن قانچىلىك ئېشىپ كەتكەن؟



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

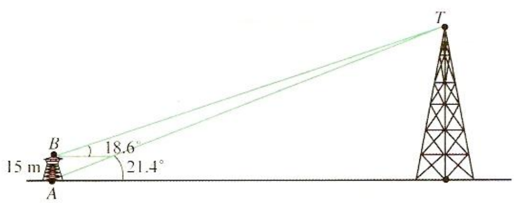


(6 ـ مىسال ئۈچۈن)

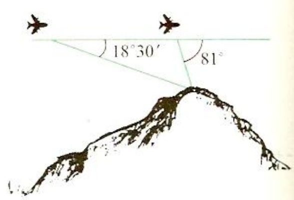
6. رەسىمدىكىدەك، A، B ئىككى جاينىڭ ئارىلىقى 2558m كېلى-دۇ، A، B ئىككى جايدىن چىققان ئىككى دەستە كۆزىتىش چىرىغى نۇرى ئۈستى تەرەپتىكى بىر ئايروپىلانغا چۈشكەن بولسا، ئايروپىلان بىلەن ئىككى كۆزىتىش چىرىغىنىڭ ئارىلىقى قانچىلىك؟ ئايروپىلاننىڭ ئېگىزلىكى قانچىلىك؟

7. ئايروپىلاننىڭ ئۇچۇش يولى بىلەن تاغ چوققىسى ئوخشاش بىر ۋېرتىكال تەكشىلىكتە بولۇپ، ئايروپىلاننىڭ دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكى 20250m، تېزلىكى 1000km/h ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئۇچقۇچى ئاۋۋال تاغ چوققىسىغا قاراش بۇلۇڭى ′30°18 ئىكەنلىكىنى، 150s ئۆتكەندىن كېيىن يەنە تاغ چوققىسىغا قاراش بۇلۇڭى °81 ئىكەنلىكىنى بايقىغان بولسا، تاغ چوققىسىنىڭ دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكىنى تېپىڭ (1m غىچە ئېنىقلىقتا).

8. بىر مۇنارنىڭ ئېگىزلىكىنى ئۆلچەشتە، A، B ئىككى نۇقتىدا ئۆلچەش ئېلىپ بارغاندىكى سانلىق مەلۇماتلار



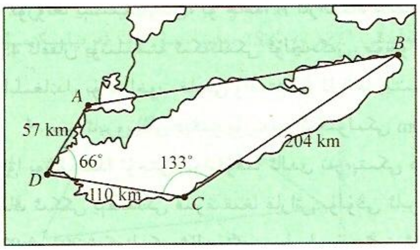
(8 ـ مىسال ئۈچۈن)



(7 ـ مىسال ئۈچۈن)

CHAPTER

رەسىمدە كۆرسىتىلدى، مۇنارنىڭ ئېگىزلىكىنى تېپىڭ.



(9 ـ مىسال ئۈچۈن)

9. بىر ئايروپىلان 326km/h تېزلىك بىلەن شىمال-دىن شەرققە 75° ئاغقان يۆنىلىشتە A شەھەردىن B شە-ھەرگە قاراپ ئۇچتى، 18min تىن كېيىن، ھاۋا رايى سە-ۋەبىدىن ئايروپىلان باشقا بىر C شەھەرگە قاراپ ئۇچۇش يۆنىلىشىنى ئۆزگەرتكەن بولسا... بۇيرۇقنى تاپشۇرۇۋالغان بولسا، بۇيرۇقنى تاپشۇرۇۋالغان چاغدا ئايروپىلان قايسى يۆنىلىشنى بويلاپ ئۇچۇشى كې-رەك؟ بۇ چاغدا ئايروپىلان بىلەن C شەھەرنىڭ ئارىلىقى قانچىلىك؟

10. ماس قەدەملىك ئالاقىلىشىش سۈنئىي ھەمراھى ئېكۋاتورنىڭ 35800km يۇقىرىسىدىكى ئوربىتىنى بويلاپ ھەر 24 سائەتتە يەر شارىنى بىر قېتىم ئايلىنىدۇ، شۇڭا ئۇنىڭ ئورنى ئېكۋاتوردىكى مەلۇم بىر نۇقتىنىڭ يۇقى-رىسىدىكى بوشلۇقتا مۇقىملاشتۇرۇلغان. ئەگەر بۇ نۇقتا بېيجىڭ بىلەن ئوخشاش بىر مېرىدىئان سىزىقى ئۈس-تىدە بولۇپ، بېيجىڭنىڭ پاراللېل گرادۇسى شىمالىي پاراللېل 39°54′ بولسا، بېيجىڭدا تۇرۇپ بۇ نۇقتىنى كۆزەتكەندىكى قاراش بۇلۇڭىنى تېپىڭ (يەر شارىنىڭ رادىئۇسىنى 6400km دەپ ئېلىڭ).

11. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزى S نى تېپىڭ (0.01cm^2 غىچە ئېنىق-لىقتا):

(1) $a = 28\text{cm}$، $c = 33\text{cm}$، $B = 45°\text{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن؛

(2) $A = 32.8°$، $C = 66.5°$، $a = 36\text{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن؛

(3) $a = 54\text{cm}$، $b = 61\text{cm}$، $c = 71\text{cm}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

12. رادىئۇسى R بولغان چەمبەرگە ئىچىتىن تېگىشكەن مۇنتىزىم n تەرەپلىكنىڭ يۈزىنى تېپىڭ.

13. $\triangle ABC$ نىڭ ئۈچ تەرىپى ئايرىم ـ ئايرىم a، b، c بولۇپ، BC، CA، AB تەرەپلەردىكى مېدىئانا ئايرىم ـ ئايرىم m_a، m_b، m_c بولسا، تۆۋەندىكىلەرنى كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},\qquad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},\qquad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

14. $\triangle ABC$ دا، $c(a\cos B - b\cos A) = a^2 - b^2$ نى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈز فورمۇلىسىنى ئىسپاتلاڭ:

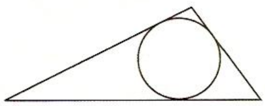
$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}.$$

2. ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپى a، b، c ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندى-كىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزى $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ؛

(2) ئۈچبۇلۇڭغا ئىچتىن ئۇرۇنغان چەمبەرنىڭ رادىئۇسى r بولسا، ئۇ ھالدا

$$r=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$



(2)2) مىسال ئۈچۈن)

(3) AB، CA، BC تەرەپلەردىكى ئېگىزلىك ئايرىم ـ ئايرىم h_c، h_b، h_a بولسا، ئۇ ھالدا

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

خېرون ۋە چىن جيۇشاۋ

قەدىمكى گرېتسىيە ماتېماتىكىسى تەرەققىي قىلىپ ئالېكساندىرىيە دەۋرىگە كەلگەندە، ماتېماتىكىنىڭ قوللىنىلىشى زور تەرەققىياتقا ئېرىشتى، ئۇنىڭ گەۋدىلىك نۇقتىسى ئۈچبۇلۇڭ تېخنىكىسىنىڭ تەرەققىياتىدىن ئىبارەت. ئەينى چاغدا كىشىلەر ئاسمان جىسىملىرىنىڭ ھەرىكەت لىنىيىسى ۋە ئورنىدىن ئالدىن مەلۇمات بېرىش ئارقىلىق ۋاقىت مەلۇم قىلىش، كالېندار ھېسابلاش، دېڭىز قاتنىشى مەسىلىلىرىنى ھېسابلاش ۋە جۇغراپىيىنى تەتقىق قىلىش قاتارلىقلارغا ئاسانلىق تۇغدۇرۇش ئۈچۈن، مىقدارلاشقان ئاسترونومىيە ئىلمىنى تۇرغۇزماقچى بولغان، بۇنىڭ نەتىجىسىدە ئۈچبۇلۇڭ تېخنىكىسى مەيدانغا كەلگەن.

ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش مەسىلىلىرى ئىچىدىكى بىر قىيىن مەسىلە قانداق قىلىپ ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپى a، b، c غا ئاساسەن ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزىنى بىۋاسىتە تېپىشتىن ئىبارەت. ئېيتىشلارغا قارىغاندا بۇ مەسىلىنى قەدىمكى گرېتسىيىلىك ماتېماتىك ئارخىمېد ئەڭ بۇرۇن ھەل قىلىپ، تۆۋەندىكى فورمۇلىنى كەلتۈرۈپ چىقارغانىكەن:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ P=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

لېكىن، ھازىر كىشىلەر كۆپ ھاللاردا بۇ فورمۇلىنى قەدىمكى گرېتسىيىلىك ماتېماتىك خېرون (Heron) نىڭ نامى بىلەن خېرون فورمۇلىسى دەپ ئاتىشىدۇ، چۈنكى بۇ فورمۇلا ئەڭ بۇرۇن خېروننىڭ «يەر ئۆلچەش تېخنىكىسى» دېگەن ئەسىرىدە خاتىرىلەنگەن ھەمدە ئۇنىڭ «ئۆلچەش ئەسۋابى» ۋە «ئۆلچەش تېخنىكىسى» دېگەن ئەسەرلىرىدە بۇ فورمۇلىنىڭ ئىسپاتىمۇ بېرىلگەن. ئۇنىڭ ئۈستىگە، خېرون فورمۇلىسىنىڭ يەنە شەكلى چىرايلىق، ئەستە ساقلاش ئاسان بولۇشتەك ئالاھىدىلىكلىرىمۇ بار.

خېرون قەدىمكى گرېتسىيىلىك ماتېماتىك ھەم مۇنەۋۋەر كارتوگرافىيە (ئۆلچەش - سىزىش) ئىنژېنېرى بولۇپ، ئۇنىڭ ياشىغان دەۋرى تەخمىنەن 1 - ئەسىرگە توغرا كېلىدۇ. ئۇنىڭ ۋەكىل خاراكتېرلىك ئەسىرى «ئۆلچەش تېخنىكىسى» بولۇپ، ئۇنىڭدا تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنىڭ يۈزى، ستېرېئو شەكىللەرنىڭ ھەجمى ھەمدە شەكىللەرنى تاناسىپلىق بۆلەكلەرگە بۆلۈش قاتارلىقلار مۇھاكىمە قىلىنغان. «ئۆلچەش ئەسۋابى» ئۇنىڭ يەنە بىر ۋەكىل خاراكتېرلىك ئەسىرى بولۇپ، ئۇنىڭدا بايان قىلىنغان بىر خىل ئەسۋابنىڭ ئىقتىدارى ھازىرقى تېئودولىتنىڭكىگە ئوخشايدۇ. بۇ كىتابتا تونىلنى قانداق قېزىش، تاغنىڭ ئىككى يېقىدىن باشلاپ، يۆنىلىشنى توغرا تېپىپ، تونىلنى توغرا، دەل تۇتاشتۇرۇش؛ ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئېگىزلىك پەرقىنى ئېنىقلاش؛ كۆرگىلى بولىدىغان، ئەمما يەتكىلى بولمايدىغان ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى ئۆلچەش؛ يەنە ئېگىزلىك ۋە ئارىلىقنى ئۆلچەشكە دائىر ھەر خىل مەسىلىلەر مۇھاكىمە قىلىنغان. ئېلىمىزنىڭ جەنۇبىي سۇڭ سۇلالىسى دەۋرىدىكى ئاتاقلىق ماتېماتىكا ئالىمى چىن جيۇشاۋ (تەخمىنەن 1202 — 1261) مۇ ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپىگە ئاساسەن يۈزىنى تېپىشنىڭ خېرون فورمۇلىسى بىلەن تەڭ كۈچلۈك بولغان فورمۇلىسىنى بايقىغان، ئۇ بۇ ئۇسۇلنى «ئۈچ تەرەپكە ئاساسەن يۈزىنى تېپىش» دەپ ئاتىغان. ئۇنىڭ «توققۇز بابلىق ماتېماتىكا كىتابى» دېگەن ئەسىرىنىڭ 5 - جىلدى «ئېتىز ھېسابلاش» تا مۇنداق بىر مەسىلە بار: «ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك بىر پارچە ئېتىز بار بولۇپ، ئۇنىڭ كىچىك تەرىپى 13 چاقىرىم، ئوت-

1 ـ باب

تۆرا تەرىپى 14 چاقىرىم، چوڭ تەرىپى 15 چاقىرىم، بىر چاقىرىم ئۈچ يۈز قەدەم بولسا، بۇ ئېتىزنىڭ يۈزى قانچە؟». بۇ مەسىلە ئەمەلىيەتتە ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپىگە ئاساسەن يۈزىنى تېپىش مەسىلىسىدىن ئىبارەت. «توققۇز بابلىق ماتېماتىكا كىتابى» دىكى ھېسابلاش ئۇسۇلى مۇنداق: «كىچىك تەرەپ كۋادراتى بىلەن چوڭ تەرەپ كۋادراتىنىڭ يىغىندىسىدىن ئوتتۇرا تەرەپ كۋادراتىنى ئېلىپ ئىككىگە بۆلىمىز، ئاندىن ئۇنى ئۆزىگە كۆپەيتىمىز، ئۇنىڭدىن كېيىن، كىچىك تەرەپ كۋادراتى بىلەن چوڭ تەرەپ كۋادراتىنىڭ كۆپەيتمىسىدىن يۇقىرىقىنى ئېلىپ، ئۇنىڭ تۆتتىن بىرىنىڭ كۋادرات يىلتىزىنى چىقارساق، ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزىگە ئېرىشىمىز.»
بۇ بىر ئابزاس سۆزنى فورمۇلا قىلىپ يازساق:

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

چىن جيۇشاۋ «ئۈچ تەرەپكە ئاساسەن يۈزنى تېپىش» فورمۇلىسىنى مۇستەقىل كەلتۈرۈپ چىقاردى، ئۇنىڭ بىلەن خېرون فورمۇلىسى شەكىل جەھەتتىن ئوخشاش بولمىسىمۇ، لېكىن بۇ ئىككى فورمۇلا تامامەن تەڭ كۈچلۈك ھەم ماھىيىتىمۇ ئوخشاش. چىن جيۇشاۋنىڭ بۇ فورمۇلىسى ئېلىمىزنىڭ ئەنئەنىۋى ماتېماتىكىسىدىكى بىر بوشلۇقنى تولدۇرغان، بۇنىڭدىن ئېلىمىزنىڭ قەدىمكى زاماندا ماتېماتىكا تەرەققىي قىلىپ ناھايىتى يۇقىرى سەۋىيىگە يەتكەنلىكىنى كۆرۈۋالايمىز.

چىن جيۇشاۋ ئېلىمىزنىڭ قەدىمكى زاماندىكى ۋەكىل خاراكتېرلىك مەشھۇر ماتېماتىكا ئالىملىرىنىڭ بىرى بولۇپ، ئۇنىڭ «توققۇز بابلىق ماتېماتىكا كىتابى» دېگەن ئەسىرىدە سۇڭ، يۈەن سۇلالىلىرى دەۋرىدىكى جۇڭگو ئەنئەنىۋى ماتېماتىكىسىدا ۋۇجۇدقا كەلگەن ئاساسلىق مۇۋەپپەقىيەتلەر مۇجەسسەملەنگەن، بۇ ئەسەردە يۇقىرى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرگە دائىر سانلىق يېشىش ئۇسۇلى ۋە بىرىنچى دەرىجىلىك قالدۇقداشلىق مەسىلىلەرنى يېشىش ئۇسۇلىمۇ سىستېمىلىق خۇلاسىلىنىپ ۋە راۋاجلاندۇرۇلۇپ، خېلى مۇكەممەل بولغان «مۇسبەت، مەنپىي سانلارنىڭ يىلتىزىنى تېپىش ئۇسۇلى» ۋە «قالدۇقداش تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ يېشىمىنى تېپىش ئۇسۇلى» ئوتتۇرىغا قويۇلغان، بۇلار ماتېماتىكىنىڭ تەرەققىياتىغا كەڭ دائىرىدە تەسىر كۆرسەتكەن. چىن جيۇشاۋ ھەم نەزەرىيىگە، ھەم ئەمەلىيەتكە ئەھمىيەت بېرىدىغان، ھەم ئالدىنقىلارغا ۋارىسلىق قىلىشقا ماھىر، ھەم دادىللىق بىلەن يېڭىلىق يارىتىدىغان ماتېماتىكا ئالىمى بولۇپ، چەت ئەل ئىلىم ـ پەن تارىخچىلىرى تەرىپىدىن «ئۆز مىللىتى ئىچىدىكى، ئۆزى ياشىغان دەۋردىكى ھەمدە ھەقىقەتەنمۇ بارلىق دەۋرلەردىكى ئەڭ ئۇلۇغ ماتېماتىكلارنىڭ بىرى» دەپ تەرىپلەنگەن.

3-1 پراكتىكا تاپشۇرۇقى

ئەمەلىي ئېھتىياجغا ئاساسەن، بۇ باپتا ئۆگەنگەن بىلىملەردىن پايدىلىنىپ ئۆلچەشكە دائىر بىر پراكتىكا تاپشۇرۇقى ئىشلەڭ ھەمدە پراكتىكا دوكلاتى يېزىڭ.

پراكتىكا دوكلاتى

ئۆلچەش مەسىلىسى	
قوشۇمچە رەسىم	
ئۆلچەش قوراللىرى	
ئۆلچەنگەن سانلىق مەلۇماتلار	
ھېسابلاش	
مەسئۇل كىشى ۋە قاتناشقۇچىلار	
ھېسابلىغۇچى ۋە تەكشۈرگۈچى	
يېتەكچى ئوقۇتقۇچىنىڭ تەكشۈرۈش پىكرى	

1 ـ باب

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى

II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. بۇ بابتا ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشتە مۇھىم رول ئوينايدىغان ئىككى تېئورېمنى ئۆگەندۇق:

(1) سىنۇس تېئورېمىسى بىر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ھەرقايسى تەرەپلىرى بىلەن ئۇلارنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭ سىنۇسىنىڭ نىسبەتلىرى ئۆزئارا تەڭ، يەنى

$$\frac{a}{\sin\ A}=\frac{b}{\sin\ B}=\frac{c}{\sin\ C}.$$

(2) كوسىنۇس تېئورېمىسى ئۈچبۇلۇڭنىڭ ھەرقانداق بىر تەرىپىنىڭ كۋادراتى قالغان ئىككى تەرەپ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسىدىن مۇشۇ ئىككى تەرەپ بىلەن ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى كوسىنۇسىنىڭ كۆپەيتمىسىنىڭ ئىككى ھەسسىسىنى ئېلىۋەتكەنگە تەڭ، يەنى

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتە ئۆگەنگەن ئۈچبۇلۇڭغا دائىر بىلىملەرگە باغلىساق، سىنۇس تېئورېمىسى بىلەن كوسىنۇس تېئورېمىسى ئايرىم ـ ئايرىم قايسى بىلىملەرنىڭ يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ چوڭقۇرلاشتۇرۇلۇشى ھېسابلىنىدۇ؟

2. ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش دېگەنلىك ئۈچبۇلۇڭنىڭ بېرىلگەن ئېلېمېنتلىرىغا ئاساسەن ئۇنىڭ نامەلۇم ئېلېمېنتلىرىنى تېپىش جەريانىنى كۆرسىتىدۇ. ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشتە كۆپ ھاللاردا سىنۇس تېئورېمىسى ۋە كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىشقا توغرا كېلىدۇ.

ئۈچبۇلۇڭنى بۇ ئىككى تېئورېمىدىن پايدىلىنىپ يەشكەندە قايسى مەسىلىلەرگە دىققەت قىلىش كېرەك؟

3. ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشكە دائىر بىلىملەرنىڭ پەيدا بولۇشىدا ئاساسلىقى ئاسترونومىيىلىك ئۆلچەش، دېڭىز قاتنىشىدىكى ئۆلچەش، جۇغراپىيىلىك ئۆلچەش قاتارلىق ئەمەلىي پائالىيەتلەر تۈرتكىلىك رول ئوينىغان.

بۇ بابتىكى ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشكە دائىر بىلىملەر ئاساسلىقى قانداق مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا قوللىنىلىدۇ؟

4. تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتىن تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپكىچە، بىز دەريانىڭ كەڭلىكى ۋە جىسىملارنىڭ ئېگىزلىكىنى ئۆلچەشنىڭ قانداق ئۇسۇللىرىنى تەتقىق قىلدۇق؟ ئۇلاردا مۇۋاپىق كېلىش دائىرىسى جەھەتتە قانداق ئوخشىماسلىقلار بار؟

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. $\triangle ABC$ دا، تۆۋەندىكى شەرتلەر بېرىلگەن، ئۇچبۇلۇڭنى يېشىڭ (بۇلۇڭ گرادۇسى $1'$ قىچە، تەرەپ ئۇزۇنلۇ-قى 0.01cm غىچە ئېنىقلىقتا):

(1) $a=12\text{cm},\ b=5\text{cm},\ A=120^\circ$;　　(2) $a=6\text{cm},\ b=8\text{cm},\ A=30^\circ$;

(3) $a=7\text{cm},\ b=23\text{cm},\ C=130^\circ$;　　(4) $b=14\text{cm},\ c=10\text{cm},\ A=145^\circ$;

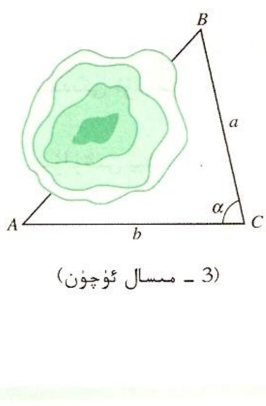
(5) $a=32\text{cm},\ c=23\text{cm},\ B=152^\circ$;　　(6) $a=2\text{cm},\ b=3\text{cm},\ c=4\text{cm}$.

2. بىر كىچىك ئارالنىڭ ئەتراپىدىكى $3.8\,\text{n mile}$ كېلىدىغان دائىرىدە يوشۇرۇن خادا تاش بار. غەربتىن شەرققە قاراپ كېتىۋاتقان بىر پاراخوتتىكىلەر بۇ ئارالنىڭ شىمالدىن شەرققە 75° ئاغقان يۆنىلىشتە ئىكەنلىكىنى، $8\,\text{n mile}$ ماڭغاندىن كېيىن، بۇ ئارالنىڭ شىمالدىن شەرققە 60° ئاغقان يۆنىلىشتە ئىكەنلىكىنى كۆرگەن. ئەگەر بۇ پاراخوت يۆنىلىشىنى ئۆزگەرتمەي داۋاملىق ئالغا قاراپ ماڭسا، يوشۇرۇن خادا تاشقا سوقۇلۇش خەۋپى بارمۇ؟

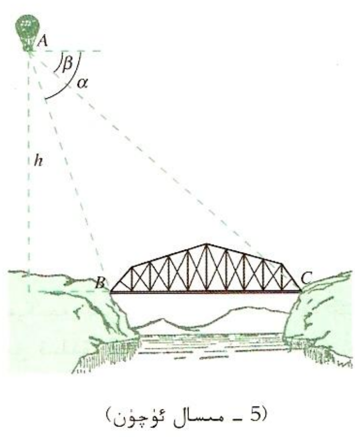
3. رەسىمدىكىدەك، تۆمۈريول قۇرۇلۇشىدا تونېلنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە تونېلنىڭ ئىككى بېشىدىكى قۇرۇلۇش (قېـزىش) يۆنىلىشىنى ئېنىقلاشقا توغرا كېلىدۇ. تونېلنىڭ ئىككى بېشىدىكى A، B ئىككى نۇقتىدىن مەلۇم بىر C نۇقـتىغىچە بولغان ئارىلىق a، b ۋە $\angle ACB=\alpha$ ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن بولسا، A، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى ۋە $\angle ABC$، $\angle BAC$ نى تېپىڭ.

4. A پاراخوتنىڭ يۆنىلىشى ۋە تېزلىكىنى ئىككى كۆزىتىش نۇقتىسى C، D (ئىككى كۆزىتىش نۇقتىسىنىڭ ئارىلىقى d ئىكەنلىكى بېرىلگەن) دىن پايدىلىنىپ ئۆلچەش ئۇسۇلىنى لايىھىلەپ چىقىڭ.

5. رەسىمدىكىدەك، ھاۋا شارى A دا تۇرۇپ دەل ئالدى تەرەپتىكى دەريانىڭ ئىككى قىرغىقىدىكى B، C غا قاراش بۇلۇڭى ئايرىم ـ ئايرىم α، β ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن. ئەگەر بۇ ۋاقىتتا ھاۋا شارىنىڭ ئېگىزلىكى h بولسا، دەريا-نىڭ كەڭلىكى BC نى تېپىڭ.

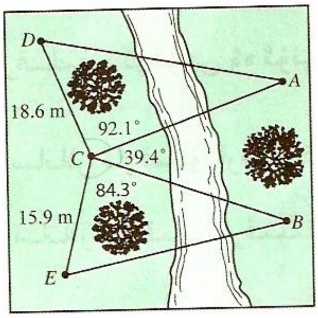


(3 ـ مىسال ئۈچۈن)



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

6. رەسىمدىكىدەك، دەريانىڭ قارشى قىرغىقىدىكى A ، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى ئۆلچەش ئۈچۈن، كۆزەتكۈچى A ، B ئىككى نۇقتىنى كۆزەتكىلى بولىدىغان بىر C نۇقتىنى، A ، C ئىككى نۇقتىنى كۆزەتكىلى بولىدىغان بىر D نۇقتىنى، B ، C ئىككى نۇقتىنى كۆزەتكىلى بولىدىغان بىر E نۇقتىنى تاپقان ھەمدە ئۆلچەش ئارقىلىق رەسىمدىكى بىر قىسىم سانلىق مەلۇماتلارغا ئېرىشكەن. ئۇنىڭدىن باشقا، $\angle CDA = 72.3°$ ، $\angle CEB = 64.7°$ بولسا، A ، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى تېپىڭ.



(6 ـ مىسال ئۈچۈن)

7. ئەگەر سىز دېڭىزدا يۈرۈۋاتقان بولسىڭىز، دېڭىزدىكى ئىككى كىچىك ئارال ئارىسىدىكى ئارىلىقنى ئۆلچەشنىڭ بىر خىل ئۇسۇلىنى لايىھىلەڭ.

B گۇرۇپپا

1. A ، B نى تۇتۇشقا بارغىلى بولمايدىغان ئىككى بىنانىڭ چوققىسى دەپ پەرەز قىلىپ، ئۇلارنىڭ ئارىلىقىنى ئۆلچەش ئۇسۇلىنى لايىھىلەڭ.

2. ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزىنى ھېسابلاش مەسىلىسى ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرۈڭ، سىز ھازىرغىچە قايسى ھېسابلاش فورمۇلىلىرىنى ئۆگەندىڭىز؟ يەنە يېڭى ھېسابلاش فورمۇلىلىرىنى بايقاشقا ۋە ئىسپاتلاشقا بولامدۇ؟

3. تەتقىق قىلىپ بېقىڭ، تۆۋەندىكى ئىككى خۇسۇسىيەتكە ئىگە بولغان بىر ئۈچبۇلۇڭ مەۋجۇتمۇ؟

(1) ئۈچ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئارقىمۇئارقا كەلگەن ئۈچ تەبىئىي سان؛

(2) ئەڭ چوڭ بۇلۇڭى ئەڭ كىچىك بۇلۇڭىنىڭ 2 ھەسسىسىگە تەڭ.

2 - باب. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى تەتقىق قىلىش رېئال ئىشلەپچىقىرىش ۋە تۇرمۇشنىڭ ئېھتىياجىدىن بارلىققا كەلگەن.

بىر تۈپ دەرەخنىڭ مەلۇم بىر پەيتتىكى ئېگىزلىكى 2m. ئەگەر ھەر يىلدىكى ئوخشاش بىر پەيتتە بۇ دەرەخنىڭ ئېگىزلىكىنى خاتىرىلەپ تۇرساق ھەمدە ئۇلارنى ئىلگىرى - كېيىنلىك تەرتىپى بويىچە تىزساق، بىر قاتار سانغا ئىگە بولىمىز. بەلگىلىك تەرتىپ بويىچە تىزىلغان بىر قاتار سان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى دېيىلىدۇ. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمى ياكى ئۇنىڭ چەكلىك قىسمىي توپلىمىدا ئېنىقلانغان فۇنكسىيە دەپ قاراشقا بولىدۇ، ئۇ دىسكرت (تارقىلىش) جەريانىنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان مۇھىم ماتېماتىكىلىق مودېلدۇر.

كۈندىلىك تۇرمۇشتا، كىشىلەر دائىم پۇل ئامانەت ئۆسۈمى، ئۆي سېتىۋېلىش قەرز پۇلى دېگەندەك ئەمەلىي ھېسابلاش مەسىلىلىرىگە دۇچ كېلىدۇ، بۇلارنىڭ ھەممىسىنى سانلار ئارقىمۇئارقىلىققا دائىر بىلىملەردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشقا توغرا كېلىدۇ. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا دائىر بىلىملەر يەنە كەلگۈسىدە ئالىي ماتېماتىكا ئۆگىنىشىمىزنىڭ ئاساسى ھېسابلىنىدۇ.

بۇ بابتا، ئادەتتىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئۇقۇمى ۋە ئۇنى ئىپادىلەش ئۇسۇلىنى ئۆگىنىمىز ھەمدە ئىككى تۈرلۈك ئالاھىدە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى — تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بىلەن تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى تەتقىق قىلىپ، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولغان بەزىبىر مەسىلىلەرنى ھەل قىلىمىز، ئۇلارنىڭ ئەمەلىي تۇرمۇشتىكى قوللىنىلىشىنى چۈشىنىۋالىمىز.

بەزىلەر تەبىئەت ماتېماتىكىنى چۈشىنىدۇ دەيدۇ. دىققەت قىلىپ باقتىڭىزمۇ، دەرەخلەرنىڭ ئاچا شاخلىرى، گۈل بەرگىنىڭ سانى، ئۈسۈملۈك ئۇرۇقلىرىنىڭ تىزىلىشى، ... قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى مەلۇم خىل ماتېماتىكىلىق قانۇنىيەتكە بويسۇنغان. تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بىلەن بۇ خىل قانۇنىيەتنىڭ مۇناسىۋىتىنى بايقىيالامسىز؟

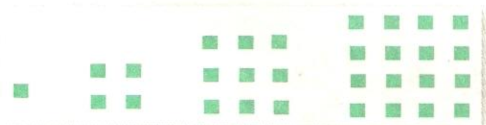
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots .$

1-2 سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئۇقۇمى ۋە ئۇنى ئاددىي ئىپادىلەش ئۇسۇلى

ئېيتىشلارغا قارىغاندا، پىتاگوراس (Pythagoras، تەخمىنەن مىلادىيىدىن ئىلگىرىكى 570 - يىل — تەخمىنەن مىلادىيىدىن ئىلگىرىكى 500 - يىل) ئېقىمىدىكى قەدىمكى گرېتسىيىلىك ماتېماتىكلار كۆپ ھاللاردا ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى دېڭىز ساھىلىدە تەتقىق قىلىپ، نۇقتىلارنى بەلگىلەش ياكى كىچىك تاشلارنى تىزىش ئارقىلىق سانلارنى ئىپادىلىگەنىكەن. مەسىلەن، ئۇلار 1، 3، 6، 10، ... نى تەتقىق قىلغان.

1.1.2 - رەسىم

بۇ سانلارنى ئۈچبۇلۇڭ شەكلىدە ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقتىن (1.1.2 - رەسىم)، ئۇلار بۇ سانلارنى ئۈچبۇلۇڭلۇق سان دەپ ئاتىغان. مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، 1، 4، 9، 16، ... لارنى كۋادرات شەكلىدە ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقتىن (2.1.2 - رەسىم)، ئۇلار بۇ سانلارنى كۋادراتلىق سان دەپ ئاتىغان.



2.1.2 - رەسىم

بەلگىلىك تەرتىپ بويىچە تىزىلغان بىر قاتار سان **سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى** (sequence of number)، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى ھەربىر سان مۇشۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ **ئەزاسى** دەپ ئاتىلىدۇ. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى ھەربىر ئەزا ئۆزىنىڭ تەرتىپ نومۇرى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولۇپ، بىرىنچى ئورۇندىكى سان بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ 1 ىنچى ئەزاسى (ئادەتتە **باش ئەزاسى** دەپمۇ ئاتىلىدۇ)، ئىككىنچى ئورۇندىكى سان بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ 2 ىنچى ئەزاسى، .....، n ىنچى ئورۇندىكى سان بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ n ىنچى ئەزاسى دەپ ئاتىلىدۇ. شۇڭا، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي كۆرۈنۈشى

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

بولۇپ، قىسقىچە $\{a_n\}$ قىلىپ يېزىلىدۇ. ئەزا سانى چەكلىك بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى **چەكلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى**، ئەزا سانى چەكسىز بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى **چەكسىز سانلار ئارقى-**

2 ـ باب

مۇئارقىلىقى دەپ ئاتىلىدۇ.

2 ـ ىنچى ئەزاسىدىن باشلاپ، ھەربىر ئەزاسى ئۆزىنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزادىن چوڭ بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئاشقۇچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، 2 ـ ىنچى ئەزاسىدىن باشلاپ، ھەربىر ئەزاسى ئۆزىنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزادىن كىچىك بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى كېمەيگۈچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، ھەرقايسى ئەزالىرى ئۆزئارا تەڭ بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۇراقلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، 2 ـ ىنچى ئەزاسىدىن باشلاپ، بەزى ئەزالىرى ئۆزىنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزادىن چوڭ، بەزى ئەزالىرى ئۆزىنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزادىن كىچىك بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەۋرەنمە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى دەپ ئاتىلىدۇ.

كۆزىتىش

تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرىنىڭ قايسىسى ئاشقۇچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، قايسىسى كېمەيگۈچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، قايسىسى تۇراقلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، قايسىسى تەۋرەنمە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدۇ؟

(1) بارلىق تەبىئىي سانلار تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

(2) 1996 ~ 2002 ـ يىللىغىچە، مەلۇم شەھەردىكى ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ئوقۇغۇچىلىرىنىڭ سانى (بىرلىكى: ئون مىڭ) تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$82,\ 93,\ 105,\ 119,\ 129,\ 130,\ 132.$$

(3) چەكسىز دانە 3 تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots.$$

(4) نۆۋەتتە بىرتۇتاش ئىشلىتىلىۋاتقان خەلق پۇلىنىڭ سوممىسى چوڭدىن كىچىككە بولغان تەرتىپ بويىچە تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ (بىرلىكى: يۈەن):

$$100,\ 50,\ 20,\ 10,\ 5,\ 2,\ 1,\ 0.5,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.02,\ 0.01.$$

(5) -1 نىڭ 1 ـ ىنچى دەرىجىسى، 2 ـ ىنچى دەرىجىسى، 3 ـ ىنچى دەرىجىسى، 4 ـ ىنچى دەرىجىسى، ... تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots.$$

(6) $\sqrt{2}$ نىڭ 1، 0.1، 0.01، 0.001، ... غىچە ئېنىقلىقتا كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممەتلىرى ۋە ئارتۇقى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممەتلىرى ئايرىم ـ ئايرىم تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots;$$

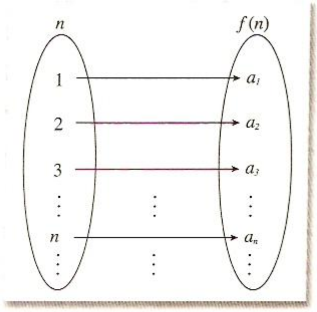
$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ \cdots.$$

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ئېنىقلىنىش ساھەسى مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمى $\mathbf{N}^*$ (ياكى ئۇنىڭ چەكلىك قىسمىي توپلىمى $\{1, 2, \dots, n\}$) بولغان فۇنكسىيە $a_n=f(n)$ نىڭ ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار كىچىكتىن چوڭغا قاراپ تەرتىپ بويىچە قىممەت ئالغاندىكى بىر قاتار ماس فۇنكسىيە قىممىتى (3.1.2 ـ رەسىم) دەپ قاراشقا بولىدۇ. ئەكسىچە، ئەگەر فۇنكسىيە $y=f(x)$ كە نىسبەتەن $f(i)$ $(i=1, 2, 3, \dots)$ مەنىگە ئىگە بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكىدەك بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا ئې ـ

CHAPTER

گە بولىمىز:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots.$$



3.1.2 – رەسىم

x تەرتىپ بويىچە 1، 2، 3، ... لارنى ئالغاندا، فۇنكسىيە $y=7x+9$ ۋە $y=3^x$ نىڭ فۇنكسىيە قىممەتلىرىدىن ھاسىل بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئايرىم – ئايرىم قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە بولىدۇ؟

ئەگەر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ n ىنچى ئەزاسى بىلەن تەرتىپ نومۇرى n ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بىر فورمۇلا ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولسا، ئۇ ھالدا بۇ فورمۇلا مۇشۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ **ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى** دەپ ئاتىلىدۇ. بىز سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىغا ئاساسەن يېزىپ چىقالايمىز.

مۇلاھىزە ؟

ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسنى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسى دەپ قاراشقا بولىدۇ. بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ، ئۇنىڭ قايسى خۇسۇسىيەتلىرىنى ئېنىقلىيالايسىز؟

1 - مىسال. تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يازايلى، ئۇنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسى ئايرىم – ئايرىم تۆۋەندىكى سانلار بولسۇن:

(1) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4}$;

(2) $2,\ 0,\ 2,\ 0$.

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى بىرقانچە ئەزاسىغا ئاساسەن يېزىپ چىقىلغان ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنىڭ شەكلى بىردىنبىر بولامدۇ؟ مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

يېشىش: (1) بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسى ئىچىدىكى ھەربىر ئەزانىڭ مۇتلەق قىممىتى تەرتىپ نومۇرىنىڭ ئەكس سانى بولۇپ، تاق سانلىق ئەزا مۇسبەت سان، جۈپ سانلىق ئەزا مەنپىي سان بولغانلىقتىن، ئۇنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(2) بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسى بىر تەۋرەنمە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنى ھاسىل قىلىدۇ، ئۇنىڭ تاق سانلىق ئەزاسى 2، جۈپ سانلىق ئەزاسى 0 بولغانلىقتىن، ئۇنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

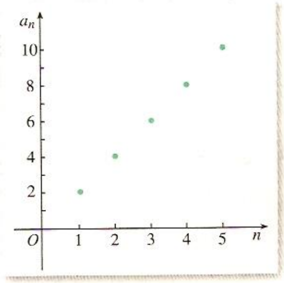
2 ـ باب

$$a_n = (-1)^{n+1} + 1.$$

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىمۇ فۇنكسىيىگە ئوخشاش گرافىك، جەدۋەل تۈزۈش قاتارلىق ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەشكە بولىدۇ. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ گرافىكى بىر قاتار تەنها (ئاجرالغان) نۇقتىلاردىن ئىبارەت. مەسىلەن، بارلىق مۇسبەت جۈپ سانلار كىچىكتىن چوڭغا بولغان تەرتىپ بويىچە تىزىلغاندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots.$$

بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى يەنە جەدۋەل ۋە گرافىكتىن پايدىلىنىپ ئايرىم ـ ئايرىم 1.2 ـ جەدۋەل ۋە 4.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ.



4.1.2 ـ رەسىم

1.2 ـ جەدۋەل

n	1	2	3	…	k	…
a_n	2	4	6	…	$2k$	…

2 ـ مىسال. 5.1.2 ـ رەسىمدىكى ئۈچبۇلۇڭلار سېرپىنىسكى (Sierpinski) ئۈچبۇلۇڭى دېيىلىدۇ. رەسىمدە بېرىلگەن 4 ئۈچبۇلۇڭدا، بويالغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ سانى تەرتىپ بويىچە بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسىنى ھاسىل قىلىدۇ، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يازايلى ھەمدە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا ئۇنىڭ گرافىكىنى سىزايلى.

(1) (2) (3) (4)

5.1.2 ـ رەسىم

يېشىش: رەسىمدىكىدەك، بۇ 4 ئۈچبۇلۇڭدا بويالغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ سانى تەرتىپ بويىچە 1، 3، 9، 27 بولغانلىقتىن، تاپماقچى بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسى ئوخشاشلا 3 نىڭ دەرىجىسى بولۇپ، كۆرسەتكۈچى تەرتىپ نومۇرىدىن 1 نى ئالغانغا تەڭ بولىدۇ. شۇڭا، بۇ سانلار ئارقىمۇ ـ ئارقىلىقىنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى مۇنداق بولىدۇ:

$$a_n = 3^{n-1}.$$

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى گرافىكى 6.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك.

ئەگەر بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ باش ئەزاسى $a_1 = 1$ بولۇپ، 2 ـنچى ئەزاسىدىن باشلاپ ھەربىر ئەزاسى ئۆزىنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ 2 ھەسسىسىگە 1 نى قوشقانغا تەڭ، يەنى

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 (n>1)$$

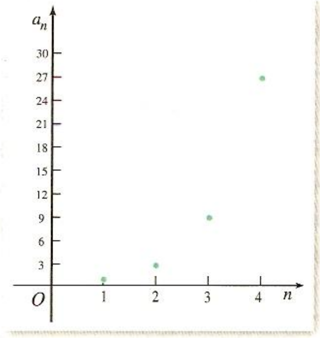
بولسا، ئۇ ھالدا:

$$a_2=2a_1+1=3,$$
$$a_3=2a_2-1=7,$$
$$\cdots$$

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى مۇشۇنداق ئوتتۇرىغا قويۇش ئۇسۇلى رېكۇررېنت (ئارقىمۇئارقا كەلتۈرۈپ چىقىرىش) ئۇسۇلى دەپ ئاتىلىدۇ، بۇنىڭدىكى

$$a_n=2a_{n-1}+1(n>1)$$

رېكۇررېنت فورمۇلىسى دېيىلىدۇ. رېكۇررېنت فورمۇلىسىمۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ئىپادىلەشنىڭ بىر خىل ئۇسۇلى ھېسابلىنىدۇ.



6.1.2 - رەسىم

3 - مىسال. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ ئىپادە

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n>1) \end{cases}$$

نى قانائەتلەندۈرىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسىنى يازايلى.

يېشىش: مىسالنىڭ مەنىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى:

$$a_1=1,$$
$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$
$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$
$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$
$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}.$$

مەشىق

1. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىغا ئاساسەن جەدۋەلنى تولدۇرۇڭ:

n	1	2	…	5	…		…	n
a_n			…		…	153	…	$3(3+4n)$

2. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ $a_1=1$، $a_n=a^2_{n-1}-1$ $(n>1)$ نى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى بېرىلگەن، ئۇنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسىنى يېزىڭ.

3. ئايرىم - ئايرىم ھالدا دەرسلىكتە كەلتۈرۈلگەن 1 - مىسالدىكى ئىككى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ باشقا بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىڭ.

4. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسى ئايرىم - ئايرىم تۆۋەندىكى سانلار بولسا، ھەربىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىڭ:

(1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$;

(2) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}, -\frac{1}{2\times5}$;

(3) $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}$.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

فىبوناچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

ئىتالىيىلىك ماتېماتىك فىبوناچى (Leonardo Fibonacci، تەخمىنەن 1170 — 1250 ـ يىللار) 1202 ـ يىلى نەشر قىلدۇرغان «چوت كىتابى (Liber Abacci)» دېگەن كىتابىدا توشقاننىڭ كۆپىيىشىگە دائىر بىر مەسىلىنى ئوتتۇرىغا قويغان.

ئەگەر بىر جۈپ توشقان ھەر ئايدا 1 جۈپ بۆجەن (بىر ئەركەك، بىر چىشى) تۇغسا ھەمدە ھەر 1 جۈپ بۆجەت تۇغۇلغاندىن كېيىنكى ئۇچىنچى ئايدا يەنە 1 جۈپ بۆجەن تۇغسا، ئۆلۈش ئەھۋالى كۆرۈلمىگەن ئەھۋال ئاستىدا، دەسلەپ تۇغۇلغان 1 جۈپ بۆجەندىن باشلاپ، 50 ئايدىن كېيىن توشقان سانى قانچە جۈپكە يېتىدۇ؟

بىرىنچى ئايدا، پەقەت 1 جۈپ بۆجەن بولىدۇ، 1 ئاي ئۆتكەندىن كېيىن، بۇ بىر جۈپ بۆجەن داۋاملىق ئۆسۈپ يېتىلىپ، ئۈچىنچى ئايغا بارغاندا 1 جۈپ بۆجەن تۇغىدۇ، بۇ چاغدا توشقان سانى 2 جۈپ بولىدۇ، يەنە 1 ئاي ئۆتكەندىن كېيىن، يېتىلگەن توشقان يەنە 1 جۈپ بۆجەن تۇغىدۇ، بۇ چاغدا ئالدىنقى قېتىمدا تۇغۇلغان بۆجەن داۋاملىق ئۆسۈپ يېتىلىدۇ، توشقان سانى 3 جۈپ بولىدۇ. مۇشۇ بويىچە ھېسابلىساق، تۆۋەندىكىدەك بىر جەدۋەلگە ئىگە بولىمىز:

توشقاننىڭ ئومۇمىي سانى (جۈپ)	يېتىلگەن توشقان (جۈپ)	تۇغۇلغان بۆجەن (جۈپ)	ۋاقتى (ئاي)
1	0	1	1
1	1	0	2
2	1	1	3
3	2	1	4
5	3	2	5
8	5	3	6
13	8	5	7
21	13	8	8
34	21	13	9
55	34	21	10

بۇنىڭدىن بىلىشكە بولىدۇكى، بىرىنچى ئايدىن باشلاپ، كېيىنكى ھەربىر ئايدىكى توشقاننىڭ ئومۇمىي جۈپ سانى مۇنداق بولىدۇ:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots.$$

بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ قانۇنىيىتىنى بايقىدىڭىزمۇ؟

ئەگەر n ىنچى ئايدىكى توشقاننىڭ ئومۇمىي جۈپ سانىنى F_n بىلەن ئىپادىلىسەك، تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىنى كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

بۇ، رېكۇررېنت مۇناسىۋەتنى بويىچە بېرىلگەن بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولۇپ، فىبوناچچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى دېيىلىدۇ.

فىبوناچچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھايۋانلارنىڭ كۆپىيىش مەسىلىسىدىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان، لېكىن كىشىلەر ئۇنى تەتقىق قىلىش جەريانىدا خىيالىغا كەلمىگەن نۇرغۇن نەتىجىلەرنى بايقىغان. مەسىلەن، باب بېشىدا بېرىلگەن رەسىمدىكى كۆچەتتىن بىرىنچى يىلى بىر يېڭى شاخ ئۆسىدۇ، يېڭى شاخ بىر يىل ئۆسكەندىن كېيىن كونا شاخقا ئۆزگىرىپ، كونا شاختىن ھەر يىلى بىر يېڭى شاخ ئۆسۈپ چىقىدۇ. ھەربىر شاخ مۇشۇ قانۇنىيەت بويىچە ئۆسسە، ئۇ ھالدا ھەربىر يىلدىكى شاخ سانى دەل فىبوناچچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ. ئاپتاپپەرەسنىڭ نەيچىسىمان ئۇششاق گۈللىرىمۇ ئۆزئارا كىرىشكەن ھالدا ئىككى گورۇپپىغا بۆلۈنۈپ بۇرمىسىمان تىزىلىدۇ، ئادەتتە سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ يۆنىلىشى بويىچە تىزىلغىنى 34 قۇر، سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە تىزىلغىنى 55 قۇر بولۇپ، دەل فىبوناچچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى قوشنا ئىككى ئەزاغا توغرا كېلىدۇ، بۇنداق بۇرما «فىبوناچچى بۇرمىسى» دەپ ئاتىلىدۇ. مامكاپىنىڭ ئۇرۇقلىرى ۋە قارىغاي مەدىكىنىڭ ياپراقچىلىرىمۇ «فىبوناچچى بۇرمىسى» شەكلىدە تىزىلىدۇ. يەنە ئالايلۇق، نۇرغۇن گۈللەرنىڭ بەرگ سانىمۇ فىبوناچچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى سانلارغا توغرا كېلىدۇ، مەسىلە، مېيخۇا گۈلىنىڭ بەرگ سانى 5، يارگۈلىنىڭ 8، مىرزىگۈلىنىڭ 13، يۇلتۇزگۈلىنىڭ 21 بولۇپ، كۆپ ساندىكى بەلىز گۈللەرنىڭ بەرگ سانى 34، 55 ياكى 89 بولىدۇ.

فىبوناچچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ يەنە نۇرغۇن خۇسۇسىيەتلىرى بار، ئۇلار ئەمەلىي تۇرمۇشتىمۇ كەڭ قوللىنىلىدۇ. ئامېرىكىدا 1963 - يىلىدىن باشلاپ يەنە «فىبوناچچى پەسىللىك ژۇرنىلى» ناملىق بىر ماتېماتىكا ژۇرنىلى نەشر قىلىنىپ، ژۇرنالدا مەخسۇس سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا دائىر تەتقىقات ماقالىلىرى ئېلان قىلىنغان.

قىزىقىدىغان ساۋاقداشلار ئىنتېرنېت تورىدىن ياكى ئالاقىدار كىتابلاردىن ماتېرىيال تويلاپ، فىبوناچچى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئىگىلىسە ۋە تەتقىق قىلىپ كۆرسە بولىدۇ.

2 ـ باب

1.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ئايرىم ـ ئايرىم تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى يېزىڭ:

(1) 0 ~ 20 ئىچىدىكى تۈپ سانلارنىڭ كىچىكتىن چوڭغا بولغان تەرتىپ بويىچە تىزىلىشىدىن ھاسىل بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى؛

(2) 0 ~ 20 ئىچىدىكى مۇرەككەپ سانلارنىڭ مۇسبەت كۋادرات يىلتىزىنىڭ كىچىكتىن چوڭغا بولغان تەرتىپ بويىچە تىزىلىشىدىن ھاسىل بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى؛

(3) ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $\sqrt{3}$ نىڭ 1، 10^{-1}، 10^{-2}، 10^{-3}، ...، 10^{-6} گىچە ئېنىقلىقتا كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممەتلىرىدىن ۋە ئارتۇقى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممەتلىرىدىن ھاسىل بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى.

2. تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىغا ئاساسەن، ئۇنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسىنى يېزىڭ:

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$;　　　(2) $a_n=(-1)^{n+1}(n^2+1)$.

3. تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى كۆزىتىپ، بوش ئورۇنغا مۇۋاپىق سان تولدۇرۇڭ ھەمدە ھەربىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىڭ:

(1) (　), −4, 9, (　), 25, (　), 49;

(2) 1, $\sqrt{2}$, (　), 2, $\sqrt{5}$, (　), $\sqrt{7}$.

4. تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسىنى يېزىڭ:

(1) $a_1=\frac{1}{2},\ a_n=4a_{n-1}+1\ (n>1)$;

(2) $a_1=-\frac{1}{4},\ a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}\ (n>1)$.

5. تۆۋەندىكى شەكىل ۋە ماس نۇقتا سانىغا ئاساسەن، بوش ئورۇن ۋە تىرناق ئىچىگە ئايرىم ـ ئايرىم ماس شەكىل ۋە نۇقتا سانىنى تولدۇرۇڭ ھەمدە نۇقتا سانىدىن ھاسىل بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىڭ.

______　______;

1　　6　　11　　(　)　　(　)

____________ ____________ ;

1 4 7 ( ) ( )

____________ ____________ .

3 8 15 ( ) ( )

6. ئۇچبۇلۇڭلۇق سانلاردىن ھاسىل بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ 5 ـنچى، 6 ـنچى ۋە 7 ـنچى ئەزاسىنى ھەمدە ئۇنىڭ بىر رېكۇررېنت فورمۇلىسىنى يېزىڭ.

B گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى رەسىمدە بېرىلگەن ئۈچ شەكىل ئىچىدە، بويالغان كۋادراتلارنىڭ سانى تەرتىپ بويىچە بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئالدىنقى 3 ئەزاسىنى ھاسىل قىلىدۇ، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسى بىلەن بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىڭ.

2. جۇڭگو بانكىسىنىڭ قەرەلسىز خەلق پۇلى ئامانىتىنىڭ يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى 0.72%. بىر ئادەم 100 مىڭ يۈەن خەلق پۇلىنى ئامانەت قويغاندىن كېيىن، پۇل قوشماي ھەم پۇل ئالماي، ھەر يىلى قەرەلى توشقاندا ئۆسۈمى بىلەن دەسمايىسىنى قوشۇپ ئاپتوماتىك ھالدا داۋاملىق ئامانەت قويغان. ئەگەر ئۆسۈم بېجى ھېسابقا ئېلىنمىسا، n ـنچى يىلى قەرەلى توشقاندىكى ئامانەت پۇل سوممىسىنى a_n بىلەن ئىپادىلەڭ ھەمدە a_1، a_2، a_3 ۋە a_n نى تېپىڭ.

3. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ 1 ـنچى ئەزاسى 1، 2 ـنچى ئەزاسى 2 بولۇپ، كېيىنكى ھەربىر ئەزاسى $(n>2)$ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ئارقىلىق بېرىلگەن.

(1) بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسىنى يېزىڭ؛

(2) يۇقىرىدىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دىن پايدىلىنىپ، فورمۇلا $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ئارقىلىق بىر يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{b_n\}$ نى ھاسىل قىلىڭ ھەمدە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{b_n\}$ نىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسىنى يېزىڭ.

2 ـ باب

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

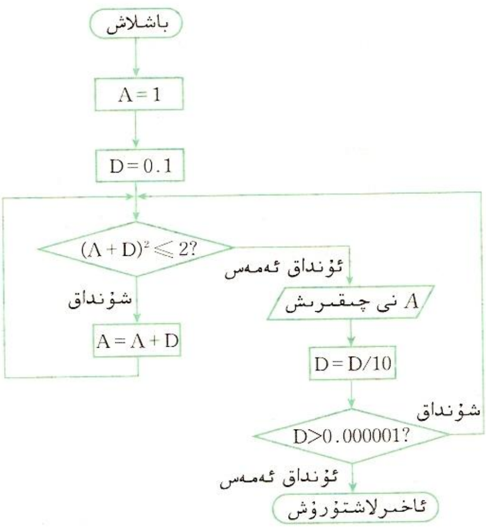
$\sqrt{2}$ نىڭ قىممىتىنى مۆلچەرلەش

تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1 بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا بولغان كۋادراتنىڭ دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $\sqrt{2}$ بولىدىغانلىقى بىزگە مەلۇم. ئېيتىشلارغا قارىغاندا، $\sqrt{2}$ نىڭ ئىرراتسىئونال سان ئىكەنلىكىنى ئەڭ بۇرۇن بايقىغان ئادەم مۇشۇ پاراگرافنىڭ بېشىدا دېيىلگەن پىتاگوراس ئېقىمىدىكى ماتېماتىك ئىكەن. لېكىن، ئىرراتسىئونال ساننىڭ بايقىلىشى پىتاگوراس ئېقىمىدىكىلەرنىڭ «بارلىق شەيئىلەرنى (پۈتۈن) سان بىلەن (پۈتۈن) ساننىڭ نىسبىتى ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ» دېگەن تۈپ ئەقىدىسىگە زىت بولغانلىقتىن، بىرىنچى قېتىملىق ماتېماتىكا كرىزىسى يۈز بەرگەن.

$\sqrt{2}$ نىڭ تېخىمۇ ئېنىق بولغان تەقرىبىي قىممىتىگە ئېرىشىش ئۈچۈن، تارىختا نۇرغۇنلىغان $\sqrt{2}$ نى مۆلچەرلەش ئۇسۇللىرى مەيدانغا كەلگەن. مەسىلەن، $\sqrt{2}$ نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى ئۇنىڭ كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى ئارقىلىق مۆلچەرلەشكە بولىدۇ. ئېنىقلىق دەرىجىسىنى تەرتىپ بويىچە 1، 0.1، 0.01، 0.001، ... قىلىپ ئالغاندا، $\sqrt{2}$ نىڭ كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممەتلىرى چەكسىز سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \ldots \qquad ①$$

نى ھاسىل قىلىدۇ. ئاسانلا كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئەزالىرى تەرتىپ نومۇرىنىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ $\sqrt{2}$ گە تەدرىجىي يېقىنلىشىدۇ، شۇنىڭ ئۈچۈن، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىن پايدىلىنىپ $\sqrt{2}$ گە «يېقىنلىشىش» قا بولىدۇ.



سولدىكى پروگراما سخېمىسى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ① نى چىقىرىش ئۈچۈن ئىشلىتىلىدۇ، ئۇنى پروگراما جۈملىسىگە ئايلاندۇرۇڭ.

$\sqrt{2}$ نى مۆلچەرلەشكە بولىدىغان باشقا ئۇسۇللارنى ئويلاپ چىقالامسىز؟ ئالگورىزمىڭىزنى ئايرىم ـ ئايرىم پروگراما سخېمىسى ۋە پروگراما جۈملىسىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ ھەمدە ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن پىكىر ئالماشتۇرۇڭ.

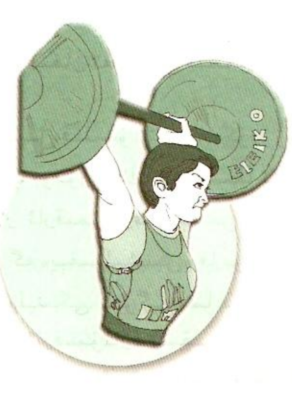
2-2 تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

ماتېماتىكىلىق ئوبيېكتنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئالاھىدە ئەھۋال-دىن باشلاپ تەتقىق قىلىپ، ئاندىن ئۇنى ئومۇمىي ئەھۋالغا تەدرىجىي كېڭەيتىش ماتېماتىكىدا كۆپ ئىشلىتىلىدىغان تەتقىق قىلىش ئۇسۇلىدۇر.

تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتە ھەقىقىي ساننى ئۆگىنىپ، ئۇنىڭغا دائىر بەزى ئەمەل ۋە خۇسۇسىيەتلەر (مەسىلەن، قوشۇش، ئېلىش، كۆپەيتىش، بۆلۈش ئەمەللىرى، 3، 5، 7 گە پۈتۈن بۆلۈنىدىغان سانلارنىڭ ئالاھىدىلىكى) نى تەتقىق قىلغانىدۇق. ئۇنداق بولسا، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى (بىر قاتار سان)نىڭ ئەزاسى بىلەن ئەزاسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ھەم سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئۈستىدىكى ئەمەل ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيىتىنىمۇ خۇددى ھەقىقىي سانلاردىكىگە ئوخشاش تەتقىق قىلغىلى بولامدۇ؟

بۇنىڭ ئۈچۈن، يۇقىرىقى مەسىلىلەرنى ئالدى بىلەن بەزىبىر ئالاھىدە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرىدىن قول سېلىپ تەتقىق قىلىپ باقايلى.

ئەمەلىي تۇرمۇشتا، بىز تۆۋەندىكى ئالاھىدە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرىنى ئۇچرىتىمىز.



بىز دائىم مۇنداق سان سانايمىز، 0 دىن باشلاپ، ھەر 5 نى تاشلاپ بىر قېتىم سانىساق، تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا ئېرىشىمىز:

0, 5, ______, ______, ______, ______, ··· . ①

2000 ـ يىلى ئاۋستىرالىيىنىڭ سىدنېي شەھىرىدە ئۆتكۈزۈلگەن ئولىمپىك تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىدە، ئاياللارنىڭ ئېغىرلىق كۆتۈرۈش مۇسابىقىسى رەسمىي مۇسابىقە تۈرى قىلىپ بېكىتىلدى. بۇ تۈردە جەمئىي 7 دەرىجە تەسىس قىلىنغان بولۇپ، ئۇنىڭ ئىچىدىكى يېنىك رەك بولغان 4 دەرىجىنىڭ بەدەن ئېغىرلىقى ئۆلچىمى تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ (بىرلىكى: kg):

48, 53, 58, 63 . ②

سۇ ئامبىرىنىڭ باشقۇرغۇچى خادىملىرى ئەلا سورتلۇق بېلىقلارنىڭ ياخشى ياشاش مۇھىتىغا كاپالەتلىك قىلىش ئۈچۈن، ئامبار سۈيىنى قەرەللىك قويۇپ بېرىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئامباردىكى ئارىلىشىپ قالغان بېلىقلارنى تازىلايدۇ. ئەگەر بىر سۇ ئامبىرىنىڭ سۇ ئورنى 18m ، سۇنى تەبىئىي قويۇپ بەرگەندىكى سۇ ئورنىنىڭ كۈنگە تۆۋەنلىشى 2.5m بولۇپ، سۇ ئورنى ئەڭ تۆۋەن بولغاندا 5m غىچە تۆۋەنلىيەلىسە، ئۇ ھالدا سۇ قويۇپ بەرگەندىن باشلاپ تازىلاش خىزمىتى ئېلىپ بېرىشقا بولىدىغان كۈنگە كەلگىچە، سۇ ئامبىرىنىڭ ھەر كۈندىكى سۇ ئورنى تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل

2 ـ باب

قىلىدۇ (بىرلىكى: m):

$$18,\ 15.5,\ 13,\ 10.5,\ 8,\ 5.5. \qquad ③$$

ئېلىمىزنىڭ نۆۋەتتىكى پۇل ئامانەت قويۇش تۈزۈمىدە بانكا چىقىم قىلىدىغان ئۆسۈم شەكلى يەككە ئۆسۈم شەكلى (يەنى كېيىنكى قەرەلدىكى ئۆسۈمنى ھېسابلاشتا دەسمايىگە ئالدىنقى قەرەلدىكى ئۆسۈم قوشۇلمايدۇ) دەپ بەلگىلەنگەن. يەككە ئۆسۈم شەكلى بويىچە دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسىنى ھېسابلاش فورمۇلىسى مۇنداق:

(قەرەلى × ئۆسۈم نىسبىتى + 1) × دەسمايە = دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسى.

مەسىلەن، 10000 يۈەننى قەرەلسىز ئامانەت قويغاندىكى يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى 0.72% بولسا، ئۇ ھالدا يەككە ئۆسۈم شەكلى بويىچە، 5 يىل ئىچىدىكى ھەربىر يىلنىڭ ئاخىرىدىكى دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسى ئايرىم ـ ئايرىم مۇنداق بولىدۇ:

ۋاقتى	يىل بېشىدىكى دەسمايە (يۈەن)	يىل ئاخىرىدىكى دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسى❶ (يۈەن)
1 ـ يىلى	10 000	10 072
2 ـ يىلى	10 000	10 144
3 ـ يىلى	10 000	10 216
4 ـ يىلى	10 000	10 288
5 ـ يىلى	10 000	10 360

❶ بۇ يەردە 5 يىلدا پۇل قوشۇلماي ھەم ئېلىنماي، ئۆسۈم بېجىمۇ تۆلەنمەيدۇ دەپ پەرەز قىلىندى.

ھەربىر يىلنىڭ ئاخىرىدىكى دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسى تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$10072,\ 10144,\ 10216,\ 10288,\ 10360. \qquad ④$$

كۆزىتىش

يۇقىرىدىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ①، ②، ③، ④ لەرنىڭ قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىكى بار؟

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى:

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ① دە، 2 - ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ ئايرىمىسى ئوخشاشلا ______ گە تەڭ؛

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ② دە، 2 - ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ ئايرىمىسى ئوخشاشلا ______ گە تەڭ؛

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ③ دە، 2 - ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ ئايرىمىسى ئوخشاشلا ______ گە تەڭ؛

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ④ دە، 2 - ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ ئايرىمىسى ئوخشاشلا ______ گە تەڭ.

دېمەك، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرى مۇنداق ئورتاق ئالاھىدىلىككە ئىگە: 2 - ئەزادىن باشلاپ،

CHAPTER

ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ ئايرىمىسى ئوخشاش بىر تۇراقلىق سانغا تەڭ.

ئومۇمەن، ئەگەر بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ 2 ىنچى ئەزاسىدىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ ئايرىمىسى ئوخشاش بىر تۇراقلىق سانغا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى **تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى**❷ (arithmetic sequence) دەپ ئاتىلىدۇ، بۇ تۇراقلىق سان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىلىقىنىڭ **ئومۇمىي ئايرىمىسى** (common difference) دەپ ئاتىلىپ، ئادەتتە d ھەرپى بىلەن ئىپادىلىنىدۇ.

❷ بەزى دەرسلىكلەردە تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئىنگلىزچە يېزىلىشى قىسقىچە A.P. (Arithmetic Progression) دەپ خاتىرىلەنگەن.

يۇقىرىدىكى تۆت سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولۇپ، ئۇلارنىڭ ئومۇمىي ئايرىمىسى تەرتىپ بويىچە ______، ______، ______، ______ بولىدۇ.

كىشىلەر كۈندىلىك تۇرمۇشتا دائىم دېگۈدەك تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىن پايدىلىنىدۇ. مەسىلەن، ھەر خىل مەھسۇلاتلارنىڭ ئۆلچىمىنى دەرىجىگە ئايرىشتا، ئۇنىڭدىكى ئەڭ چوڭ ئۆلچەم بىلەن ئەڭ كىچىك ئۆلچەمنىڭ پەرقى چوڭ بولمىغاندا، ئادەتتە تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بويىچە دەرىجە (مەسىلەن، كۆڭلەكنىڭ رازمېرى) گە ئايرىلىدۇ. سىز بەزىبىر مىساللارنى كەلتۈرەلەمسىز؟

a، A، b ئۈچ ساندىن تۈزۈلگەن تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ئەڭ ئاددىي تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى دەپ قاراشقا بولىدۇ. بۇ چاغدا، A سان a بىلەن b نىڭ **تەڭ ئايرىمىلىق ئوتتۇرا ئەزاسى** (arithmetic mean) دەپ ئاتىلىدۇ.

A نى a بىلەن b دىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەمسىز؟

بىز ئالدىنقى پاراگرافتا كۆرگەندەك ئوخشاش، بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى ئېنىقلاش ياكى ئېنىقلىيالماسلىق بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى تەتقىق قىلىشتا مۇھىم ئەھمىيەتكە ئىگە.

مۇلاھىزە

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ①، ②، ③، ④ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى مەۋجۇتمۇ؟ ئەگەر مەۋجۇت بولسا، ئۇلارنى ئايرىم - ئايرىم ئېيتىپ بېرىڭ.

ئومۇمەن، ئەگەر تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ باش ئەزاسى a_1، ئومۇمىي ئايرىمىسى d بولسا، تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

$$a_2-a_1=d,\ a_3-a_2=d,\ a_4-a_3=d,\cdots.$$

$$\therefore\quad a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

$$\cdots\cdots$$

بۇنىڭغا ئاساسەن، تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى بوش ئورۇننى تولدۇرۇش ئارقىلىق تاماملاڭ:

2 - باب

$$\boxed{a_n=a_1+(\quad)d.}$$

1 - مىسال. (1) تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى 8، 5، 2، ... نىڭ 20 ىنچى ئەزاسىنى تاپايلى.

(2) -401 تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى -5، -9، -13، ... نىڭ ئەزاسىمۇ؟ ئەگەر ئەزاسى بولسا، قانچىنچى ئەزاسى؟

يېشىش: (1) $a_1=8$، $d=5-8=-3$، $n=20$ گە ئاساسەن:

$$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49;$$

(2) $a_1=-5$، $d=-9-(-5)=-4$ كە ئاساسەن:

$$a_n=-5-4(n-1)=-4n-1.$$

مىسالنىڭ مەنىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، بۇ مىسالدا

$$-401=-4n-1$$

نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان مۇسبەت پۈتۈن سان n نىڭ مەۋجۇت ياكى مەۋجۇت ئەمەسلىكىنى ئېنىقلاش كېرەك. n غا دائىر بۇ تەڭلىمىنى يەشسەك، $n=100$ كېلىپ چىقىدۇ، يەنى -401 بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ 100 ىنچى ئەزاسى بولىدۇ.

2 - مىسال. مەلۇم شەھەردىكى تاكسىنىڭ باھا ھېسابلاش ئۆلچىمى 1.2/km يۈەن بولۇپ، قوزغىلىش باھاسى 10 يۈەن، يەنى دەسلەپكى 4km (4km نى ئۆز ئىچىگە ئالمايدۇ) غا 10 يۈەن ئېلىنىدۇ. ئەگەر بىر ئادەم شۇ شەھەردىكى تاكسىغا ئولتۇرۇپ 14km نېرىدىكى جايغا بارغان ھەمدە يول بويى توسۇلماي مېڭىپ، ساقلاش ۋاقتى 0 بولغان بولسا، قانچە يۈەن كىرا ھەققى تۆلىشى كېرەك؟

يېشىش: مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، بۇ شەھەردىكى تاكسىنىڭ مۇساپىسى 4km دىن چوڭ ياكى ئۇنىڭغا تەڭ بولغان چاغدا، ھەر 1km ئاشسا، يولۇچى 1.2 يۈەن قوشۇپ تۆلىشى كېرەك. شۇڭا، بىز كىرا ھەققىنى بىر تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نى تۈزۈپ ھېسابلىساق بولىدۇ.

2 - مىسالدا تاكسى ھەققىنى ھېسابلاش ئۇسۇلى ئاددىيلاشتۇرۇلغان. ئۇنىڭغا قىزىقىدىغان ساۋاقداشلار تاكسى ھەققىنى ھېسابلاشنىڭ ھەقىقىي ئەھۋالىنى تەكشۈرۈپ باقسا بولىدۇ.

4km نېرىدىكى جايغا بېرىش ئۈچۈن كېتىدىغان كىرا ھەققىنى $a_1=11.2$، ئومۇمىي ئايرىمىسىنى $d=1.2$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا تاكسى 14km نېرىدىكى جايغا بارغاندا $n=11$ بولۇپ، بۇ چاغدا تۆلەيدىغان كىرا ھەققى:

$$a_{11}=11.2+(11-1)\times1.2=23.2\ (\text{يۈەن}).$$

جاۋابى: 23.2 يۈەن كىرا ھەققى تۆلىشى كېرەك.

3 - مىسال. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=pn+q$، بۇنىڭدىكى p، q لار تۇراقلىق سان ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى چوقۇم تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟

تەھلىل: $\{a_n\}$ نىڭ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدىغان ياكى بولمايدىغانلىقىغا

بۇ سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقنىڭ باش ئەزاسى بىلەن ئومۇمىي ئايرىمىسى ئايرىم-ئايرىم قانچە؟

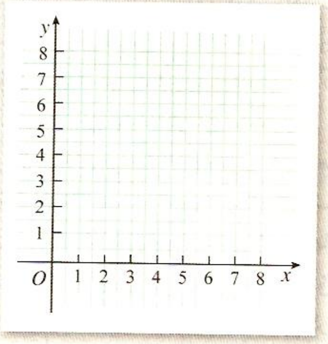
ھۆكۈم قىلىشتا، تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن پايدىلانساق، يەنى n نىڭ $(n>1)a_n - a_{n-1}$ غا مۇناسىۋەتسىز بىر تۇراقلىق سان بولىدىغان ياكى بولمايدىغانلىقىغا قارىساق بولىدۇ.

يېشىش: سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دىكى خالىغان ئىككى قوشنا ئەزا a_n بىلەن $(n>1)$ a_{n-1} نى ئېلىپ، ئۇلارنىڭ ئايرىمىسىنى تاپساق:

$$
\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= (pn+q) - [p(n-1)+q] \\
&= pn + q - (pn - p + q) \\
&= p.
\end{aligned}
$$

ئۇ n غا مۇناسىۋەتسىز بولغان بىر سان. شۇڭا، $\{a_n\}$ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدۇ.

ئىزدىنىش



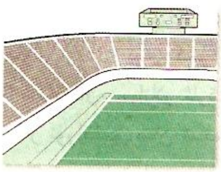
(1) تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n = 3n - 5$ بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ. بۇ گرافىكنىڭ قانداق ئالاھىدىلىكى بار؟

(2) ئوخشاش بىر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، يەنە فۇنكسىيە $y = 3x - 5$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ. نېمىنى بايقىدىڭىز؟ بۇنىڭغا ئاساسەن تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $a_n = pn+q$ نىڭ گرافىكى بىلەن بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = px+q$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بارلىقىنى ئېيتىپ بېقىڭ.

مەشىق

1. $\{a_n\}$ نىڭ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى جەدۋەلگە مۇۋاپىق سان تولدۇرۇڭ.

a_1	a_3	a_5	a_7	d
-7		8		
	2			-6.5



(2 ـ مەسىلە ئۈچۈن)

2. تەنتەربىيە مەيدانىنىڭ بىر بۇرجىكىدىكى كۆرۈش سۇپىسىنىڭ ئورۇنلىرى مۇنداق ئورۇنلاشتۇرۇلغان: بىرىنچى رەتتە 15 ئورۇن بار، ئىككىنچى رەتتىن باشلاپ، ھەربىر رەتتە ئالدىنقى بىر رەتتىكىدىن 2 ئورۇن كۆپ. n ـ رەتتىكى ئورۇن سانىنى a_n دىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەمسىز؟ 10 ـ رەتتە قانچە ئادەم ئولتۇرۇشقا بولىدۇ؟

3. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ باش ئەزاسى a، ئومۇمىي ئايرىمىسى d؛ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{b_n\}$ نىڭ باش ئەزاسى b، ئومۇمىي ئايرىمىسى e ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئەگەر $c_n=a_n+b_n$ $(n \geqslant 1)$ ھەمدە $c_1=4$، $c_2=8$ بولسا، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{c_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى تېپىڭ.

4. بىر چەكسىز تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ باش ئەزاسى a_1، ئومۇمىي ئايرىمىسى d ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى m ئەزاسىنى چىقىرىۋەتكەندىن كېيىن ھاسىل بولغان يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، ئۇنىڭ باش ئەزاسى بىلەن ئومۇمىي ئايرىمىسىنى ئايرىم ـ ئايرىم تېپىڭ؛

(2) بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى بارلىق تاق سانلىق ئەزالارنى چىقىرىۋەتكەندىن كېيىن ھاسىل بولغان يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، ئۇنىڭ باش ئەزاسى بىلەن ئومۇمىي ئايرىمىسىنى ئايرىم ـ ئايرىم تېپىڭ؛

(3) ئەگەر بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى تەرتىپ نومۇرى 7 نىڭ ھەسسىلىكى بولغان بارلىق ئەزالارنى چىقىرىۋېتىش ئارقىلىق بىر يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلىنسا، بۇ چاغدا ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟ ئېرىشكەن يەكۈنىڭىزگە ئاساسەن بىر قىياسنى ئوتتۇرىغا قويالامسىز؟

5. $\{a_n\}$ نىڭ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) $2a_5=a_3+a_7$ كۆچكە ئىگە بولامدۇ؟ $2a_5=a_1+a_9$ چۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

(2) $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$ $(n>1)$ كۆچكە ئىگە بولامدۇ؟ بۇنىڭدىن قانداق يەكۈن كەلتۈرۈپ چىقىرالايسىز؟

$2a_n=a_{n-k}+a_{n+k}$ $(n>k>0)$ كۆچكە ئىگە بولامدۇ؟ بۇنىڭدىن يەنە قانداق يەكۈن كەلتۈرۈپ چىقىرالايسىز؟

2.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا:

(1) $a_1=2$، $d=3$، $n=10$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a_n نى تېپىڭ؛

(2) $a_1=3$، $a_n=21$، $d=2$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، n نى تېپىڭ؛

(3) $a_1=12$، $a_6=27$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، d نى تېپىڭ؛

(4) $a_7=8$، $d=-\frac{1}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a_1 نى تېپىڭ.


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. ئەنگلىيىلىك ئاسترونوم هاللېي 1682 ـ يىلى بىر قۇيرۇقلۇق يۇلتۇز ـ نىڭ تەسۋىرلەپ چىققان ئەگرى سىزىقى 1531 ـ يىلى ۋە 1607 ـ يىلىدىكى قۇيرۇقلۇق يۇلتۇزنىڭكىسى بىلەن تولىمۇ ئوخشاش ئىكەنلىكىنى بايقاپ، بۇ ئوخشاش بىر ئاسمان جىسمىنىڭ ئۈچ قېتىم كۆرۈلۈشى دەپ دادىللىق بىلەن هۆكۈم چىقارغان ھەمدە ئۇنى 76 يىلدىن كېيىن يەنە قايتىپ كېلىدۇ دەپ ئالدىن ئېيتقان. مانا بۇ مەشھۇر هاللېي قۇيرۇقلۇق يۇلتۇزى بولۇپ، ئۇنىڭ قايتىپ كېلىش دەۋرى تەخمىنەن 76 يىل. ئالاقىدار ماتېرىياللاردىن پايدىلىنىپ هاللېي قۇيرۇقلۇق يۇلتۇزىنىڭ قايتىپ كېلىش ۋاقىت جەدۋىلىنى تۈزۈڭ ھەمدە ئۇنىڭ مۇشۇ ئەسىردىكى قايتىپ كېلىش ۋاقتىنى مۆلچەرلەڭ.

3. ئەگەر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ ئىچكى بۇلۇڭىنىڭ گرادۇس سانى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى هاسىل قىلسا، ئۇ هالدا ئوتتۇرىدىكى بۇلۇڭى قانچە گرادۇس بولىدۇ؟

4. ئادەتتىكى ئەھۋال ئاستىدا، يەر يۈزىدىن 10km غىچە بولغان ئارىلىقتىكى بوشلۇقتا ئېگىزلىك ھەر 1km ئاشسا، تېمپېراتۇرا مەلۇم بىر مۇقىم سانلىق قىممەت بويىچە تۆۋەنلەيدۇ. ئەگەر 1km ئېگىزلىكتىكى بوشلۇقنىڭ تېمپېراتۇرىسى 8.5℃، 5km ئېگىزلىكتىكى بوشلۇقنىڭ تېمپېراتۇرىسى 17.5℃ - بولسا، 2km، 4km، 8km ئېگىزلىكتىكى بوشلۇقنىڭ تېمپېراتۇرىسىنى تېپىڭ.

5. قوڭغۇز ھەرىكىتى ئەڭ تېز بولغان ھاشاراتلارنىڭ بىرى بولۇپ، جەدۋەلدە مەلۇم تۈردىكى قوڭغۇزنىڭ ئۆمىلەش تېزلىكى بېرىلگەن.

ۋاقىت/s	1	2	3	…	?	…	60
ئارىلىق /cm	9.8	19.6	29.4	…	49	…	?

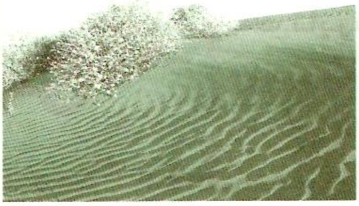
(1) قوڭغۇزنىڭ ئۆمىلەش ئارىلىقى بىلەن ۋاقتى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بىر تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇ ـ ئارقىلىقى مودېلىنى تۈزۈپ ئىپادىلىيەلەمسىز؟

(2) تۈزگەن مودېلدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاڭ، قوڭغۇز 1min تا قانچىلىك يىراقلىققا ئۆمىلىيەلەيدۇ؟ ئۇنىڭ 49cm ئۆمىلىشى ئۈچۈن قانچىلىك ۋاقىت كېتىدۇ؟

B گۇرۇپپا

1. مەلۇم رايوننىڭ 1997 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىدىكى قۇملۇق كۆلىمى 9×10^5hm^2 ئىدى. گېئولوگىيە خادىملىرى بۇ رايوننىڭ قۇملۇق كۆلىمىنىڭ ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى ئىگىلەش ئۈچۈن، 1998 ـ يىلىدىن باشلاپ ئۇدا 5 يىل كۆزىتىش ئېلىپ بارغان ھەمدە ھەر يىلىنىڭ ئاخىرىدىكى كۆزىتىش نەتىجىسىنى جەدۋەلدىكىدەك خاتىرىلەپ چىققان:

2 ـ باب



بۇ رايوننىڭ قۇملۇق كۆلىمىنىڭ ئەس- لىدىكىسىدىن ئاشقان سانى hm²	كۆزەتكەن يىللار
2000	1998
4000	1999
6001	2000
7999	2001
10001	2002

جەدۋەلدە بېرىلگەن ئۇچۇرلارغا ئاساسەن مۆلچەرلەپ بېقىڭ:

(1) ئەگەر ھېچقانداق تەدبىر قوللىنىلمىسا، 2010 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىغا كەلگەندە، بۇ رايوننىڭ قۇملۇق كۆلىمى تەخمىنەن قانچە hm^2 غا يېتىدۇ؟

(2) ئەگەر 2003 ـ يىلىنىڭ بېشىدىن باشلاپ كۆچەت تىكىپ ئورمان بىنا قىلىش تەدبىرى قوللىنىلىپ، ھەر يىلى $8000hm^2$ قۇملۇق ئۆزگەرتىلسە، ئەمما قۇملۇق كۆلىمى يەنىلا ئەسلىدىكى سۈرئەت بويىچە ئاشسا، ئۇ ھالدا قاي- سى يىلىنىڭ ئاخىرىغا كەلگەندە، بۇ رايوننىڭ قۇملۇق كۆلىمى $8\times10^5hm^2$ دىن كىچىك بولىدۇ؟

2. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئايرىمىسى d ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندى- كىنى ئىسپاتلاڭ:

$$\frac{a_m - a_n}{m-n} = d.$$

CHAPTER 2

3-2

تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى

200 نەچچە يىل ئىلگىرى، گائۇسنىڭ ھېساب مۇئەللىمى تۆۋەندىكى سوئالنى ئوتتۇرىغا قويغان:

$$1+2+3+\cdots+100=?$$

ئېيتىشلارغا قارىغاندا، باشقا ساۋاقداشلار 100 دانە ساننى ئەزامۇئەزا ئالدىراپ قوشۇۋاتقاندا، 10 ياشلىق گائۇس توغرا جاۋابنى تۆۋەندىكى ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ناھايىتى تېز ھېسابلاپ چىققان:

$$(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)=101\times 50=5\,050.$$

گائۇس (Carl Fiedrich Gauss) (1777 — 1855)، گېرمانىيىلىك مەشھۇر ماتېماتىك. ئۇ تەتقىق قىلغان مەزمۇنلار ماتېماتىكىنىڭ ھەرقايسى ساھەلىرىگە چېتىلىدۇ، ئۇ تارىختىكى ئەڭ ئۇلۇغ ماتېماتىكلارنىڭ بىرى بولۇپ، ئۇنىڭغا «ماتېماتىكا شاھزادىسى» دەپ نام بېرىلگەن.

گائۇسنىڭ ھېسابلاش ئۇسۇلى ئەمەلىيەتتە تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \ldots$$

نىڭ ئالدىنقى 100 ئەزاسىنىڭ يىغىندىسىنى تېپىش مەسىلىسىنى ھەل قىلغان. كىشىلەر بۇ ھېسابلاش ئۇسۇلىدىن ئىلھام ئېلىپ، 1، 2، 3، …، n، … نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنى تۆۋەندىكى ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ھېسابلىغان:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

گە ئاساسەن بىلىشكە بولىدۇكى،

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)\times n}{2}.$$

ئىزدىنىش

گائۇسنىڭ ھېسابلاش ئۇسۇلىنىڭ ئاجايىپ يېرى قەيەردە؟ بۇ خىل ئۇسۇلنى ئادەتتىكى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنى تېپىشقا كېڭەيتكىلى بولامدۇ؟

ئومۇمەن،

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

نى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى دەپ ئاتاپ، ئۇنى S_n بىلەن ئىپادىلەيمىز، يەنى

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

گائۇسنىڭ ھېسابلاش ئۇسۇلىدىن ئىلھام ئېلىپ، ئومۇمىي ئايرىمىسى d بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى S_n نى ئىككى خىل ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەيمىز:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d], \quad ①$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d]. \quad ②$$

② + ① دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\begin{aligned} 2S_n &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ دانە}} \\ &= n(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

بۇنىڭدىن تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىغا ئېرىشىمىز:

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.}$$

بۇ فورمۇلىغا تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n = a_1 + (n-1)d$ نى قويساق، S_n نى يەنە باش ئەزا a_1 بىلەن ئومۇمىي ئايرىما d ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، يەنى

$$\boxed{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.}$$

مۇلاھىزە ?

بۇ ئىككى فورمۇلنى سېلىشتۇرۇپ، ئۇلارنىڭ تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئايرىم ـ ئايرىم قايسى نۇقتىدىن ئەكس ئەتتۇرگەنلىكىنى ئېيتىپ بېرىڭ.

1 ـ مىسال. مائارىپ مىنىستىرلىكى 2000 ـ يىل 11 ـ ئاينىڭ 14 ـ كۈنى «ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپلەردە ‹مەكتەپلەر بىلەن ئالاقە ئورنىتىش› قۇرۇلۇشىنى يولغا قويۇش توغرىسىدىكى ئۇقتۇرۇش»نى تارقاتتى. مەلۇم شەھەر بۇنىڭغا ئاساسەن «مەكتەپلەر بىلەن ئالاقە ئورنىتىش» قۇرۇلۇشىنى يولغا قويۇشنىڭ 2001 ـ يىلىدىن باشلاپ 10 يىل ئىچىدە پۈتۈن شەھەردىكى ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپلەردە ئوخشاش بولمىغان ئۆلچەمدىكى مەكتەپ تورلىرىنى قۇرۇپ چىقىشتىن ئىبارەت ئومۇمىي نىشانىنى ئوتتۇرىغا قويدى. مۆلچەرلەپ ھېسابلاشقا ئاساسلانغاندا، 2001 ـ يىلى بۇ شەھەرنىڭ «مەكتەپلەر بىلەن ئالاقە ئورنىتىش» قۇرۇلۇشىغا ئىشلىتىدىغان خىراجىتى 5 مىليون يۈەن بولۇپ، قۇرۇلۇشنىڭ ئوڭۇشلۇق يولغا قويۇلۇشىغا كاپالەتلىك قىلىش ئۈچۈن، يەنە ھەر يىلى ئالدىنقى بىر يىلدىكىدىن 500 مىڭ يۈەن ئارتۇق مەبلەغ سېلىش پىلانلانغان بولسا، 2001 ـ يىلىدىن باشلاپ كەلگۈسى 10 يىل ئىچىدە، بۇ شەھەرنىڭ «مەكتەپلەر بىلەن ئالاقە ئورنىتىش» قۇرۇلۇشىغا سالىدىغان ئومۇمىي مەبلىغى قانچىلىك بولىدۇ؟

يېشىش: مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، 2001 ـ يىلىدىن 2010 ـ يىلىغىچە، بۇ شەھەرنىڭ «مەكت
لەر بىلەن ئالاقە ئورنىتىش» قۇرۇلۇشىغا سالىدىغان مەبلىغى ھەر يىلى ئالدىنقى بىر يىلىدىكىدىن (
مىلىڭ يۈەن ئارتۇق بولىدۇ. شۇڭا، 2001 ـ يىلىدىن باشلاپ ھەر يىلى سالىدىغان مەبلەغنى بىر تەڭ ئايـ
مىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نى تۈزۈپ ئىپادىلەشكە بولىدۇ. بۇنىڭدا:

$$a_1=5000000,\quad d=500000.$$

شۇنداق قىلىپ، 2010 ـ يىلى ($n=10$) غىچە سالىدىغان ئومۇمىي مەبلەغ تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$S_{10}=10\times 5000000+\frac{10\times(10-1)}{2}\times 500000=72500000(\text{يۈەن}).$$

جاۋابى: 2001 ـ يىلىدىن 2010 ـ يىلىغىچە، بۇ شەھەرنىڭ «مەكتەپلەر بىلەن ئالاقە ئورنىتىش» قۇرۇلۇشىغا سالىدىغان ئومۇمىي مەبلىغى 72500000 يۈەن بولىدۇ.

تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا مۇناسىۋەتلىك a_1، S_n، n، d، a_n مىقدارلار نىڭ قانچىسى بېرىلگەندە، ئاندىن قالغان مىقدارلارنى ئېنىقلاشقا بولىدۇ؟

2 ـ مىسال. بىر تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى 10 ئەزاسى يىغىندىسى 310، ئالدىنقى 20 ئەزاسى يىغىندىسى 1220 ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، بۇ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىنى مۇشۇ شەرتلەرگە ئاساسەن ئېنىقلاشقا بولامدۇ؟

تەھلىل: بېرىلگەن شەرتنى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىغا قويۇش ئارقىلىق a_1 ۋە d غا دائىر ئىككى مۇناسىۋەت ئىپادىسىگە ئېرىشكىلى بولىدۇ، ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسى a_1 ۋە d غا دائىر ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە بولۇپ، بۇنىڭدىن a_1 ۋە d نى تېپىشقا، ئاندىن يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تاپماقچى بولغان ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ.

يېشىش: مەسىلىنىڭ مەنىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى،

$$S_{10}=310,\qquad S_{20}=1220,$$

بۇلارنى فورمۇلا

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

غا قويساق:

$$\begin{cases}10a_1+45d=310,\\ 20a_1+190d=1\,220.\end{cases}$$

a_1 ۋە d غا دائىر بۇ تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يەشسەك:

$$a_1=4, \qquad d=6,$$

$$\therefore \quad S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 6=3n^2+n.$$

3 - مىسال. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى $S_n=n^2+\frac{1}{2}n$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى تاپايلى. بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، ئۇنىڭ باش ئەزاسى بىلەن ئومۇمىي ئايرىمىسى ئايرىم - ئايرىم نېمىگە تەڭ بولىدۇ؟

يېشىش:

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

$$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}(n>1)$$

گە ئاساسەن شۇنى بىلەلەيمىزكى، $n>1$ بولغاندا:

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= n^2+\frac{1}{2}n-\left[(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right] \\ &= 2n-\frac{1}{2}. \qquad ① \end{aligned}$$

$n=1$ بولغاندا

$$a_1=S_1=1^2+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{2}$$

بولۇپ، بۇمۇ ① ئىپادىنى قانائەتلەندۈرىدۇ.

شۇڭا، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى:

$$a_n=2n-\frac{1}{2}.$$

بۇنىڭدىن بىلىشكە بولىدۇكى، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ باش ئەزاسى $\frac{3}{2}$، ئومۇمىي ئايرىمىسى 2 بولغان تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدۇ.

ئىزدىنىش

ئومۇمەن، ئەگەر بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى

$$S_n=pn^2+qn+r$$

بولۇپ، بۇنىڭدىكى p، q، r لار تۇراقلىق سان ھەمدە $p\neq 0$ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى چوقۇم تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، ئۇنىڭ باش ئەزاسى بىلەن ئومۇمىي ئايرىمىسى ئايرىم - ئايرىم نېمىگە تەڭ بولىدۇ؟

4 ـ مىسال. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

$$5,\ 4\frac{2}{7},\ 3\frac{4}{7},\ \cdots$$

نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى S_n ئىكەنلىكى بېرىلگەن، S_n نىڭ قىممىتىنى ئەڭ چوڭ قىلىدىغان تەرتىپ نومۇرى n نى تاپايلى.

بۇ مىسالنى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىدىن چىقىپ تەھلىل قىلساق، n نى تېپىش لايىھىسىگە ئېرىشكىلى بولامدۇ؟

تەھلىل: تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىنى $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ قىلىپ يېزىشقا بولىدۇ، شۇڭا S_n نى فۇنكسىيە $y=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$ نىڭ $x=n$ $(x\in \mathbf{N}^*)$ بولغاندىكى فۇنكسىيە قىممىتى دەپ قاراشقا بولىدۇ. يەنە بىر تەرەپتىن، S_n نىڭ n غا دائىر گرافىكى بىر پارابولا ئۈستىدىكى نۇقتىلار ئىكەنلىكىنى ئاسانلا بىلىشكە بولىدۇ. شۇڭلاشقا، n نىڭ قىممىتىنى ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىدىن پايدىلىنىپ تاپساق بولىدۇ.

يېشىش: مىسالنىڭ مەنىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى 5، $4\frac{2}{7}$، $3\frac{4}{7}$، ... نىڭ ئومۇمىي ئايرىمىسى $-\frac{5}{7}$، شۇڭا:

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n}{2}\left[2\times 5+(n-1)\left(-\frac{5}{7}\right)\right]\\&=\frac{75n-5n^2}{14}\\&=-\frac{5}{14}\left(n-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{1\,125}{56}.\end{aligned}$$

شۇنىڭ بىلەن، n نىڭ قىممىتى $\frac{15}{2}$ كە ئەڭ يېقىن بولغان پۈتۈن سان 7 ياكى 8 گە تەڭ بولغاندا، S_n ئەڭ چوڭ قىممەتنى ئالىدۇ.

ئۆزۈڭلار S_n نىڭ گرافىكىنى سىزىپ، يۇقىرىدىكى يەكۈننى ئىسپاتلاپ بېقىڭلار.

مەشىق

1. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر مىسالدىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، ماس تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى S_n نى تېپىڭ.

(1) $a_1=-4,\ a_8=-18,\ n=8$;

(2) $a_1=14.5,\ d=0.7,\ a_n=32$.

2. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى $S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+3$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى تېپىڭ.

3. توپلام $M=\{m\ |\ m=2n-1,\ n\in \mathbf{N}^*$ ھەمدە $m<60\}$ نىڭ ئېلېمېنت سانىنى ھەمدە بۇ ئېلېمېنتلارنىڭ يىغىندىسىنى تېپىڭ.

2 ـ باب

3.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. (1) مۇسبەت پۈتۈن سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى ئالدىنقى n دانە جۈپ ساننىڭ يىغىندىسىنى تېپىڭ؛

(2) مۇسبەت پۈتۈن سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدىكى ئالدىنقى n دانە تاق ساننىڭ يىغىندىسىنى تېپىڭ؛

(3) ئۈچ خانىلىق مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمىدا 5 نىڭ ھەسسىلىكى بولىدىغان ساندىن قانچىسى بار؟ ئۇلار ـ نىڭ يىغىندىسىنى تېپىڭ؛

(4) مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمىدا ئۈچ خانىلىق ساندىن قانچىسى بار؟ ئۇلارنىڭ يىغىندىسىنى تېپىڭ.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، ماس تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ غا مۇناسىۋەتلىك نامە ـ لۇم سانلارنى تېپىڭ:

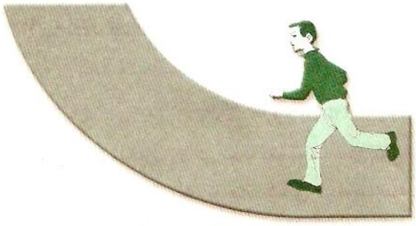
(1) $a_1 = 20$ ، $a_n = 54$ ، $S_n = 999$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، d ۋە n نى تېپىڭ؛

(2) $d = \frac{1}{3}$ ، $n = 37$ ، $S_n = 629$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a_1 ۋە a_n نى تېپىڭ؛

(3) $a_1 = \frac{5}{6}$ ، $d = -\frac{1}{6}$ ، $S_n = -5$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، n ۋە a_n نى تېپىڭ؛

(4) $d = 2$ ، $n = 15$ ، $a_n = -10$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a_1 ۋە S_n نى تېپىڭ.

3. قىشلىق تەنھەرىكەت يىغىنىنىڭ 5000m غا يۈگۈرۈش مۇسابىقىسىگە قاتنىشىش ئۈچۈن، مەلۇم ساۋاقداش 7 كۈنلۈك مەشىق پىلانى تۈزدى: بىرىنچى كۈنى 5000m غا يۈگۈرۈش، كېيىن ھەركۈنى ئالدىنقى بىر كۈندىكىگە قا ـ رىغاندا 500m ئارتۇق يۈگۈرۈش. بۇ ساۋاقداش 7 كۈندە جەمئىي قانچىلىك يۈگۈرىدۇ؟



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. ئايالنىڭ ئۇزۇنلۇقى 158cm ، ئەڭ چوڭ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 44cm بولغان بىر كۆپ تەرەپلىكنىڭ ھەر ـ قايسى تەرەپ ئۇزۇنلۇقلىرى ئومۇمىي ئايرىمىسى 3cm بولغان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلسا، بۇ كۆپ تەرەپلىكنىڭ تەرەپ سانىنى تې ـ پىڭ.

5. 100 دىن كىچىك مۇسبەت پۈتۈن سانلارنىڭ ئىچـ ـ دە 7 گە بۆلگەندە قالدۇق 2 بولىدىغان ساندىن جەمئىي قانچىسى بار؟ بۇ سانلارنىڭ يىغىندىسى قانچە؟

6. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى 2 ، 6 ، 10 ، ... ، 190 بىلەن 2 ، 8 ، 14 ، ... ، 200 نىڭ ئورتاق ئەزال ـ رىنى كىچىكتىن چوڭغا بولغان تەرتىپ بويىچە تىزىش ئارقىلىق بىر يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلىن ـ غان بولسا، بۇ يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ھەرقايسى ئەزالىرىنىڭ يىغىندىسىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. بىر سوغۇق ئىچىملىكلەر زاۋۇتى چوڭ تىپتىكى ماروژنى ياساش ماشىنىسىنى ھەرئايدا بىر قېتىم رېمونت قىلىدۇ، رېمونتچى رېمونت ھەققى بىلەن ۋاقىتنىڭ تۆۋەندىكىدەك مۇناسىۋەتتە ئىكەنلىكىنى بايقىغان: n ىنچى ئايدا سەرپ قىلىنىدىغان رېمونت ھەققى $500+2(n-1)$ يۈەن. بۇ خىل ماروژنى ياساش ماشىنىسىنىڭ سېتىلىش باھاسى 500 مىڭ يۈەن بولۇپ، 5 يىل ئىشلەتكەندىن كېيىن براكقا چىقىرىلسا، بۇ ماشىنىنى ئىشلىتىشكە باشلىغاندىن تارتىپ براكقا چىقارغىچە، كۈنلۈك ئوتتۇرىچە سەرپىيات ❶ قانچە بولىدۇ (بىر يىل 365 كۈن بويىچە ھېسابلىنىدۇ، نەتىجە 3 خانىلىق ئىناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېلىنىدۇ)؟

2. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولۇپ، S_n ئۇنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، S_6، $S_{12}-S_6$، $S_{18}-S_{12}$ نىڭمۇ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

3. بىر ئاپتوكارۋان (كالون) دا 15 ئاپتوموبىل بار. مەلۇم بىر كۈنى يۈك توشۇش ۋەزىپىسىنى ئورۇنداش ئۈچۈن بىرىنچى ئاپتوموبىل چۈشتىن كېيىن سائەت 2 دە، ئىككىنچى ئاپتوموبىل چۈشتىن كېيىن سائەت 2 دىن 10 مىنۇت ئۆتكەندە، ئۈچىنچى ئاپتوموبىل چۈشتىن كېيىن سائەت 2 دىن 20 مىنۇت ئۆتكەندە، قالغان ئاپتوموبىللارمۇ مۇشۇ ۋاقىت تەرتىپى بويىچە بىر ـ بىرلەپ يولغا چىقتى. ئەگەر بارلىق شوپۇرلار ئۈزلۈكسىز ئاپتوموبىل ھەيدىگەن ھەمدە ئۇلارنىڭ ھەممىسى چۈشتىن كېيىن سائەت 6 دە توختاپ دەم ئالغان بولسا:

(1) چۈشتىن كېيىن سائەت 6 بولغاندا، ئەڭ ئاخىرقى بىر ئاپتوموبىلنىڭ ماڭغان ۋاقتى قانچىلىك؟

(2) ئەگەر ھەربىر ئاپتوموبىلنىڭ مېڭىش تېزلىكى ئوخشاشلا 60km/h بولسا، بۇ ئاپتوكارۋان شۇ كۈنى جەمئىي قانچە km يول ماڭغان؟

4. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى

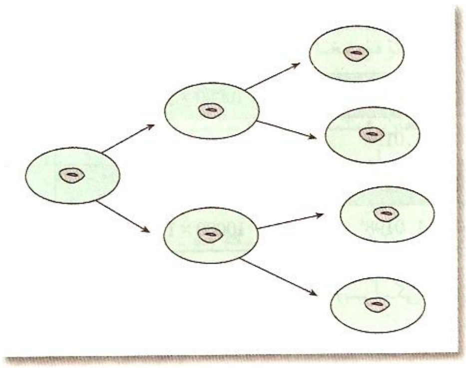
$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

ئىكەنلىكى بېرىلگەن، S_n نى ئىپىشقا بولىدىغان بىر فورمۇلىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدىغان ـ بولمايدىغانلىقىنى تەتقىق قىلىپ كۆرۈڭ. بۇ مەسىلىنى كېڭەيتەلەمسىز؟

❶ ماشىنىنى ئىشلىتىشكە باشلىغاندىن تارتىپ براكقا چىقارغىچە جەمئىي چىقىم قىلىنغان رېمونت ھەققى بىلەن سېتىۋېلىش ھەققىنىڭ يىغىندىسىنى ئىشلەتكەن كۈن سانىغا بۆلگەندىكى بۆلۈنمە كۈنلۈك ئوتتۇرىچە سەرپىيات دەپ ئاتىلىدۇ.

4-2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

رېئال تۇرمۇشتا، بىز يەنە تۆۋەندىكىدەك بىر تۈرلۈك ئالاھىدە سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ئۇچرىتىمىز. 1.4.2 ـ رەسىمدە مەلۇم خىل ھۈجەيرىنىڭ پارچىلىنىش مودېلى بېرىلدى.



1.4.2 ـ رەسىم

ھۈجەيرىلەرنىڭ پارچىلىنىش سانى تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$1, 2, 4, 8, \cdots . \qquad ①$$

ئېلىمىزنىڭ قەدىمكى زاماندىكى بەزى ئالىملار: «1 چى ئۇزۇنلۇقتىكى تاياقنىڭ كۈندە يېرىمى ئېلىنسا، مەڭگۈ تۈگىمەيدۇ.» دەپ ئوتتۇرىغا قويغان. بۇنداق بولغاندا، ھەر كۈنى ئېشىپ قالغان قىسمى ئالدىنقى بىر كۈندىكىنىڭ يېرىمى بولىدۇ. ئەگەر «1 چى ئۇزۇنلۇقتىكى تاياق» نى «1» بىرلىك دەپ قارىساق، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى كېلىپ چىقىدۇ:

$$1, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \cdots . \qquad ②$$

بىر خىل كومپيۇتېر ۋىرۇسى كومپيۇتېرنىڭ ئادرېس دەپتىرىنى ئاختۇرالايدۇ ھەمدە ئېمائىل (پوچتا يوللانمىسى) ئارقىلىق تارقىلىدۇ، ۋىرۇس ئىشلەپچىقارغۇچى تارقاتقان ۋىرۇس بىرىنچى قېتىملىق ۋىرۇس، ئېمائىل تاپشۇرۇپ ئالغۇچى تارقاتقان ۋىرۇس ئىككىنچى قېتىملىق ۋىرۇس، ... دەپ ئاتىلىدۇ. ئەگەر ھەربىر قېتىملىق ۋىرۇس بىلەن يۇقۇملانغان ھەربىر كومپيۇتېر 20 كومپيۇتېرنى يۇقۇملاندۇرىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، تەكرارلىنىش بولمىغان ئەھۋالدا، بۇ خىل ۋىرۇسنىڭ ھەربىر قېتىمدا يۇقۇملاندۇرىدىغان كومپيۇتېر سانلىرىدىن ھاسىل بولغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى مۇنداق بولىدۇ:

$$1, 20, 20^2, 20^3, \cdots . \qquad ③$$

❶ ئېلىمىزدە ھازىر يولغا قويۇلۇۋاتقان قەرەللىك ئامانەتتىكى ئاپتوماتىك قايتا ئامانەت قويۇش كەسپىدە قوش ئۆسۈم بويىچە ئۆسۈم چىقىم قىلىنىدۇ.

يەككە ئۆسۈمدىن باشقا، بانكىلاردا قوش ئۆسۈم ❶ دەپ ئاتىلىدىغان يەنە بىر خىل ئۆسۈم چىقىم قىلىش شەكلى بار، بۇنىڭدا كېيىنكى بىر قەرەلدىكى ئۆسۈمنى ھېسابلاشتا ئالدىنقى بىر قەرەلدىكى ئۆسۈم بىلەن دەسمايىنىڭ يىغىندىسى دەسمايە قىلىنىدۇ، بۇ دەل ئادەتتە ئېيتىلىدىغان «دومىلىما ئۆسۈم» دۇر.

دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسىنى قوش ئۆسۈم بويىچە ھېسابلاش فورمۇلىسى تۆۋەندىكىچە:

$$\text{ئۆسۈم يىغىندىسى - دەسمايە} = \text{دەسمايە} \times (1 + \text{ئۆسۈم نىسبىتى})^{\text{قەرەلى}}.$$

مەسىلەن، ھازىر بانكىغا 10000 يۈەن ئامانەت قويۇلغان، يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى 1.98% بولسا، ئۇ ھالدا قوش ئۆسۈم بويىچە، 5 يىل ئىچىدە ھەربىر يىلنىڭ ئاخىرىدىكى دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسى ئايرىم - ئايرىم تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ (ھېسابلىغاندا ئونلۇق كەسىر چېكىتتىدىن كېيىنكى 2 - خانىغىچە ئېنىقلىقتا ئېلىنىدۇ):

ۋاقتى	يىل بېشىدىكى دەسمايە (يۈەن)	يىل ئاخىرىدىكى دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسى❶(يۈەن)
1 - يىلى	10000	10000×1.0198
2 - يىلى	10000×1.0198	10000×1.0198^2
3 - يىلى	10000×1.0198^2	10000×1.0198^3
4 - يىلى	10000×1.0198^3	10000×1.0198^4
5 - يىلى	10000×1.0198^4	10000×1.0198^5

❶ بۇ يەردە ئامانەت قويغۇچى 5 يىل ئىچىدە پۇل قوشمىغان ھەم ئالمىغان، شۇنداقلا ئۆسۈم ئېجمۇ ئېلىنمىغان دەپ پەرەز قىلىنىدى.

ھەربىر يىلنىڭ يىل ئاخىرىدىكى دەسمايە - ئۆسۈم يىغىندىسى (بىرلىكى: يۈەن) تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$10\,000 \times 1.0198,\ 10\,000 \times 1.0198^2,\ 10\,000 \times 1.0198^3,$$
$$10\,000 \times 1.0198^4,\ 10\,000 \times 1.0198^5. \quad ④$$

كۆزىتىش

يۇقىرىدىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ①، ②، ③، ④ لەرنىڭ قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىكى بار؟

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى:

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ① دە، 2 - نچى ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ نىسبىتى ئوخشاشلا ________ گە تەڭ؛

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ② دە، 2 - نچى ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ نىسبىتى ئوخشاشلا ________ گە تەڭ؛

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ③ دە، 2 - نچى ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ نىسبىتى ئوخشاشلا ________ گە تەڭ؛

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ④ دە، 2 - نچى ئەزادىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ نىسبىتى ئوخشاشلا ________ گە تەڭ.

دېمەك، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرى مۇنداق ئورتاق ئالاھىدىلىككە ئىگە: 2 - نچى ئەزادىن باشلاپ،

2 ـ باب

ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ نىسبىتى ئوخشاش بىر تۇراقلىق سانغا تەڭ.

ئومۇمەن، ئەگەر بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ 2 ىنچى ئەزاسىدىن باشلاپ، ھەربىر ئەزا بىلەن ئۇنىڭ ئالدىدىكى بىر ئەزانىڭ نىسبىتى ئوخشاش بىر تۇراقلىق سانغا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ **نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى** (Geometric sequence) ❶ دەپ ئاتىلىدۇ، بۇ تۇراقلىق سان مۇشۇ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ **ئومۇمىي نىسبىتى** (common ratio) دەپ ئاتىلىپ، ئادەتتە q $(q \neq 0)$ ھەرپى بىلەن ئىپادىلىنىدۇ.

❶ بەزى كىتابلاردا تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئىنگلىزچە يېزىلىشى قىسقىچە G.P. (Geometric Progression) دەپ خاتىرىلەنگەن.

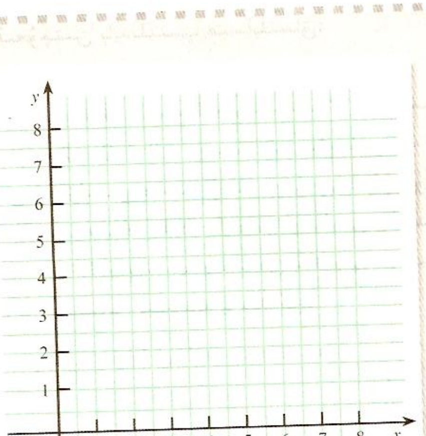
يۇقىرىدىكى تۆت سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ھەممىسى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولۇپ، ئۇلارنىڭ ئومۇمىي نىسبىتى تەرتىپ بويىچە ______، ______، ______، ______.

تەڭ ئايرىمىلىق ئوتتۇرا ئەزا ئۇقۇمىغا ئوخشاش، ئەگەر a بىلەن b نىڭ ئارىسىغا a، G، b لار تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدىغان قىلىپ بىر G سانىنى قىستۇرسەك، ئۇ ھالدا G سان a بىلەن b نىڭ **تەڭ نىسبەتلىك ئوتتۇرا ئەزاسى** دەپ ئاتىلىدۇ. ئويلاپ بېقىڭ، بۇ چاغدا a، b نىڭ ئالامىتى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە بولىدۇ؟ G نى a بىلەن b دىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەمسىز؟

ھەم تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، ھەم تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدىغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى مەۋجۇتمۇ؟ ئەگەر مەۋجۇت بولسا، مىسال كەلتۈرەلەمسىز؟

ئەمدى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى تەتقىق قىلايلى.

ئىزدىنىش



(1) يۇقىرىدىكى تۆت تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىڭ. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانىغا سېلىشتۇرۇپ، باش ئەزاسى a_1، ئومۇمىي نىسبىتى q بولغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى تولۇقلاڭ:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{(\ \ )}.}$$

(2) سول تەرەپتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى

CHAPTER

$a_n = 2^{n-1}$ بولغان سانلار ئارقمۇئارقلىقنىڭ گرافىكى بىلەن فۇنكسىيە $y = 2^{x-1}$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ، نېمىنى بايقىدىڭىز؟

(3) ئوخشاش بىر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ بولغان سانلار ئارقمۇئارقلىقنىڭ گرافىكى بىلەن فۇنكسىيە $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە ئۇلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆزىتىڭ.

1 - مىسال. مەلۇم بىر خىل رادىئوئاكتىپ ماددا ئۈزلۈكسىز ھالدا باشقا ماددىغا ئۆزگىرىپ، ھەربىر يىل ئۆتكەندە ئۇنىڭ ئېشىپ قالغان قىسمى ئەسلىدىكىسىنىڭ 84% ىگە تەڭ بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، بۇ خىل ماددىنىڭ يېرىممىغىچە ئازىيىش مەزگىلى (يېرىم يىمىرىلىش دەۋرى) ❶ قانچىلىك بولىدۇ(1 يىلغىچە ئېنىقلىقتا)؟

❶ رادىئوئاكتىپ ماددىنىڭ ئەسلىدىكىسىنىڭ يېرىمىچىلىك بولغىچە ئازىيىشى ئۈچۈن كېتىدىغان ۋاقىت بۇ خىل ماددىنىڭ يېرىممىغىچە ئازىيىش مەزگىلى دەپ ئاتىلىدۇ.

يېشىش: بۇ خىل ماددىنىڭ دەسلەپكى ماسسىسىنى 1، n يىل ئۆتكەندىن كېيىن قېپقالغان ماسسىسىنى a_n دەپ پەرەز قىلساق، بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن سانلار ئارقمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ بىر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقمۇئارقىلىقى ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز. بۇنىڭدا:

$$a_1 = 0.84,\quad q = 0.84.$$

$a_n = 0.5$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$0.84^n = 0.5.$$

ئىككى تەرىپىنىڭ لوگارىفمىسىنى ئالساق:

$$n\lg 0.84 = \lg 0.5.$$

ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق:

$$n \approx 4.$$

جاۋابى: بۇ خىل ماددىنىڭ يېرىممىغىچە ئازىيىش مەزگىلى تەخمىنەن 4 يىل.

2 - مىسال. 2.4.2 - رەسىمدىكى سىخېما بويىچە بېسىپ چىقىلغان سانلار ئارقمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسىنى ھەمدە ئۇنىڭ رېكۇررېنت فورمۇلىسىنى يېزىپ چىقايلى. بۇ سانلار ئارقمۇئارقىلىقى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟

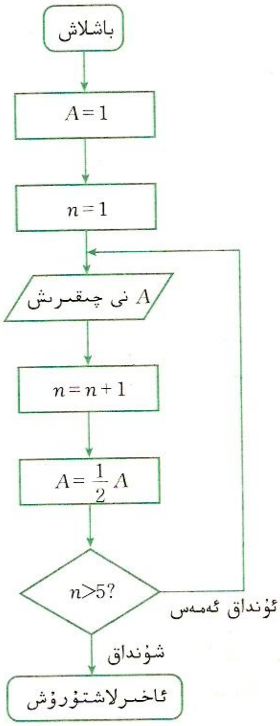
يېشىش: ئەگەر بېسىپ چىقىلغان سانلارنى تەرتىپ بويىچە a_1 (يەنى A)، a_2، a_3، ... قىلىپ يازساق، 2.4.2 - رەسىمدىن بىلىشكە بولىدۇكى:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = a_1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$a_4 = a_3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$



2.4.2 ـ رەسىم

$$a_5=a_4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكى رېكۇررېنت فورمۇلىسىغا ئېرىشىمىز:

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}(n>1). \end{cases}$$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$ بولغانلىقتىن، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولۇپ، ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى:

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3 ـ مىسال. بىر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ 3 ـ ئىنچى ئەزاسى بىلەن 4 ـ ئىنچى ئەزاسى ئايرىم ـ ئايرىم 12 ۋە 18 بولسا، ئۇنىڭ 1 ـ ئىنچى ئەزاسى بىلەن 2 ـ ئىنچى ئەزاسىنى تاپايلى.

يېشىش: بۇ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ 1 ـ ئىنچى ئەزاسىنى a_1، ئومۇمىي نىسبىتىنى q دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$a_1q^2=12, \quad ①$$

$$a_1q^3=18. \quad ②$$

② ÷ ① دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$q=\frac{3}{2}. \quad ③$$

③ نى ① گە قويساق:

$$a_1=\frac{16}{3}.$$

$$\therefore \quad a_2=a_1q=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}=8.$$

جاۋابى: بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ 1 ـ ئىنچى ئەزاسى بىلەن 2 ـ ئىنچى ئەزاسى ئايرىم ـ ئايرىم $\frac{16}{3}$ ۋە 8 بولىدۇ.

4 ـ مىسال. $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ لار ئەزا سانى ئوخشاش بولغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، جەدۋەلدىكى بوش ئورۇنلارنى مىسالدىكىسىگە تەقلىد قىلىپ تولدۇرايلى. بۇنىڭدىن قانداق يەكۈنگە ئېرىشەلەيمىز؟ ئۇنى ئىسپاتلايلى.

	a_n	b_n	$a_n \cdot b_n$	سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n \cdot b_n\}$ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟
مىسال	$3\times(\frac{2}{3})^n$	$-5\times 2^{n-1}$	$-10\times(\frac{4}{3})^{n-1}$	بولىدۇ
ئىختىيارىي تاللاش 1				
ئىختىيارىي تاللاش 2				

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ ئەزا سانى ئوخشاش بولغان ئىككى تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولسا، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{pa_n+qb_n\}$ (بۇنىڭدا p، q لار تۇراقلىق سان) مۇ تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟

يېشىش: جەدۋەل تولدۇرۇشنى ساۋاقداشلار ئۆزلىرى تاماملىسا بولىدۇ.

بۇ جەدۋەلگە ئاساسەن، مۇنداق يەكۈنگە ئېرىشەلەيمىز: ئەگەر $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ ئەزا سانى ئوخشاش بولغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولسا، ئۇ هالدا $\{a_n \cdot b_n\}$ مۇ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدۇ.

بۇنىڭ ئىسپاتى تۆۋەندىكىچە:

سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي نىسبىتىنى p، $\{b_n\}$ نىڭ ئومۇمىي نىسبىتىنى q دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ هالدا سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n \cdot b_n\}$ نىڭ n ىنچى ئەزاسى بىلەن $n+1$ ىنچى ئەزاسى ئايرىم ـ ئايرىم $a_1p^{n-1}\cdot b_1q^{n-1}$ ۋە $a_1p^n\cdot b_1q^n$، يەنى $a_1b_1(pq)^{n-1}$ ۋە $a_1b_1(pq)^n$ بولىدۇ.

$$\frac{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}{a_n\cdot b_n}=\frac{a_1\ b_1(pq)^n}{a_1\ b_1(pq)^{n-1}}=pq$$

بولۇپ، ئۇ n بىلەن مۇناسىۋەتسىز بىر تۇراقلىق سان بولغانلىقتىن، $\{a_n \cdot b_n\}$ چوقۇم pq نى ئومۇمىي نىسبەت قىلغان بىر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدۇ.

بۇ يەكۈننى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن پايدىلىنىپ بىۋاسىتە ئىسپاتلاشقا بولامدۇ؟

ئالاهىدە ئەهۋالدا، ئەگەر $\{a_n\}$ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، c نۆلگە تەڭ بولمىغان تۇراقلىق سان بولسا، ئۇ هالدا سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{c\cdot a_n\}$ مۇ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدۇ.

ئىزدىنىش

4 ـ مىسالدىكى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ بىلەن $\{b_n\}$ غا نىسبەتەن، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ مۇ چوقۇم تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟

مەشىق

1. $\{a_n\}$ نىڭ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، جەدۋەلدىكى بوش ئورۇنلارغا مۇۋاپىق سان تولدۇرۇڭ.

a_1	a_3	a_5	a_7	q
2		8		
	2			0.2

2. ئېمائىل ئارقىلىق ۋىرۇس تارقىتىش مىسالىدا، ئەگەر بىرىنچى قېتىمدا يۇقۇملانغان كومپيۇتېر سانى 80 دانە ھەمدە بىرىنچى قېتىمدىن باشلاپ، ئۇنىڭدىن كېيىنكى ھەربىر قېتىمدا يۇقۇملانغان ھەربىر كومپيۇتېر كېيىنكى قېتىمدا 20 دانە كومپيۇتېرنى يۇقۇملاندۇرسا، 5 ـ قېتىمغا بارغاندا قانچە كومپيۇتېر يۇقۇملىنىدۇ❶؟

❶ ھېسابلاش نەتىجىسىدىن كومپيۇتېر ۋىرۇسىنىڭ يۇقۇملاندۇرۇش سۈرئىتى ئىنتايىن تېز ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋالالايمىز. بۇنىڭدىن «كۆرسەتكۈچلۈك پارتلاش» نىڭ مەنىسىنى ھېس قىلالىدىڭىزمۇ؟

3. $\{a_n\}$ چەكسىز تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولۇپ، ئۇنىڭ ئومۇمىي نىسبىتى q ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى k ئەزاسىنى چىقىرىۋەتكەندە قېپقالغان ئەزالاردىن ھاسىل بولغان يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، ئۇنىڭ باش ئەزاسى بىلەن ئومۇمىي نىسبىتى ئايرىم ـ ئايرىم نېمىگە تەڭ بولىدۇ؟

(2) سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دىكى بارلىق تاق سانلىق ئەزالاردىن ھاسىل بولغان يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، ئۇنىڭ باش ئەزاسى بىلەن ئومۇمىي نىسبىتى ئايرىم ـ ئايرىم نېمىگە تەڭ بولىدۇ؟

(3) سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دىن ھەر 10 ئەزا ئۆتكۈزۈپ بىر ئەزانى ئېلىش ئارقىلىق ھاسىل قىلىنغان يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، ئۇنىڭ ئومۇمىي نىسبىتى نېمىگە تەڭ بولىدۇ؟ ئېرىشكەن يەكۈنىڭىزگە ئاساسەن بىر قىياسنى ئوتتۇرىغا قويالامسىز؟

4. $\{a_n\}$ نىڭ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) $a_5^2 = a_3 \cdot a_7$ كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ $a_5^2 = a_1 \cdot a_9$ كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

(2) $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ $(n>1)$ كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ بۇنىڭغا ئاساسەن قانداق يەكۈنگە ئېرىشەلەيسىز؟

$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$ $(n>k>0)$ كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ بۇنىڭدىن يەنە قانداق يەكۈنگە ئېرىشەلەيسىز؟

5. بىر ئادەم 135 مىڭ يۈەنگە بىر يېڭى ئاپتوموبىل سېتىۋالدى. مۇتەخەسسىسلەر بۇ خىل ئاپتوموبىل ھەر يىلى 10% بويىچە ئۇپرايدۇ❷ دەپ مۆلچەرلىدى.

(1) بۇ ئاپتوموبىلنىڭ n $(n \in \mathbf{N}^*)$ يىلدىن كېيىنكى قىممىتىنى بىر ئىپادە تۈزۈپ ئىپادىلەڭ.

(2) ئەگەر بۇ ئادەم ئاپتوموبىلنى تولۇق 4 يىل ئىشلەتكەندىن كېيىن سېتىۋەتمەكچى بولغان بولسا، تەخمىنەن قانچە پۇلغا ساتالايدۇ؟

❷ ئۇپرايدۇ دېگىنىمىز قىممىتى چۈشىدۇ دېگەن مەنىنى بىلدۈرىدۇ.

CHAPTER

4.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا،

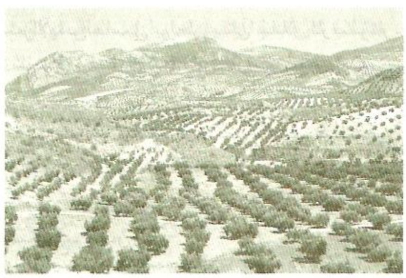
(1) $a_4=27$ ، $q=-3$ بولسا، a_7 نى تېپىڭ؛

(2) $a_2=18$ ، $a_4=8$ بولسا، a_1 بىلەن q نى تېپىڭ؛

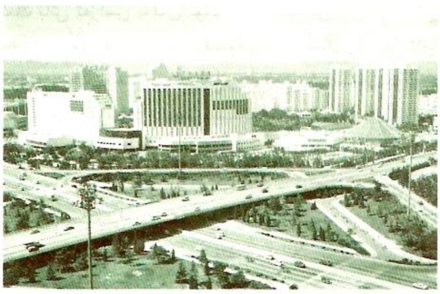
(3) $a_5=4$ ، $a_7=6$ بولسا، a_9 نى تېپىڭ؛

(4) $a_5-a_1=15$ ، $a_4-a_2=6$ بولسا، a_3 نى تېپىڭ.

2. مەلۇم جاي سۇ ـ تۇپراق بايلىقىنى ساقلاپ قېلىش ئۈچۈن، تېرىلغۇ يەردىن ئورمانغا قايتۇرۇش تەدبىرىنى يولغا قويدى، ئەگەر 2000 ـ يىلى 80 مىڭ گېكتار تېرىلغۇ يەرگە ئورمان بىنا قىلىپ، ئۇنىڭدىن كېيىنكى ھەربىر يىلدا ئالدىنقى بىر يىلدىكىگە قارىغاندا 10% ئاشۇرماقچى بولسا، 2005 ـ يىلى قانچە گېكتار تېرىلغۇ يەرگە ئورمان بىنا قىلىشى كېرەك؟ (نەتىجە بىرلەر خانىسىغىچە ئېنىقلىقتا)



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. $\{a_n\}$ ھەربىر ئەزاسى مۇسبەت سان بولغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولسا، $\left\{\sqrt{a_n}\right\}$ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

4. ئەگەر قېلىنلىقى 0.05 mm بولغان بىر ۋاراق گېزىتنى ئوتتۇرىدىن قاتلاپ، يەنە ئوتتۇرىدىن قاتلاپ، ...، تاكى 50 قېتىم ئوتتۇرىدىن قاتلىغاندىن كېيىن، گېزىتنىڭ قېلىنلىقى قانچىلىك بولىدۇ؟ سىز بۇ ۋاقىتتا گېزىتنىڭ قېلىنلىقىنىڭ يەر شارى بىلەن ئاي شارى ئارىسىدا بىر كۆۋرۈك ھاسىل قىلىدىغانلىقىغا ئىشىنەمسىز؟

5. مەلۇم شەھەرنىڭ بۇ يىلقى ھاۋا رايى سۈپىتى «ياخشى» بولغان كۈن سانى 105 كۈن بولغان، ئۇلار 2 يىلدىن كېيىن ھاۋا سۈپىتى «ياخشى» بولغان كۈن سانىنى 240 كۈنگە يەتكۈزمەكچى بولغان بولسا، بۇ شەھەرنىڭ ھاۋا رايى سۈپىتى «ياخشى» بولغان كۈن سانىنىڭ يىللىق ئېشىش نىسبىتى قانچە بولىدۇ (نەتىجە ئونلۇق كەسىر چېكىتىدىن كېيىنكى 2 ىنچى خانىغىچە ئېنىقلىقتا)؟

6. a ، b ئۆزئارا ئوخشاش بولمىغان مۇسبەت سان بولۇپ، A سان a ، b نىڭ تەڭ ئايرىملىق ئوتتۇرا ئەزاسى، G

2 ـ باب

سان a، b نىڭ مۇسبەت تەڭ نىسبەتلىك ئوتتۇرا ئەزاسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، A بىلەن G نىڭ ئېنىق بولغان چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتى بارمۇ؟

7. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى سانلارنىڭ تەڭ نىسبەتلىك ئوتتۇرا ئەزاسىنى تېپىڭ:

(1) $7+3\sqrt{5}$ ، $7-3\sqrt{5}$ ؛

(2) $a^4+a^2b^2$, $b^4+a^2b^2$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

8. (1) 9 بىلەن 243 نىڭ ئارىسىغا ئىككى سان قىستۇرۇڭ، نەتىجىدە ئۇلار بىلەن بۇ ئىككى سان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلسۇن؛

(2) 160 بىلەن 5 نىڭ ئارىسىغا 4 سان قىستۇرۇڭ، نەتىجىدە ئۇلار بىلەن بۇ ئىككى سان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلسۇن.

B گۇرۇپپا

1. تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي نىسبىتى q ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلاڭ:

$$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}.$$

(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رادىئوئاكتىپ ئېلېمېنتنىڭ $t=0$ بولغاندىكى ئاتوم يادروسى ئومۇمىي سانى N_0 بولۇپ، بىر يىل ئۆتكەندىن كېيىن ئاتوم يادروسى ئومۇمىي سانى ئازىيىپ N_0q بولغان، بۇنىڭدىكى تۇراقلىق سان q يىللىق ئازىيىش نىسبىتى دېيىلىدۇ. ئارخېئولوگىيىدە خارابىلىكلەرنىڭ دەۋرى كۆپ ھاللاردا ئۆلگەن جانلىق تېنىدىكى كاربون 14 ئېلېمېنتىنىڭ مۇقىم ھالدا سىجىل ئازىيىش ھادىسىسىدىن پايدىلىنىپ مۆلچەرلىنىدۇ. كاربون 14 نىڭ يېرىمىغىچە ئازىيىش مەزگىلى 5 730 يىل ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا:

(1) كاربون 14 نىڭ يىللىق ئازىيىش نىسبىتى قانچە بولىدۇ (0.1^6 گىچە ئېنىقلىقتا)؟

(2) مەلۇم بىر ھايۋان ئەۋرىشكىسىدىكى كاربون 14 مىقدارى نورمال ئاتموسفېرادىكى كاربون 14 مىقدارىنىڭ 60% ىگە تەڭ (يەنى 40% ئازايغان) بولسا، بۇ ھايۋان تەخمىنەن قانچە يىل بۇرۇن ئۆلگەن؟

3. خالىغان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ غا نىسبەتەن، a_7+a_{10} بىلەن a_8+a_9، $a_{10}+a_{40}$ بىلەن $a_{20}+a_{30}$ نى ھېسابلاڭ، قانداق قانۇنىيەتنى بايقىدىڭىز؟ بايقىغان قانۇنىيىتىڭىزنى ئومۇمىي ئەھۋالغا كېڭەيتەلەمسىز؟ بۇ مەسىلىنى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بىلەن فۇنكسىيە ئارىسىدىكى باغلىنىشتىن چىقىپ تەھلىل قىلىڭ. تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىدا مۇشۇنىڭغا ئوخشىشىپ كېتىدىغان قانداق يەكۇن بار؟

5-2 تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى

شاھمات قەدىمكى ھىندىستاندا بارلىققا كەلگەن. رىۋايەت قىلىنىشىچە، پادىشاھ شاھماتنىڭ كەشىپ قىلغۇچىسىنى مۇكاپاتلىماقچى بولۇپ، ئۇنىڭدىن قانداق تەلىپى بارلىقىنى سورىغان. كەشىپ قىلغۇچى: «شاھمات تاختىسىنىڭ 1 - كاتەكچىسىگە 1 تال بۇغداي، 2 - كاتەكچىسىگە 2 تال بۇغداي، 3 - كاتەكچىسىگە 4 تال بۇغداي قويۇپ، مۇشۇ تەرتىپ بويىچە تاكى 64 - كاتەكچىگە كەلگۈچە، ھەربىر كاتەكچىگە ئالدىنقى بىر كاتەكچىدىكى بۇغداي سانىنىڭ 2 ھەسسىسىچىلىك بۇغداي قويۇڭ، سىز ماڭا مۇشۇنچىلىك ئاشلىق بەرسىڭىزلا، يېتەرلىك بولىدۇ» دەپتۇ. پادىشاھ بۇنى يۇقىرى تەلەپ ئەمەس ئىكەن دەپ ئويلاپ، رازىمەنلىك بىلەن قوشۇلۇپتۇ. بىز بۇ يەردە مىڭ تال بۇغداينىڭ ماسسىسى 40g كېلىدۇ دەپ مۆلچەرلەيلى، تەكشۈرۈشكە ئاساسلانغاندا، ھازىر دۇنيانىڭ يىللىق بۇغداي ئىشلەپچىقىرىش مىقدارى تەخمىنەن 600 مىليون توننا، ئەمدى مۇشۇ سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن، پادىشاھنىڭ ئۆز ۋەدىسىنى ئەمەلگە ئاشۇرالايدىغان ياكى ئاشۇرالمايدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى.

قېنى ھەممەيلەن بىرلىكتە تەھلىل قىلىپ كۆرەيلى، ئەگەر ھەرقايسى كاتەكچىلەرگە قويۇلغان بۇغداي سانلىرىنى بىر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى دەپ قارىساق، باش ئەزاسى 1، ئومۇمىي نىسبىتى 2 بولغان بىر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا ئېرىشىمىز، 1 - كاتەكچىدىن 64 - كاتەكچىگىچە قويۇلغان بۇغداي سانلىرىنىڭ ئومۇمىي يىغىندىسىنى تېپىش دېگەنلىك مۇشۇ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 64 ئەزاسى يىغىندىسىنى تېپىش دېگەنلىك بولىدۇ.

ئومۇمەن، تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسىنىڭ يىغىندىسى مۇنداق بولىدۇ:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىغا ئاساسەن، يۇقىرىقى ئىپادىنى مۇنداق يېزىشقا بولىدۇ:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}. \quad ①$$

① نىڭ ئىككى تەرىپىنى ئومۇمىي نىسبەت q غا كۆپەيتسەك:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \quad ②$$

بايقاشقا بولىدۇكى، ① ۋە ② نىڭ ئوڭ تەرىپىدە نۇرغۇن ئوخشاش ئەزالار بار. ① نىڭ ئىككى تەرىپىدىن ② نىڭ ئىككى تەرىپىنى ئايرىم - ئايرىم ئېلىش ئارقىلىق بۇ ئوخشاش ئەزالارنى يوقاتساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

$q \neq 1$ بولغاندا، تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسى مۇنداق بولىدۇ:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1).}$$

$q=1$ بولغاندا، تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى S_n قانچىگە تەڭ بولىدۇ؟

$a_n = a_1q^{n-1}$ بولغانلىقتىن، يۇقىرىقى فورمۇلىنى يەنە تۆۋەندىكىدەك يېزىشقىمۇ بولىدۇ:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1-q} \quad (q \neq 1).}$$

يۇقىرىقى فورمۇلىغا ئىگە بولغاندىن كېيىن، بۇ پاراگرافنىڭ بېشىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان مەسىلىنى ھەل قىلىشقا بولىدۇ. $a_1 = 1$، $q = 2$، $n = 64$ گە ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$= \frac{1\times(1-q^n)}{1-2}$$

$$= 2^{64} - 1.$$

تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا مۇناسىۋەتلىك a_1، S_n، n، q، a_n مىقدارلارنىڭ قانچىسى بېرىلگەندە، ئاندىن قالغان مىقدارلارنى ئېنىقلاشقا بولىدۇ؟

$2^{64} - 1$ ناھايىتى چوڭ سان بولۇپ، 1.84×10^{19} دىنمۇ ئېشىپ كېتىدۇ. مىڭ تال بۇغداينىڭ ماسسىسى تەخمىنەن 40g كېلىدۇ دەپ مۆلچەرلىسەك، ئۇ ھالدا شاھمات تاختىسىغا قويۇلىدىغان بۇغداينىڭ ئومۇمىي ماسسىسى 700 مىليارد توننىدىن ئېشىپ كېتىدۇ. شۇڭا، پادىشاھ ۋەدىسىنى ئەمەلگە ئاشۇرالمايدۇ.

1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرىنىڭ ئالدىنقى 8 ئەزاسى يىغىندىسىنى تاپايلى:

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots;$

(2) $a_1 = 27,\ a_9 = \frac{1}{243},\ q<0.$

يېشىش: (1) $a_1 = \frac{1}{2}$، $q = \frac{1}{2}$ بولغانلىقتىن، $n = 8$ بولغاندا:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{255}{256};$$

(2) $a_1 = 27$، $a_9 = \frac{1}{243}$ گە ئاساسەن:

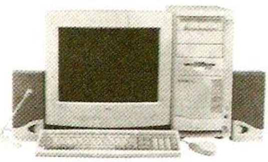
$$\frac{1}{243} = 27\cdot q^8.$$

$q<0$ گە ئاساسەن:

$$q=-\frac{1}{3}.$$

شۇڭا، $n=8$ بولغاندا:

$$S_n=\frac{27\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^8\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1\,640}{81}.$$



2 ـ مىسال. مەلۇم سودا سارىيى بۇ يىل 5000 دانە كومپيۇتېر ساتتى. ئەگەر ھەر يىللىق سېتىش مىقدارى ئوتتۇرا ھېساب بىلەن ئالدىنقى بىر يىلدىكىدىن 10% ئاشسا، ئۇ ھالدا بۇ يىلدىن باشلاپ تەخمىنەن قانچە يىلدا ئومۇمىي سېتىش مىقدارىنى 30 000 دانىگە يەتكۈزگىلى بولىدۇ (بىرلەر خانىسىغىچە ئېنىقلىقتا)؟

يېشىش: مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، ھەر يىللىق سېتىش مىقدارىنىڭ ئالدىنقى بىر يىلدىكىگە قارىغاندا ئاشقان پىرسەنت سانى ئوخشاش بولغانلىقتىن، بۇ يىلدىن باشلاپ، ھەر يىللىق سېتىش مىقدارلىرى بىر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نى ھاسىل قىلىدۇ، بۇنىڭدا:

$$a_1=5\,000,\ q=1+10\%=1.1,\ S_n=30\,000.$$

شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{5\,000(1-1.1^n)}{1-1.1}=30\,000.$$

رەتلىسەك:

$$1.1^n=1.6.$$

ئىككى تەرىپىنىڭ لوگارىفمىسىنى ئالساق:

$$n\lg 1.1=\lg 1.6.$$

ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق:

$$n=\frac{\lg 1.6}{\lg 1.1}\approx\frac{0.20}{0.041}\approx 5\ \text{(يىل)}.$$

جاۋابى: تەخمىنەن 5 يىلدا ئومۇمىي سېتىش مىقدارىنى 30 000 دانىگە يەتكۈزگىلى بولىدۇ.

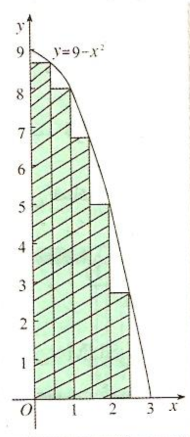
ئەمەلىيەتتە، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى S_n بىر يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

نى ھاسىل قىلىدۇ. بۇ يېڭى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئەزالىرى ئارىسىدىكى رېكۇررېنت (ئارقىمۇ - ئارقا كەلتۈرۈپ چىقىرىش) مۇناسىۋىتىنى تاماملاڭ:

$$\begin{cases}S_1=\underline{\qquad},\\ S_n=S_{n-1}+\underline{\qquad\quad}\ (n>1).\end{cases}$$

كومپيۇتېر بىزنىڭ ئادەتتىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنى تېپىشىمىزغا ياردەم بېرەلەيدۇ. تۆۋەندىكى مىسالغا قارايلى.



1.5.2 - رەسىم

3 - مىسال. 1.5.2 - رەسىمدىكىدەك، فۇنكسىيە $y=9-x^2$ نىڭ بىرىنچى چارەكتىكى گرافىكى بىلەن x ئوق، y ئوقلاردىن قورشالغان ساھەنىڭ يۈزى X نى مۆلچەرلەش ئۈچۈن، x ئوقتىكى ئىنتېرۋال [0,3] نى n تەڭ بۆلەككە بۆلۈپ، ھەربىر بۆلۈنۈش نۇقتىسىدىن فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى بىلەن كېسىشىدىغان قىلىپ y ئوققا پاراللېل سىزىقلارنى يۈرگۈزىمىز، ئاندىن ھەرقايسى كېسىشىش نۇقتىلىرىدىن سول تەرەپكە قاراپ x ئوققا پاراللېل سىزىقلارنى يۈرگۈزسەك، $(n-1)$ دانە تىك تۆتبۇلۇڭ ھاسىل بولىدۇ. بۇ $(n-1)$ دانە تىك تۆتبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى S نى تۆۋەندىكى پروگراممىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلىيالايمىز.

```
SUM = 0
k = 1
INPUT N
WHILE  k<= N-1
AN = (9-(k*3/N)^2)*3/N
SUM = SUM + AN
PRINT k, AN, SUM
k = k + 1
WEND
END
```

پروگراممىنى ئوقۇپ، تۆۋەندىكى سوئاللارغا جاۋاب بېرەيلى:

(1) پروگراممىدىكى AN، SUM ئايرىم - ئايرىم نېمىنى ئىپادىلەيدۇ، نېمە ئۈچۈن؟

(2) پروگراممىغا ئاساسەن، $n=6, 11, 16$ بولغاندىكى ھەرقايسى تىك تۆتبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىنى ئايرىم - ئايرىم ھېسابلايلى (كومپيۇتېردا پروگراممىنى ئىجرا قىلىشنىڭ ھاجىتى يوق).

يېشىش: (1) x ئوقتىكى ئىنتېرۋال [0,3] نى n تەڭ بۆلەككە بۆلگەندە، ھەربىر بۆلەكنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئوخشاشلا $\frac{3}{n}$، يەنى ھەربىر تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئاستى تەرىپى $\frac{3}{n}$ بولىدۇ. روشەنكى، بۆلۈنۈش نۇقتىلىرىنىڭ ئابسىسساسى ئايرىم - ئايرىم $\frac{3}{n}$، $\frac{3\times2}{n}$، …، $\frac{3\times(n-1)}{n}$ بولىدۇ، ھەربىر كېسىشىش نۇقتىسىدىن

تىك تۆتبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىنى تېپىشتا فورمۇلا $1^2+2^2+\cdots+n^2$ $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ دىن پايدىلىنىشقا توغرا كېلىدۇ.

CHAPTER

$y=9-x^2$ نىڭ گرافىكى بىلەن كېسىشىدىغان قىلىپ y ئوققا پاراللېل سىزىقلارنى يۈرگۈزسەك، كېسىشىش نۇقتىلىرىنىڭ ئوردىناتى ئايرىم - ئايرىم $9-\left(\frac{3}{n}\right)^2$، $9-\left(\frac{3\times 2}{n}\right)^2$، …، $9-\left[\frac{3\times(n-1)}{n}\right]^2$ بولۇپ، ئۇلار ئايرىم - ئايرىم ماس تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئېگىزلىكى بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، ھەر قايسى تىك تۆتبۇلۇڭلارنىڭ يۈزى ئايرىم - ئايرىم، $\left[9-\left(\frac{3}{n}\right)^2\right]\times\frac{3}{n}$، $\left[9-\left(\frac{3\times 2}{n}\right)^2\right]\times\frac{3}{n}$، …، $\left\{9-\left[\frac{3\times(n-1)}{n}\right]^2\right\}\times\frac{3}{n}$ بولىدۇ. شۇڭا، پروگراممىدىكى AN دېگىنىمىز k ىنچى تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ يۈزىنى، SUM بولسا ئالدىنقى k دانە تىك تۆتبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىنى ئىپادىلەيدۇ.

(2) پروگراممىغا ئاساسەن، $n=6$ بولغاندا، 5 دانە تىك تۆتبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى $N=6$ نى كىرگۈزگەندىكى SUM نىڭ ئەڭ ئاخىرقى چىقىرىلغان قىممىتىگە تەڭ بولىدۇ، يەنى $SUM=15.625$ (ئونلۇق كەسىر چېكىتىدىن كېيىنكى 3 ىنچى خانىغىچە ئېنىقلىقتا).

ئوخشاش يول بىلەن، $n=11$ بولغاندا، 10 دانە تىك تۆتبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى $N=11$ نى كىرگۈزگەندىكى SUM نىڭ ئەڭ ئاخىرقى چىقىرىلغان قىممىتىگە تەڭ بولىدۇ، يەنى $SUM=16.736$؛ $n=16$ بولغاندا، 15 دانە تىك تۆتبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى $SUM=17.139$ بولىدۇ.

دىففېرېنسىئال ۋە ئىنتېگرالغا دائىر بىلىملەردىن پايدىلىنىپ $X=18$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. n نىڭ بىرقانچە قىممىتىنى ئېلىپ، ئۇڭ تەرەپتىكى ھېسابلاشنى داۋاملاشتۇرۇڭ، قانداق قانۇنىيەتنى بايقىيالىدىڭىز؟

مەشىق

1. تۆۋەندە بېرىلگەن مىساللاردىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، ماس تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى S_n نى تېپىڭ.

(1) $a_1=3,\ q=2,\ n=6$;

(2) $a_1=-2.7,\ q=-\frac{1}{3},\ a_n=\frac{1}{90}$.

2. ئەگەر بىر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى 5 ئەزاسى يىغىندىسى 10 غا، ئالدىنقى 10 ئەزاسى يىغىندىسى 50 كە تەڭ بولسا، ئۇنىڭ ئالدىنقى 15 ئەزاسى يىغىندىسى قانچىگە تەڭ بولىدۇ؟

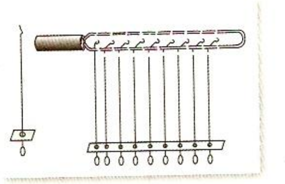
3. مەلۇم شەھەرنىڭ ئىچكى ئىشلەپچىقىرىش ئومۇمىي قىممىتى يېقىنقى 10 يىلدا 200 مىليارد يۈەندىن باشلاپ %10 لىك سۈرئەت بويىچە ئېشىپ بارغان بولسا، بۇ شەھەرنىڭ يېقىنقى 10 يىلدىكى ئىچكى ئىشلەپچىقىرىش ئومۇمىي قىممىتى جەمئىي قانچىلىك بولىدۇ؟

2 ـ باب

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

توققۇز هالقا

توققۇز هالقا جۇڭگونىڭ قەدىمكى زامانىدىلا بارلىققا كەلـ
گەن بىر خىل قىزىقارلىق زېھىن ئويۇنى.



توققۇز هالقىنىڭ قۇرۇلمىسى رەسىمدە كۆرسىتىلدى: چوڭ ـ كىچىكلىكى ئوخشاش 9 دانە هالقا (ئادەتتە تومراق سىمدىن ياسىلىدۇ) تەرتىپ بويىچە ئارىلىق تاشلاپ بىر قاتار تىزىلىدۇ، هەربىر هالقىغا ئىنچىكىرەك بىر تۈز سىم ۇتاشتۇرۇلۇپ، هەربىر تۈز سىم كېيىنكى بىر هالقا ئىچىدىن ئۆتكۈزۈلىدۇ. توققۇز تال تۈز سىمنىڭ يەنە بىر ئۇچى بىر ياغاچ تاختىدىكى بىر قاتار كىچىك تۆشۈكچىلەردىن ئۆتكۈزۈۈپ، يۇقىرى ـ تۆۋەن يۆتكەشكە بولىدىغان هەمدە ئاجراپ كەتمەيدىغان قىلىش ئۈچۈن، دۈگـ ەك شەكىلدە ئېگىپ قويۇلىدۇ. ئۇنىڭدىن باشقا، يەنە توم سىمدىن ياسالغان بىر رامكا بار بوۇپ، هالقىلارنى رامكىدىن ئاجرىتىشقا ياكى ئۇلارنى رامكىغا ئۆتكۈزۈپ قويۇشقا بولىدۇ. وققۇز هالقا ئويۇنىنى ئوينىغاندا بۇ توققۇز هالقىنىڭ هەممىسىنى رامكىدىن ئاجرىتىش ياكى امكىغا ئۆتكۈزۈش تەلەپ قىلىنىدۇ، لېكىن مەيلى ئاجرىتىش ياكى ئۆتكۈزۈشتە بولسۇن، چوۇم بەلگىلىك قائىدىگە بويسۇنۇش كېرەك. مەسىلەن، تۆۋەندىكى ئۇسۇل بويىچە ئېلىپ بارساق ولىدۇ: i ـ نچى هالقىنى ئاجرىتىش ئۈچۈن، چوقۇم ئالدى بىلەن ئالدىنقى $(i-2)$ دانە هالقىنى اجرىتىش كېرەك، بۇنىڭ سەۋەبى شۇكى، ئەگەر ئالدىنقى $(i-1)$ دانە هالقا ئاجرىتىۋېلىنغان ولسا، i ـ نچى هالقىنى ئاجرىتىش ئىمكانىيىتى بولماي قالىدۇ؛ هالبۇكى، ئالدىنقى $(i-1)$ دانە القا ئاجرىتىۋېلىنغان ئەهۋالدا $(i+1)$ ـ نچى هالقىنى ئاسانلا ئاجرىتىۋالغىلى بولىدۇ. ئەكسىـ ـە، i ـ نچى هالقىنى ئۆتكۈزۈش ئۈچۈن، چوقۇم ئالدى بىلەن ئالدىنقى $(i-2)$ دانە هالقىنى ۆتكۈزۈش كېرەك. بىر هالقىنى ئۆتكۈزۈش بىلەن ئاجرىتىۋېلىشنىڭ جەريانى دەل قارىمۇقارشى ـلۇپ، قېتىم سانى ئوخشاش بولىدۇ. ئەگەر توققۇز هالقىنى مۇشۇ قائىدە بويىچە ئاجراتماقچى ـلساق، كەم دېگەندە قانچە قېتىم هالقا يۆتكەشكە توغرا كېلىدۇ؟

n دانە هالقا بولغان ئەهۋالنى مۇهاكىمە قىلىپ باقايلى. n دانە هالقىنى ئاجرىتىۋېلىش ئۈچۈن ـەم دېگەندە $K(n)$ قېتىم هالقا يۆتكەش كېرەك دەپ پەرەز قىلساق، روشەنكى، 1 ـ نچى هالقىنى جرىتىۋېلىش ئۈچۈن $K(1)=1$ قېتىم هالقا يۆتكەش كېرەك. $n=2$ بولغاندا، چوقۇم ئالدى بىلەن ـنچى هالقىنى ئاجرىتىۋېلىپ، ئاندىن 1 ـ نچى هالقىنى ئاجرىتىشقا توغرا كېلىدۇ، شۇڭا 2 ـچى هالقىنى ئاجرىتىۋېلىش ئۈچۈن $K(2)=2$ قېتىم هالقا يۆتكەش كېرەك.

ئەگەر n ـ نچى هالقىنى ئاجرىتىۋالماقچى بولساق، ئۇ هالدا چوقۇم ئالدى بىلەن $(n-2)$ ـنـ ـى هالقىنى ئاجرىتىۋېلىشقا توغرا كېلىدۇ، بۇنىڭ ئۈچۈن $K(n-2)$ قېتىم هالقا يۆتكەش كېـ ـك، ئاندىن يەنە 1 قېتىم هالقا يۆتكىسەكلا n ـ نچى هالقىنى ئاجرىتىۋېلىشقا بولىدۇ، بۇ چاغدا ـەت $(n-1)$ ـ نچى هالقىلا قالىدۇ.

ئالدىنقى $(n-1)$ دانە هالقا ئاجرىتىۋېلىنغاندىن كېيىن، يەنە n ـ نچى هالقىنى ئاجرىتىۋېلىش ـچۈن كېتىدىغان هالقا يۆتكەش قېتىم سانىنى $k(n)$ بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ هالدا:

$$K(n)=K(n-2)+1+k(n-1).$$

ئەمدى $k(n)$ نىڭ ئىپادىسىنى تاپىمىز. ئالدىدىكىلەردىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەگەر n ىنچى هالقىنى ئاجرىتىۋالماقچى بولساق، چوقۇم ئالدى بىلەن $(n-1)$ ىنچى هالقىنى رامكىغا قايتا ئۆتكۈزۈشىمىز كېرەك، بۇ جەرياندا $k(n-1)$ قېتىم هالقا يۆتكەشكە توغرا كېلىدۇ. ئاندىن يەنە 1 قېتىم هالقا يۆتكىسەك، n ىنچى هالقىنى ئاجرىتىۋېلىشقا بولىدۇ، ئۇنىڭدىن كېيىن، $(n-1)$ ىنچى هالقىنى ئاجرىتىۋېلىش ئۈچۈن يەنە $k(n-1)$ قېتىم هالقا يۆتكەشكە توغرا كېلىدۇ، شۇڭا:

$$k(1)=1,\ \ k(n)=2k(n-1)+1.$$

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\begin{aligned}k(n)&=2^2k(n-2)+2+1\\&=2^3k(n-3)+2^2+2+1\\&=\cdots\\&=2^{n-1}k(1)+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1\\&=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1\\&=2^n-1.\end{aligned}$$

بۇ، 1 نى باش ئەزا، 2 نى ئومۇمىي نىسبەت قىلغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ-ئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىدىن ئىبارەت.

شۇنداق قىلىپ، $K(n)$ نىڭ تۆۋەندىكى فورمۇلىسىغا ئېرىشىمىز:

$$K(n)=K(n-2)+2^{n-1}.$$

$K(1)=1$، $K(2)=2$ بولغانلىقتىن، n جۈپ سان بولغاندا:

$$\begin{aligned}K(n)&=K(n-2)+2^{n-1}\\&=K(n-4)+2^{n-1}+2^{n-3}\\&=K(n-6)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}\\&=\cdots\\&=K(2)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^3\\&=2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^3+2\\&=\frac{2(1-2^n)}{1-2^2}\\&=\frac{1}{3}(2^{n+1}-2);\end{aligned}$$

بۇ، 2 نى باش ئەزا، 2^2 نى ئومۇمىي نىسبەت قىلغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئار-قىلىقىنىڭ ئالدىنقى $\frac{n}{2}$ ئەزاسى يىغىندىسىدىن ئىبارەت.

n تاق سان بولغاندا:

$$\begin{aligned}K(n)&=K(n-2)+2^{n-1}\\&=K(n-4)+2^{n-1}+2^{n-3}\\&=K(n-6)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}\\&=\cdots\\&=K(1)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^2\\&=2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^2+1\\&=\frac{2(1-2^{n+1})}{1-2^2}\\&=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1).\end{aligned}$$

بۇ، 1 نى باش ئەزا، 2^2 نى ئومۇمىي نىسبەت قىلغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئار-قىلىقىنىڭ ئالدىنقى $\frac{n+1}{2}$ ئەزاسى يىغىندىسىدىن ئىبارەت.

شۇنىڭ بىلەن $K(9)=\frac{1}{3}(2^{9+1}-1)=341$ بولىدۇ.

شۇڭا، توققۇز ھالقىنى ئاجرىتىۋېلىشتا كەم دېگەندە 341 قېتىم ھالقا يۆتكەشكە توغرا كېلىدۇ.

2.5 ـ كۆنۈكمە

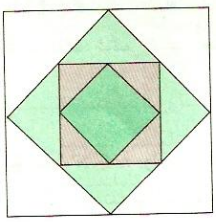
A گۇرۇپپا

1. تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا:

(1) $a_1=-1$، $a_4=64$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، q بىلەن S_4 نى تېپىڭ؛

(2) $a_3=\frac{3}{2}$، $S_3=\frac{9}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، a_1 بىلەن q نى تېپىڭ.

2. مەلۇم كارخانىنىڭ بۇلتۇرقى ئىشلەپچىقىرىش قىممىتى 1 مىليون 380 مىڭ يۈەن بولۇپ، ئۇلار بۇنىڭدىن كېيىنكى 5 يىل ئىچىدە ئىشلەپچىقىرىش قىممىتىنى ھەر يىلى ئالدىنقى بىر يىلدىكىگە قارىغاندا %10 ئاشۇرۇشنى پىلانلىغان بولسا، بۇ 5 يىلدىكى ئومۇمىي ئىشلەپچىقىرىش قىممىتى قانچىلىك بولىدۇ؟



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 2cm بولغان بىر كۋادرات سىزىلىپ، بۇ كۋادراتنىڭ ھەرقايسى تەرەپلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىلىرىنى تۇتاشتۇرۇش ئارقىلىق ئىككىنچى بىر كۋادرات، ئاندىن مۇشۇ بويىچە داۋاملاشتۇرۇپ جەمئىي 10 دانە كۋادرات سىزىلغان بولسا، تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

(1) 10 ـنچى كۋادراتنىڭ يۈزى؛

(2) بۇ 10 دانە كۋادرات يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى.

4. يىغىندىنى تېپىڭ:

(1) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$;

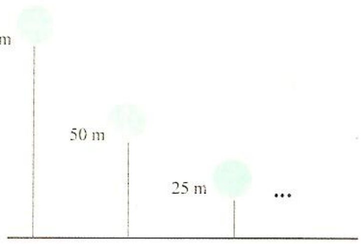
(2) $(2-3\times5^{-1})+(4-3\times5^{-2})+\cdots+(2n-3\times5^{-n})$;

(3) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

5. بىر توپ 100m ئېگىزلىكتىكى ئورۇندىن ئەركىن چۈشۈپ، ھەر قېتىم يەرگە چۈشكەندىن كېيىن ئەسلىدىكى ئېگىزلىكنىڭ يېرىمىغىچە قاڭقىپ چىقىپ يەنە يەرگە چۈشكەن.

(1) بۇ توپ 10 ـنچى قېتىم يەرگە چۈشكەندە، بېسىپ ئۆتكەن مۇساپىسى جەمئىي قانچىلىك بولىدۇ؟

(2) بۇ پومزەك قانچىنچى قېتىم يەرگە چۈشكەندە، بېسىپ ئۆتكەن مۇساپىسى جەمئىي 293.75m بولىدۇ؟



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

6. S_n تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى بولۇپ، S_3، S_9، S_6 لار تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلىدىغانلىقى بېرىلگەن، a_2، a_8، a_5 نىڭمۇ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

1. تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ: ئەگەر $a \neq b$ ھەمدە a، b لار 0 گە تەڭ بولمىسا، ئۇ ھالدا

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b},$$

بۇنىڭدا $n \in \mathbf{N}^*$ بولۇپ، a،b لار نۆل بولمىغان تۇراقلىق سان ھەمدە $a \neq b$.

(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسى S_n ئىكەنلىكى بېرىلگەن، S_7، $S_{14} - S_7$، $S_{21} - S_{14}$ نىڭمۇ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

3. ماتېرىياللاردا كۆرسىتىلىشىچە، 2000 ـ يىلى مەملىكىتىمىزدىكى سانائەت ئەخلىتى 7.4×10^8t غا يەتكەن بولۇپ، ھەربىر توننىسى $1\,m^2$ مېتىر يەرنى ئىگىلىگەن. مۇھىت ئاسراش تارماقلىرى ھەر 1t كېرەكسىز ماددىي ئەشيانى يىغىۋالسا ياكى بىر تەرەپ قىلسا، 4t سانائەت ئەخلىتىنى يوقاتقانغا باراۋەر كېلىدۇ. ئەگەر مۇھىت ئاسراش تارماقلىرى 2002 ـ يىلى جەمئىي 100t كېرەكسىز ماددىي ئەشيانى يىغىۋېلىپ بىر تەرەپ قىلغان بولسا ھەمدە ئۇنىڭدىن كېيىنكى ھەربىر يىلدىكى يىغىۋېلىش مىقدارى 20% ئېشىپ بارسا:

(1) 2010 ـ يىلغا بارغاندا قانچە تونna كېرەكسىز ماددىي ئەشيا يىغىۋالىدۇ (1t غىچە ئېنىقلىقتا)؟

(2) 2002 ـ يىلدىن 2010 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىغىچە، قانچە m^2 يەرنى تېجەپ قالغىلى بولىدۇ ($1m^2$ غىچە ئېنىقلىقتا)؟

4. ئۆز رايونىڭىزدىكى مائارىپ ئامانىتىگە دائىر ئۇچۇرلارنى توپلاپ، تۆۋەندىكى مەسىلىلەرنى مۇلاھىزە قىلىڭ:

(1) مائارىپ ئامانىتى شەكلى بويىچە، ئېيىغا 50 يۈەندىن ئۇدا 3 يىل ئامانەت قويۇپ، قەرەلى (3 يىل) توشقاندا ياكى 6 يىل بولغاندا، بىر قېتىمدىلا جەمئىي قانچە يۈەن دەسمايە ۋە ئۆسۈم ئېلىشقا بولىدۇ؟

(2) مائارىپ ئامانىتى شەكلى بويىچە، ئېيىغا a يۈەندىن ئۇدا 3 يىل ئامانەت قويۇپ، قەرەلى (3 يىل) توشقاندا ياكى 6 يىل بولغاندا، بىر قېتىمدىلا جەمئىي قانچە يۈەن دەسمايە ۋە ئۆسۈم ئېلىشقا بولىدۇ؟

(3) مائارىپ ئامانىتى شەكلى بويىچە، ئېيىغا 50 يۈەندىن ئۇدا 3 يىل ئامانەت قويۇپ، قەرەلى (3 يىل) توشقاندا بىر قېتىمدىلا ئالىدىغان دەسمايە ۋە ئۆسۈم ئوخشاش دەرىجە تەرتىپىدىكى «پارچە قويۇپ توپ ئېلىش» قا قارىغاندا قانچە يۈەن ئارتۇق بولىدۇ؟

(4) 3 يىلدىن كېيىن بىر قېتىمدىلا ئالىدىغان مائارىپ ئامانىتىنىڭ دەسمايە ۋە ئۆسۈمىنى جەمئىي 10 مىڭ يۈەن قىلىش ئۈچۈن، ئېيىغا قانچە يۈەن ئامانەت قويۇش كېرەك؟

(5) 3 يىلدىن كېيىن بىر قېتىمدىلا ئالىدىغان مائارىپ ئامانىتىنىڭ دەسمايە ۋە ئۆسۈمىنى جەمئىي a مىڭ يۈەن قىلىش ئۈچۈن، ئېيىغا قانچە يۈەن ئامانەت قويۇش كېرەك؟

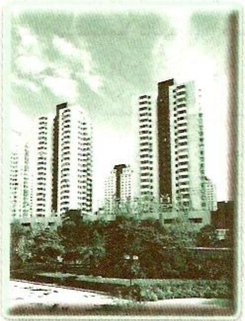
(6) بىر ئوقۇغۇچى ئەسلىدە مائارىپ ئامانىتى شەكلى بويىچە ئېيىغا 100 يۈەندىن ئۇدا 6 يىل ئامانەت قويماقچى بولغان، لېكىن 4 يىل بولغاندا، ئۇ بارلىق دەسمايە ۋە ئۆسۈمنى مۇددەتتىن بۇرۇن ئالماقچى بولغان بولسا، بىر قېتىمدىلا جەمئىي قانچە يۈەن دەسمايە ۋە ئۆسۈم ئالالايدۇ؟

(7) بىر ئوقۇغۇچى ئەسلىدە مائارىپ ئامانىتى شەكلى بويىچە ئېيىغا a يۈەندىن ئۇدا 6 يىل ئامانەت قويماقچى بولغان، لېكىن b يىل بولغاندا، ئۇ بارلىق دەسمايە ۋە ئۆسۈمنى مۇددەتتىن بۇرۇن ئالماقچى بولغان بولسا، بىر قېتىمدىلا جەمئىي قانچە يۈەن دەسمايە ۋە ئۆسۈم ئالالايدۇ؟

(8) مائارىپ ئامانىتىدىن باشقا ئامانەت شەكلىنى قوللىنىپ، ئېيىغا 100 يۈەندىن 6 يىل قويغاندىن كېيىن دەسمايە ۋە ئۆسۈم ئېلىشنى مىسال قىلىپ، هازىر يولغا قويۇلۇۋاتقان ئۆسۈم نىسبىتىنىڭ ئۆلچىمى بويىچە مۇمكىن بولىدىغان ئەڭ چوڭ پايدىنى مۇھاكىمە قىلىڭ ھەمدە كېلىپ چىققان نەتىجە بىلەن مائارىپ ئامانىتىدىكى نەتىجىنى سېلىشتۇرۇڭ.

5. ئۆي سېتىۋېلىش مەسىلىسى: مەلۇم بىر ئائىلىدىكىلەر 2010 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىدا 400 مىڭ يۈەن خەجلەپ بىر يۈرۈش تاۋار ئۆي سېتىۋالماقچى بولغان، بۇنىڭ ئۈچۈن، ئۇلار 2004 ـ يىلىنىڭ بېشىدىن باشلاپ، ھەر يىلىنىڭ بېشىدا مەلۇم ساندىكى ئۆي سېتىۋېلىش پۇلىنى ئامانەت قويۇپ، بۇ پۇلنى 2010 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىغا بارغاندا دەسمايە ۋە ئۆسۈمنى قوشۇپ جەمئىي 400 مىڭ يۈەنگە يەتكۈزۈشنى پىلانلىغان. ئەگەر ھەر يىلى ئامانەت قويغان پۇل سانى ئوخشاش، يىللىق ئۆسۈم 2% بولۇپ، ئۆسۈم قوش ئۆسۈم شەكلى بويىچە ھېسابلانسا، يىلىغا قانچە پۇل ئامانەت قويۇش كېرەك؟

ئۆي سېتىۋېلىشتىكى ماتېماتىكا



سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئەمەلىي تۇرمۇشتا ناھايىتى كەڭ قوللىنىلىدۇ، مەسىلەن، كىشىلەر پۇل قەرز ئېلىش، پۇل ئامانەت قويۇش، ئۆي سېتىۋېلىش، نەرسىلەرنى سېتىۋېلىش قاتارلىق ئىقتىسادىي تۇرمۇشدا سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا دائىر بىلىملەرنى كۆپلەپ قوللىنىدۇ. مەلۇم جايدىكى بىر ئادەم ئائىلىسىنىڭ ئولتۇراق ئۆي شارائىتىنى ياخشىلاش ئۈچۈن، 2003 - يىلى يېڭىدىن ئۆي سېتىۋېلىشنى قارار قىلغان. بىر كۈنى ئۇ بىر ئۆي - جاي سودا بازىرىغا كېلىپ، ئۆي - زېمىن سودىگەرلىرىنىڭ خىلمۇخىل تەشۋىقات ئېلانلىرىنى كۆردى، ئەمما ئۇ تاۋار ئۆي سېتىۋېلىش ياكى نىمكەش ئۆي سېتىۋېلىش توغرىسىدا بىر قارارغا كېلەلمىدى.

بۇ ئادەم تەكشۈرۈش ئارقىلىق بەزىبىر تۈرلۈك ئۇچۇرلارنى توپلىدى، ئاندىن ئائىلىسىنىڭ ئىقتىسادىي ئەھۋالى ۋە تاللاش لايىھىلىرىنى جەدۋەلگە يېزىپ، مۇتەخەسسىسلەردىن مەسلىھەت ئالماقچى بولدى.

ئائىلىنىڭ ئىقتىسادىي ئەھۋالى	ئائىلىنىڭ ھەر ئايلىق ئومۇمىي كىرىمى 3000 يۈەن، يەنى يىللىق كىرىمى 36 مىڭ يۈەن، ھازىر 60 مىڭ يۈەن ئامانەت پۇل بار، لېكىن چوقۇم 20 ~ 30 مىڭ يۈەننى جىددىي لازىملىق ئۈچۈن ساقلاپ قويۇش كېرەك.
تاللاش لايىھىلىرى	1. تاۋار ئۆي سېتىۋېلىش: كۆلىمى $80m^2$ كېلىدىغان بىر يۈرۈش ئۆي، ھەر كۋادرات مېتىرىنىڭ سېتىلىش باھاسى 1500 يۈەن.
	2. نىمكەش ئۆي سېتىۋېلىش: كۆلىمى $110m^2$ ئەتراپىدا بولغان بىر يۈرۈش نىمكەش ئۆي، سېتىلىش باھا 142 مىڭ يۈەن، دەسلەپتە 40 مىڭ يۈەن تۆلەش تەلەپ قىلىنىدۇ.

ئۆي سېتىۋېلىشتا يەنە قەرز ئېلىشقا توغرا كېلىدۇ. بۇ ئادەم بىر بانكىنى تاللاپ ئۆي سېتىۋېلىش قەرز پۇلى ئېلىشنى ئىلتىماس قىلغان، بۇ بانكىنىڭ قەرز پۇل بېرىشنى باھالىغۇچى خادىمى جەدۋەلدىكى ئۇچۇرلارغا ئاساسەن ئۇنىڭغا تۆۋەندىكى ئۇچۇر ۋە تەكلىپلەرنى بەرگەن:

سودا قەرز پۇلى ئىلتىماس قىلىش، بۇنىڭدا قەرز پۇل مۇددىتى 15 يىل بولسا بىرقەدەر مۇۋاپىق بولىدۇ، ئۇنىڭ يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى %5.04. ئۆي سېتىۋېلىشتا دەسلەپ تۆلەيدىغان پۇل ئەمەلىي ئۆي سېتىۋېلىش ئومۇمىي سوممىسىنىڭ %20 ىدىن تۆۋەن بولماسلىقى، قەرز پۇل ئېلىش سوممىسى ئەمەلىي ئۆي سېتىۋېلىش ئومۇمىي سوممىسىنىڭ %80 ىدىن يۇقىرى بولماسلىقى كېرەك. قەرز پۇل تەڭ سوممىلىق دەسمايە بويىچە قايتۇرۇلىدۇ، ئەگەر قەرز پۇل پەسىل بويىچە قايتۇرۇلسا، ھەر پەسىلدە قايتۇرۇلىدىغان پۇل سوممىسىنى دەسمايە قىسمى بىلەن ئۆسۈم قىسمى دەپ ئىككىگە ئايرىشقا بولىدۇ، ئۇنى ھېسابلاش فورمۇلىسى:

قەز پۇل مۇددىتىنىڭ پەسىل سانى ÷ قەرز پۇل دەسمايىسى = دەسمايە قىسمى,

پەسىللىك ئۆسۈم نىسبىتى × (قايتۇرۇپ بولغان قەرز پۇل دەسمايىسىنىڭ جۇغلانمىسى - قەرز پۇل دەسمايىسى) = ئۆسۈم قىسمى.

ساۋاقداشلار بۇنىڭدىن كېيىن مۇشۇنداق مەسىلىلەرگە دۇچ كېلىشى مۇمكىن. ھازىر، ئۆ-

2 ـ باب

گىنىپ ئۆتكەن سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا دائىر بىلىملىرىمىزدىن پايدىلىنىپ بۇ ئادەمنىڭ ئۆي سېتىۋېلىش ھېساباتىنى ھېسابلىشىغا ياردەملىشەيلى. يۇقىرىدىكى ئۆي سېتىۋېلىش قەرز پۇلى ئېلىش شەكلىگە ئاساسلانغاندا، سىزنىڭچە بۇ ئادەم 1 ـ، 2 ـ لايىھەلەرنىڭ قايسىسىنى تاللىسا ئەڭ ياخشى بولىدۇ؟ ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن پىكىر ئالماشتۇرۇڭ، ئاندىن ئۇنىڭغا بىر پارچە خەت يېزىپ تەكلىپىڭىزنى بايان قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

گېزىت ياكى ئىنتېرنېت توردىن ئۆي ـ زېمىن ۋە ئۆي سېتىۋېلىش قەرز پۇلى ئېلىشقا دائىر ماتېرىياللارنى ئىزدەپ رەتلىسىڭىز بولىدۇ، يەنە ئوقۇتقۇچىڭىزدىن سورىسىڭىز ياكى مۇناسىۋەتلىك ئورگانلارغا بېرىپ مەسلىھەت ئالسىڭىز بولىدۇ.

پايدىلىنىش ماتېرىيالى

1. قەرز پۇل ئېلىپ ئۆي سېتىۋالغاندا، ئۆي سېتىۋالغۇچى ئاۋۋال ئۆي ـ زېمىن تەرەققىياتى سودىگىرى بىلەن ئۆي سېتىۋېلىش توختامى، ئاندىن بانكا بىلەن قەرز پۇل ئېلىش توختامى ئىمزالاپ، ئاندىن بانكىغا بۇ ئۆينى رەنىگە قويۇپ پۇل قەرز ئېلىش ئىلتىماسى سۇنىدۇ. بانكا ئۆي سېتىۋالغۇچىنىڭ ئىلتىماسىنى تەكشۈرۈپ تەستىقلىغاندىن كېيىن، ئادەتتە تۇرالغۇ ئۆي ئومۇمىي قىممىتىنىڭ %70 ياكى %80 نى ئۆي ـ زېمىن تەرەققىياتى سودىگىرىگە بىۋاسىتە ئۆتكۈزۈپ بېرىدۇ. بۇ ۋاقىتتا، ئۆي سېتىۋالغۇچى تۇرالغۇ ئۆي ئومۇمىي قىممىتىنىڭ %30 ياكى %20 ى (ئادەتتە تۇنجى قەرەللىك ئۆي پۇلى دەپ ئاتىلىدۇ) نى تۆلەپلا يېڭى ئۆيگە كۆچۈپ كىرىدۇ ـ دە، قالغان پۇلنى بەلگىلىك ئۆسۈم نىسبىتى بويىچە ئايمۇئاي بانكىغا قايتۇرىدۇ، قايتۇرۇش مۇددىتى قىسقا بولغاندا 3 ~ 5 يىل، ئۇزاق بولغاندا 15 يىل، 20 يىل، ھەتتا 30 يىلمۇ بولىدۇ.

2. كونا ئۆيلەر ئادەتتە ئىككەش ئۆي دېيىلىدۇ. يېڭى سېلىنغان تاۋار ئۆيلەر بىرىنچى قېتىملىق سودىدا «يېڭى ئۆي»، ئىككىنچى قېتىملىق سودىدا «ئىككەش ئۆي» دەپ ئاتىلىدۇ. ئىككەش ئۆي قەرز پۇلى دېگىنىمىز ئىككەش ئۆي سېتىۋالغۇچىنى قەرز پۇل بىلەن تەمىنلىگەندىن كېيىن، قەرز ئالغۇچى مۇددەتكە بۆلۈپ قەرز قايتۇرىدىغان قەرز پۇل ئېلىش شەكلىدىن ئىبارەت.

3. نۆۋەتتىكى ئۆي سېتىۋېلىش قەرز پۇلى ئېلىشتا ئۈچ خىل قەرز پۇل شەكلىنى قوللىنىشقا بولىدۇ: سودا قەرز پۇلى، جامائەت فوندى قەرز پۇلى ۋە سودا ـ جامائەت فوندى بىرلەشمە قەرز پۇلى. سودا قەرز پۇلىنىڭ 1 ~ 5 يىل ئارىلىقىدىكى ئايلىق ئۆسۈم نىسبىتى %0.3975، يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى %4.77؛ 6 ~ 20 يىل ئارىلىقىدىكى ئايلىق ئۆسۈم نىسبىتى %0.425، يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى %5.04. جامائەت فوندى قەرز پۇلىنىڭ 1 ~ 5 يىل ئارىلىقىدىكى ئايلىق ئۆسۈم نىسبىتى %0.3، يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى %3.6؛ 6 ~ 20 يىل ئارىلىقىدىكى ئايلىق ئۆسۈم نىسبىتى %0.3375، يىللىق ئۆسۈم نىسبىتى %4.05.

4. بانكىنىڭ بەلگىلىمىسى بويىچە، نۆۋەتتە: (1) تەڭ سوممىلىق دەسمايە ـ ئۆسۈم قايتۇرۇش ئۇسۇلى؛ (2) تەڭ سوممىلىق دەسمايە قايتۇرۇش ئۇسۇلىدىن ئىبارەت ئىككى خىل پۇل قايتۇرۇش شەكلى يولغا قويۇلماقتا. تەڭ سوممىلىق دەسمايە قايتۇرۇش ئۇسۇلىنىڭ مۇنداق ئالاھىدە تەرەپلىرى بار: ھەربىر قەرەلدە قايتۇرۇلىدىغان پۇل تەدرىجىي ئازىيىپ بارىدۇ، ئومۇمىي ئۆسۈم چىقىمى تەڭ سوممىلىق دەسمايە ـ ئۆسۈم قايتۇرۇش ئۇسۇلىدىكىدىن ئاز بولىدۇ. بۇ خىل پۇل قايتۇرۇش شەكلى 1999 ـ يىل 1 ـ ئايدا رەسمىي مەيدانغا كېلىپ، بانكىلاردا تەدرىجىي قوللىنىلىشقا باشلىدى. تەڭ سوممىلىق دەسمايە قايتۇرۇش ئۇسۇلىدا پۇل ھەر ئايدا بىر قېتىم ياكى ھەر پەسىلدە بىر قېتىم قايتۇرۇلسىمۇ بولىۋېرىدۇ. لېكىن، بانكىلارنىڭ ئۆسۈم ھېسابلاش رەسىم ـ قائىدىسى بويىچە ئادەتتە ھەر پەسىلدە بىر قېتىم قايتۇرۇش شەكلى قوللىنىلىدۇ.

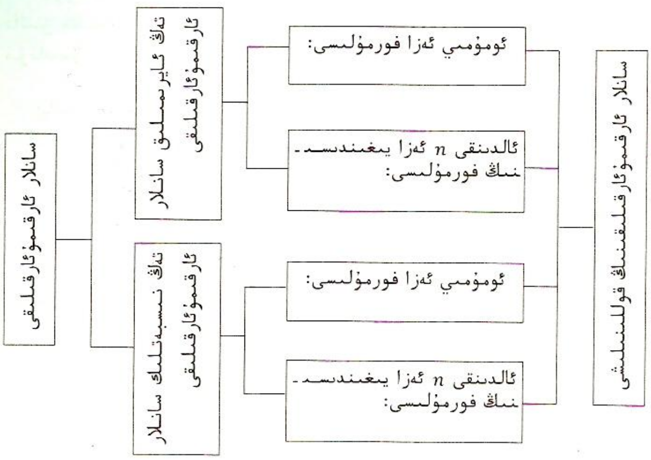
5. دۆلەت ئىچى ۋە سىرتىدىكى ئىقتىسادشۇناسلار ئائىلە ئىقتىسادىي كىرىمىنى تەقسىملەش مەقسىدە تۆۋەندىكىدەك پايدىلىنىش ئۆلچىمىنى ئوتتۇرىغا قويغان: ئائىلە كىرىمىنىڭ %30 ى ئۆي سېتىۋېلىش قەرز پۇلىنى قايتۇرۇشقا، %30 ى پۇل ئامانەت قويۇشقا، %20ى پەرزەنت تەربىيىلەشكە، %20 ى كۈندىلىك تۇرمۇش خىراجىتىگە ئىشلىتىلىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئۆي سېتىۋېلىش قەرز پۇلى قايتۇرۇش سوممىسى ئائىلە ئومۇمىي كىرىمىنىڭ %20 ~ %30 نى ئىگىلىسە مۇۋاپىق بولىدۇ.

CHAPTER

خۇلاسە

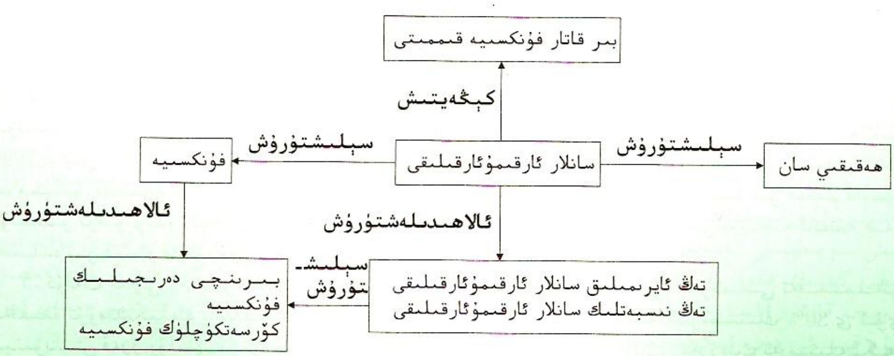
Ⅰ بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى

رامكىدىكى فورمۇلىنى تولۇقلاڭلار.



Ⅱ ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى رېئال دۇنيانىڭ ھەممىلا يېرىدە مەۋجۇت، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا دائىر ئەمەلىي مىسالدىن بىرقانچىنى ئوتتۇرىغا قويالامسىز؟ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ئەمەلىيەتتە ئېنىقلىنىش ساھەسى مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمى $\mathbf{N}^*$ (ياكى ئۇنىڭ چەكلىك قىسمىي توپلىمى $\{1,2,\ldots,n\}$) بولغان فۇنكسىيىنىڭ ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار كىچىكتىن چوڭغا قاراپ تەرتىپ بويىچە قىممەت ئالغاندىكى ماس بىر قاتار فۇنكسىيە قىممىتىدىن ئىبارەت. سىز سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى فۇنكسىيە نۇقتىسىدىن چۈشىنەلەمسىز؟ سىز سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى ئۆگىنىش بىلەن ھەقىقىي سانلارنى ئۆگىنىش ئارىسىدىكى ئوخشاشلىق ۋە ئوخشىماسلىقنى ھېس قىلالامسىز؟



2. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ n ىنچى ئەزاسى a_n بىلەن تەرتىپ نومۇرى n ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەتنى تەسۋىرلەپ بېرىدۇ، ئۇنى ئىپادە $a_n=f(n)$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ گرافىكى بىر قاتار تەنها (ئاجرالغان) نۇقتا $(n, f(n))$ دىن تەركىب تاپقان شەكىلدىن ئىبارەت. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بىلەن تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى ئايرىم ـ ئايرىم قانداق فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەتنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ؟ ئۇلارنىڭ گرافىكى ئايرىم ـ ئايرىم قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟

3. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بىلەن تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئۆزىگە خاس خۇسۇسىيىتىگە ئاساسەن، بۇ ئىككى خىل سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بىلەن تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسىنى ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟ خالىغان سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ غا نىسبەتەن، S_n بىلەن a_n ئارىسىدا تۆۋەندىكىدەك مۇناسىۋەت مەۋجۇت بولىدۇ:

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n>1).\end{cases}$$

سىزنىڭچە بۇ فورمۇلا سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىغا دائىر مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا قانداق رول ئوينايدۇ؟

4. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، بولۇپمۇ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بىلەن تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى قىزىقارلىق ھەم كۆپ ئەسقاتىدىغان ماتېماتىكا بىلىمى بولۇپ، فىزىكا، خىمىيە، بىئولوگىيە قاتارلىق پەنلەردە ھەمدە ئىقتىساد، ئاسترونومىيە، كالېندارچىلىق قاتارلىق ساھەلەرنىڭ ھەممىسىدە ئۇلارنى ئۇچراتقىلى بولىدۇ. بۇ بابنى ئۆگىنىشنىڭ تۇرمۇشىڭىز ۋە ئۆگىنىشىڭىزگە قانداق ياردىمى بولغانلىقىنى سۆزلەپ بېقىڭ.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ.

(1) $a_1=1$ ، $d=3$ ئارقىلىق ئېنىقلانغان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا، $a_n=298$ بولغاندىكى تەرتىپ نومۇرى ( ) $n=$ بولىدۇ.

(A) 99.   (B) 100.   (C) 96.   (D) 101.

(2) بىر ھەرە كۆنىكىدە 1 ھەسەل ھەرىسى بار بولۇپ، 1 ـ كۈنى ئۇ ئۇچۇپ چىقىپ 5 دوست تېپىپ كەلدى؛ 2 ـ كۈنى 6 ھەسەل ھەرىسى ئۇچۇپ چىقىپ ھەربىرى 5 دوست تېپىپ كەلدى ... ئەگەر بۇ دوست تېپىش جەريانى داۋاملىشىۋەرسە، 6 ـ كۈنى بارلىق ھەسەل ھەرىلىرى كۆنىكىگە قايتقاندىن كېيىن، ھەرە كۆنىكىدە جەمئىي ( ) ھەسەل ھەرىسى بار بولىدۇ.

(A) 55986.   (B) 46656.   (C) 216.   (D) 36.

(3) نوپۇسنىڭ ئۆزگىرىش يۈزلىنىشىنى مۆلچەرلەشتە كۆپ خىل ئۇسۇللار بار، «بىۋاستە كەلتۈرۈپ چىقىرىش ئۇسۇلى» دا ئىشلىتىلىدىغان فورمۇلا $P_n=P_0(1+k)^n(k>-1)$ بولۇپ، بۇنىڭدا P_n مۆلچەرلەش مەزگىلىدىكى نوپۇس سانىنى، P_0 دەسلەپكى مەزگىلدىكى نوپۇس سانىنى، k مۆلچەرلەش مەزگىلىدىكى يىللىق ئېشىش نىسبىتىنى، n مۆلچەرلەش مەزگىلىدىكى يىل ئارىلىقىنى ئىپادىلەيدۇ. ئەگەر مەلۇم بىر مەزگىلدە $-1<k<0$ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ مەزگىلدە نوپۇس سانى ( ).

(A) يۇقىرى ئۆرلەش يۈزلىنىشىدە بولىدۇ.   (B) تۆۋەنلەش يۈزلىنىشىدە بولىدۇ.

(C) تەۋرەنمە ھالدا ئۆزگىرىدۇ.   (D) ئۆزگەرمەيدۇ.

(4) «رىند پاپىرۇس قەغىزى» (Rhind Papyrus) دۇنيادىكى ئەڭ قەدىمكى ماتېماتىكا ئەسەرلىرىنىڭ بىرى بولۇپ، ئۇنىڭدا مۇنداق بىر مەسىلە بار: 100 دانە بولكىنى 5 ئادەمگە بۆلۈپ بەرگەندە، ھەربىر ئادەمگە تېگىدىغان بولكا سانلىرى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلسا ھەمدە چوڭراق ئۈچ ئۈلۈشىنىڭ يىغىندىسىنىڭ $\frac{1}{7}$ ى كىچىكرەك ئىككى ئۈلۈشىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولسا، ئەڭ كىچىك بىر ئۈلۈشى ( ) بولۇشى كېرەك.

(A) $\frac{5}{3}$.   (B) $\frac{10}{3}$.   (C) $\frac{5}{6}$.   (D) $\frac{11}{6}$.

2. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ بىر ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىڭ، ئۇنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسى ئايرىم ـ ئايرىم تۆۋەندىكى سانلار بولسۇن:

(1) $\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16}$;   (2) $1+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{3}{4^2},\ 1+\frac{5}{6^2},\ 1-\frac{7}{8^2}$;

(3) 7, 77, 777, 7777;   (4) $0,\ \sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$.

3. تۆۋەندىكى 4 سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىغا ئاساسەن، ئۇلارنىڭ گرافىكىنى ئايرىم ـ ئايرىم سىزىڭ:

(1) $a_n=-\frac{n}{4}$;   (2) $b_n=\frac{2^n}{3}$;   (3) $c_n=\frac{2n+1}{n}$;   (4) $d_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

4. a، b، c ئۈچ سان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلىدۇ، بۇنىڭدا $a=5+2\sqrt{6}$، $c=5-2\sqrt{6}$ بولسا، b قانچىگە تەڭ بولىدۇ؟ ئەگەر a، b، c لار تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلىسچۇ؟

5. مەلۇم ساۋاقداش بىر كومپيۇتېر پروگراممىسى لايىھىلەپ، ئۇنىڭدىن پايدىلىنىپ بىر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنى تاپماقچى بولدى.

```
sum = 0
i = 1
INPUT n
WHILE     i <= n
an = 4*3^i
sum = sum + an
PRINT  i, an
PRINT  i, sum
i = i + 1
WEND
END
```

$n=5$ بولغاندا، an نىڭ بارلىق چىقىرىلغان قىممەتلىرىنى تەرتىپ بويىچە يېزىپ چىقىڭ؛ $n=15$ بولغاندا، sum نىڭ ئەڭ ئاخىرقى بىر چىقىرىلغان قىممىتى قانچە بولىدۇ (پروگراممىنى كومپيۇتېردا ئىجرا قىلىشنىڭ ھاجىتى يوق)؟

6. بەشىنچى قېتىملىق مەملىكەتلىك نوپۇس تەكشۈرۈش نەتىجىسىگە ئاساسلانغاندا، 2000 - يىل 11 - ئاينىڭ 1 - كۈنىگىچە، بېيجىڭ شەھىرىنىڭ دائىم تۇرۇشلۇق ئومۇمىي نوپۇس سانى 13 مىليون 819 مىڭ بولغان. ئەگەر 2001 - يىلىنىڭ بېشىدىن باشلاپ، بېيجىڭ شەھىرى پۈتۈن شەھەر نوپۇسىنىڭ يىللىق ئېشىش نىسبىتىنى 0.13% ئىچىدە كونترول قىلسا، 2008 - يىلى ئولىمپىك تەنھەرىكەت يىغىنى ئۆتكۈزۈلگەندە (يىل ئاخىرىغىچە ھېسابلىنىدۇ)، بېيجىڭ شەھىرىنىڭ دائىم تۇرۇشلۇق نوپۇس سانى ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچىلىك بولىدۇ؟

7. مەلۇم شەھەردىكى بىر سودا سارىيىنىڭ يېڭى يىللىق سېتىشنى تېزلىتىش مۇكاپاتىدا ئىككى خىل مۇكاپات شەكلى تەسىس قىلىنغان بولۇپ، مۇكاپاتقا ئېرىشكۈچى 2000 يۈەنلىك مۇكاپات پۇلىنى تاللىسا ياكى 12 - ئاينىڭ 20 - كۈنىدىن ئىككىنچى يىل 1 - ئاينىڭ 1 - كۈنىگىچە ھەر كۈنى شۇ سودا سارىيىغا كېلىپ مۇكاپات بۇيۇمى ئالسا بولىدۇ. 1 ىنچى كۈنى ئالىدىغان مۇكاپات بۇيۇمىنىڭ قىممىتى 100 يۈەن، 2 ىنچى كۈنىدىكىسىنىڭ 110 يۈەن بولۇپ، كېيىن كۈنىگە 10 يۈەندىن ئېشىپ بارىدۇ. سىزنىڭچە مۇكاپاتقا ئېرىشكۈچى قايسى خىل مۇكاپات شەكلىدە تېخىمۇ كۆپ پايدىغا ئېرىشەلەيدۇ؟

8. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا، ئەگەر $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$ بولسا، ئۇ ھالدا a_2+a_8 قانچىگە تەڭ بولىدۇ؟

9. مەلۇم ئوتتۇرا مەكتەپتىكى «ئۈمىد قورۇلۇشى» غا ئىئانە توپلاش گۇرۇپپىسى يازلىق تەتىل مەزگىلىدە كوچىغا چىقىپ بىر قېتىملىق ئىئانە توپلاش پائالىيىتى ئېلىپ بېرىپ، جەمئىي 1200 يۈەن ئىئانە توپلىغان. ئۇلار 1 ىنچى كۈنى پەقەت 10 يۈەنلا توپلىغان، ئۇنىڭدىن كېيىن ئاكتىپ تەدبىر قوللىنىپ، 2 ىنچى كۈنىدىن باشلاپ ھەر 1 كۈنى ئالدىنقى 1 كۈنىدىكىگە قارىغاندا 10 يۈەن ئارتۇق توپلىغان بولسا، بۇ قېتىمقى ئىئانە توپلاش پائالىيىتى جەمئىي قانچە كۈن داۋاملاشقان؟

10. ئومۇمىي ئايرىمىسى d بولغان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا، $S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n$،

$S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$ ، $S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$ دەپ پەرەز قىلىپ، S_1 ، S_2 ، S_3 نىڭمۇ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ ھەمدە ئۇنىڭ ئوموٌمىي ئايرىمىسىنى تېپىڭ.

11. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولۇپ، $a_1=f(x+1)$ ، $a_2=0$ ، $a_3=f(x-1)$ ، بۇنىڭدىكى $f(x)=x^2-4x+2$ بولسا، ئوموٌمىي ئەزا فورمۇلىسى a_n نى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ.

(1) تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ھەرقايسى ئەزالىرى مۇسبەت سان ھەمدە $a_5a_6+a_4a_7=18$ بولسا، ئۇ ھالدا $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=(\quad)$ بولىدۇ.

(A) 12. (B) 10. (C) 8. (D) $2+\log_35$.

(2) تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسى، ئالدىنقى $2n$ ئەزاسى، ئالدىنقى $3n$ ئەزاسىنىڭ يىغىندىسى ئايرىم - ئايرىم A ، B ، C بولسا، ئۇ ھالدا ( ) بولىدۇ.

(A) $A+B=C$. (B) $B^2=AC$. (C) $(A+B)-C=B^2$. (D) $A^2+B^2=A(B+C)$.

2. نۆل بولمىغان ھەقىقىي سان a ، b ، c لار بىرلا ۋاقىتتا ئۆزئارا تەڭ بولۇپ كەتمەيدۇ.

(1) ئەگەر a ، b ، c تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلسا، $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلامدۇ؟ بۇنى فۇنكسىيە گرافىكىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

(2) ئەگەر a ، b ، c تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلسا، $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى ھاسىل قىلامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

3. كاربون (Ⅳ) ئوكسىد مىقدارى ھەر 25% ئاشسا، يەر شارىنىڭ تېمپېراتۇرىسى ئوتتۇرا ھېساب بىلەن 0.5℃ ئۆرلەيدۇ. نۆۋەتتە كاربون (Ⅳ) ئوكسىدنىڭ ئاتموسفېرادىكى ھەجىم كەسىر سانى 0.033، ماسسا كەسىر سانى 0.05. ئالىملارنىڭ مۆلچەرلىشىچە: ئەگەر يەر شارى سىرتقى يۈزى تېمپېراتۇرىسىنىڭ ئۆرلىشى ھازىرقى سۈرئەت بويىچە داۋاملاشسا، 2050 ـ يىلىغا بارغاندا پۈتكۈل يەر شارى تېمپېراتۇرىسى 3℃ ئەتراپىدا ئۆرلەيدۇ. شۇ چاغقا بارغاندا، كاربون (Ⅳ) ئوكسىدنىڭ ئاتموسفېرادىكى ھەجىم كەسىر سانى بىلەن ماسسا كەسىر سانى ئايرىم ـ ئايرىم تەخمىنەن قانچە بولىدۇ؟

4. مەلۇم ئوقۇغۇچى يازلىق تەتىلدە بىر سودا سارىيىدا ئىشلىدى. بۇ سودا سارىيى ئۇنىڭغا ئۈچ خىل ئىش ھەققى بېرىش لايىھىسىنى كۆرسەتتى: بىرىنچى خىلى، كۈنىگە 38 يۈەن بېرىش؛ ئىككىنچى خىلى، بىرىنچى كۈنى 4 يۈەن، ئىككىنچى كۈنى 8 يۈەن، ئۈچىنچى كۈنى 12 يۈەن بېرىپ، مۇشۇ بويىچە داۋاملاشتۇرۇش؛ ئۈچىنچى خىلى، بىرىنچى كۈنى 0.4 يۈەن بېرىپ، كېيىن ھەر كۈنى ئالدىنقى بىر كۈنىدىكىدىن بىر ھەسسە ئارتۇق بېرىش. بۇ ئوقۇغۇچىنىڭ ئەڭ ياخشى بىر لايىھىنى تاللىشىغا ياردەملىشىڭ.

5. قورۇما تاللاش مەسىلىسى: مەكتەپ ئاشخانىسىدا تاماق يەيدىغان ئوقۇغۇچىلار سانى 500 نەپەر بولۇپ، ئاشخانا ھەر دۈشەنبە كۈنى A ، B ئىككى خىل قورۇما تەييارلايدۇ. ئالاقىدار ماتېرىياللارنى تەكشۈرۈشتىن مەلۇم بولۇشىچە، مۇشۇ دۈشەنبە كۈنى A قورۇمىنى تاللىغانلارنىڭ 20% ى كېلەر دۈشەنبە كۈنى B قورۇمىنى تاللايدۇ؛ B قورۇمىنى تاللىغانلارنىڭ 30% ى كېلەر دۈشەنبە كۈنى A قورۇمىنى تاللايدۇ. n ىنچى دۈشەنبە كۈنى A قورۇمىنى تاللىغانلارنىڭ سانى ۋە B قورۇمىنى تاللىغانلارنىڭ سانىنى ئايرىم ـ ئايرىم a_n ، b_n بىلەن ئىپادىلەپ، $a_1=300$ بولغاندىكى a_{10} نىڭ قىممە-

تىنى تېپىڭ.

6. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا، $a_1=5$ ، $a_2=2$ ، $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}(n\geqslant 3)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى ئۈستىدە تەتقىقات ئېلىپ بېرىڭ، ئۇنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يېزىپ چىقىشقا بولامدۇ؟

7. مەلۇم سۈت فېرمىسىنىڭ 2002 ـ يىلىنىڭ بېشىدا 10 مىليون يۈەن مەبلىغى بار ئىدى، ئىلغار ئىشلەپچىقىرىش ئۈسكۈنىلىرىنى كىرگۈزگەنلىكتىن، مەبلەغنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتى 50% كە يېتىدىغان بولدى. ھەر يىلنىڭ ئاخىرىدا كېلەر يىلنىڭ ئىستېمال فوندى تۇتۇپ قېلىنغاندىن كېيىن، قالغان مەبلەغ يەنە تەكرار ئىشلەپچىقىرىشقا سېلىنغان بولسا، بۇ سۈت فېرمىسى ھەر يىلى قانچىلىك ئىستېمال فوندىنى تۇتۇپ قالغاندا ئاندىن 5 يىلدىن كېيىن مەبلەغنى 20 مىليون يۈەنگە يەتكۈزەلەيدۇ (10 مىڭ يۈەنگىچە ئېنىقلىقتا)؟

3 - باب. تەڭسىزلىك

1-3 تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتى ۋە تەڭسىزلىك

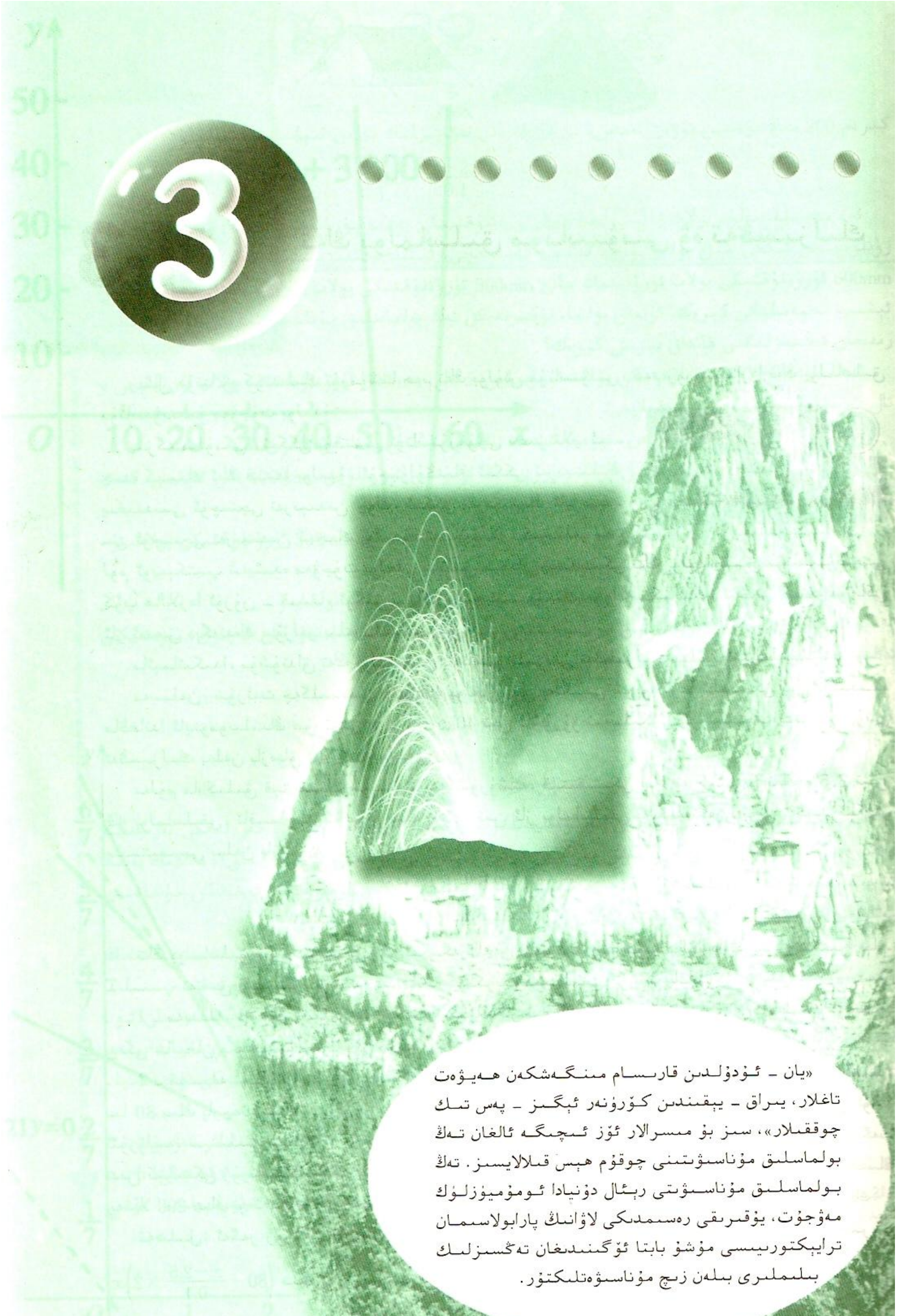
2-3 بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك ۋە ئۇنى يېشىش ئۇسۇلى

3-3 ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) ۋە ئاددىي سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسى

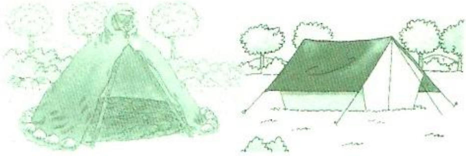
4-3 ئاساسىي تەڭسىزلىك: $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$

خۇددى تەڭ مىقدارلار مۇناسىۋىتىگە ئوخشاش، تەڭ بولمىغان مىقدارلار مۇناسىۋىتىمۇ تەبىئەت دۇنياسىدىكى ئاساسىي سانلىق مۇناسىۋەت ھېسابلىنىدۇ. ئۇلار رېئال دۇنيا ۋە كۈندىلىك تۇرمۇشتا كەڭ مەۋجۇت بولۇپ، ماتېماتىكا تەتقىقاتى ۋە قوللىنىلىشىدىمۇ مۇھىم رول ئوينايدۇ.

بۇ بابتا، تەڭسىزلىككە دائىر بەزى ئاساسىي بىلىملەرنى ئۆگىنىمىز. تەڭسىزلىكنىڭ مول ئەمەلىي ئارقا كۆرۈنۈشى ئارقىلىق تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) نى چۈشىنىپ، تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتى بىلەن تەڭسىزلىكنىڭ مەنىسى ۋە قىممىتىنى ھېس قىلىمىز؛ ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) بىلەن تەكشىلىك ساھەسىنىڭ مۇناسىۋىتىنى چۈشىنىمىز؛ ئاددىي سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىلىرىنى گېئومېترىيىنىڭ ياردىمىدە كۆرسەتمىلىك ھالدا ھەل قىلىمىز؛ تەڭسىزلىك ئىسپاتلاشنى ئاساسىي تەڭسىزلىك ئارقىلىق چۈشىنىپ، ئەڭ چوڭ (كىچىك) قىممەتكە دائىر بەزى ئاددىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىمىز؛ تەڭسىزلىك بىلەن فۇنكسىيە ۋە تەڭلىمىنىڭ باغلىنىشى ئارقىلىق، ماتېماتىكىدىكى ھەرقايسى قىسىم مەزمۇنلار ئارىسىدىكى باغلىنىشقا بولغان تونۇشىمىزنى يۇقىرى كۆتۈرىمىز.



«يان ـ ئۈدۈلدىن قارىسام مىنگەشكەن ھەيۋەت تاغلار، يىراق ـ يېقىندىن كۆرۈنەر ئېگىز ـ پەس تىك چوققىلار»، سىز بۇ مىسرالار ئۆز ئىچىگە ئالغان تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى چوقۇم ھېس قىلالايسىز. تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتى رېئال دۇنيادا ئومۇميۈزلۈك مەۋجۇت، يۇقىرىقى رەسىمدىكى لاۋانىڭ پارابولاسىمان ترايېكتورىيىسى مۇشۇ بابتا ئۆگىنىدىغان تەڭسىزلىك بىلىملىرى بىلەن زىچ مۇناسىۋەتلىكتۇر.



1-3 تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتى ۋە تەڭسىزلىك

رېئال دۇنيا ۋە كۈندىلىك تۇرمۇشتا ھەم تەڭ بولۇش مۇناسىۋىتى، ھەم زور مىقداردا تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىمۇ مەۋجۇت بولىدۇ.

بىزگە مەلۇمكى، ئىككى نۇقتىنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىقلار ئىچىدە كېسىك ئەڭ قىسقا بولىدۇ، ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپىنىڭ يىغىندىسى ئۈچىنچى تەرىپىدىن چوڭ، ئىككى تەرىپىنىڭ ئايرىمىسى ئۈچىنچى تەرىپىدىن كىچىك بولىدۇ، ۋە باشقىلار. كىشىلەر مەلۇم ئوبيېكتىپ شەيئىدە مەۋجۇت بولغان سانلىق مىقدار جەھەتتىكى تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى كۆپ ھاللاردا ئۇزۇن ـ قىسقا، ئېگىز ـ پاكار، ئېغىر ـ يېنىك، چوڭ ـ كىچىك، ئېشىپ كەتمەيدۇ ياكى ئاز ئەمەس دېگەندەك سۆزلەر بىلەن ئىپادىلەيدۇ.

ماتېماتىكىدا، مۇشۇنداق تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرىنى تەڭسىزلىك بىلەن ئىپادىلەيمىز.

مەسىلەن، سۈرئەت چەكلىمىسى 40km/h بولغان يول بەلگىسى شوپۇرلارغا ئالدىدىكى يول بۆلىكىدە ماڭغاندا ئاپتوموبىلنىڭ سۈرئىتى v نى 40km/h تىن ئاشۇرۇۋەتمەسلىكنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ، بۇنى تەڭسىزلىك بىلەن يازساق $v \leqslant 40$ بولىدۇ.

مەلۇم ماركىلىق قېتىقنىڭ سۈپىتىنى تەكشۈرۈشتە، قېتىقتىكى ياغ تەركىبى f نىڭ 2.5% تىن ئاز بولماسلىقى، ئاقسىل تەركىبى p نىڭ 2.3% تىن ئاز بولماسلىقى بەلگىلەنگەن، بۇنى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى بىلەن يازساق:

$$\begin{cases} f \geqslant 2.5\%, \\ P \geqslant 2.3\%. \end{cases}$$

تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان مەسىلىلەرنى كۆپ ھاللاردا تەكسىزلىكتىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىمىز. تۆۋەندە بىرقانچە كونكرېت مەسىلىنى كۆرۈپ باقايلى.

1 ـ مەسىلە. A نۇقتا بىلەن α تەكشىلىكنىڭ ئارىلىقى d بولۇپ، B نۇقتا α تەكشىلىك ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا بولسا، ئۇ ھالدا $d \leqslant |AB|$ بولىدۇ.

2 ـ مەسىلە. مەلۇم خىل ژۇرنالنىڭ يەككە باھاسى 2.5 يۈەن بولۇپ، ئۇ مۇشۇ باھا بويىچە سېتىلسا 80 مىڭ پارچە سېتىلاتتى. بازار تەكشۈرۈشكە ئاساسلانغاندا، ئەگەر يەككە باھاسى ھەر 0.1 يۈەن ئۆستۈرۈلسە، سېتىلىش مىقدارى ماس ھالدا 2000 پارچە كېمىيىشى مۇمكىن. ئەگەر باھاسى ئۆستۈرۈلگەندىن كېيىنكى ژۇرنالنىڭ يەككە باھاسىنى x يۈەن دەپ پەرەز قىلساق، سېتىشتىكى ئومۇمي كىرىمنىڭ يەنىلا 200 مىڭ يۈەندىن تۆۋەن ئەمەس ئىكەنلىكىنى تەڭسىزلىك ئارقىلىق قانداق ئىپادىلەش كېرەك؟

تەھلىل: ئەگەر ژۇرنالنىڭ يەككە باھاسى x يۈەن بولسا، ئۇ ھالدا سېتىشتىكى ئومۇمي كىرىم $\left(80 - \frac{x-2.5}{0.1} \times 2\right)x$ مىڭ يۈەن بولىدۇ. بۇ چاغدا تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتى «سېتىشتىكى ئومۇمي

كىرىم 200 مىڭ يۈەندىن تۆۋەن ئەمەس» نى تۆۋەندىكى تەڭسىزلىك بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\left(80-\frac{x-2.5}{0.1}\times 2\right)x\geqslant 200.$$

3 ـ مەسىلە. مەلۇم پولات زاۋۇتى 4000mm ئۇزۇنلۇقتىكى پولات تۇرۇبىنى 500mm ۋە 600mm ئۇزۇنلۇقتىكى ئىككى خىل پولات تۇرۇبا قىلىپ كەسمەكچى. ئىشلەپچىقىرىشنىڭ تەلىپىگە ئاساسەن، 600mm ئۇزۇنلۇقتىكى پولات تۇرۇبىنىڭ سانى 500mm ئۇزۇنلۇقتىكى پولات تۇرۇبىنىڭ 3 ھەسسىسىدىن ئېشىپ كەتمەسلىكى كېرەك. ئۇنداق بولسا، يۇقىرىدىكى تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرىنى قانائەتلەندۈرىدىغان تەڭسىزلىكنى قانداق يېزىش كېرەك؟

تەھلىل: 500mm ئۇزۇنلۇقتىكى پولات تۇرۇبىدىن x تال، 600mm ئۇزۇنلۇقتىكى پولات تۇرۇبىدىن y تال كېسىۋېلىنغان دەپ پەرەز قىلايلى.

مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، تۆۋەندىكىدەك تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرى بار:

(1) كېسىۋېلىنغان ئىككى خىل پولات تۇرۇبىنىڭ ئومۇمىي ئۇزۇنلۇقى 4000mm دىن ئېشىپ كەتمەيدۇ؛

(2) كېسىۋېلىنغان 600mm ئۇزۇنلۇقتىكى پولات تۇرۇبىنىڭ سانى 500mm ئۇزۇنلۇقتىكى پولات تۇرۇبا سانىنىڭ 3 ھەسسىسىدىن ئېشىپ كەتمەيدۇ؛

(3) كېسىۋېلىنغان ئىككى خىل پولات تۇرۇبىنىڭ سانى مەنپىي سان بولمايدۇ.

يۇقىرىدىكى ئۈچ تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى بىرلا ۋاقىتتا قانائەتلەندۈرۈش ئۈچۈن، تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسىنى تۈزسەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}500x+600y\leqslant 4\ 000;\\ 3x\geqslant y;\\ x\geqslant 0;\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

بىز تەڭلىكنىڭ بەزىبىر ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرىنى، مەسىلەن، «تەڭلىكنىڭ ھەر ئىككى تەرىپىگە (ياكى ھەر ئىككى تەرىپىدىن) ئوخشاش بىر سان (ياكى ئىپادە) نى قوشساق (ياكى ئالساق)، تەڭلىك يەنىلا كۈچكە ئىگە بولىدۇ» غانلىقىنى بىلىمىز. ئۇنداق بولسا، تەڭسىزلىكمۇ مۇشۇنىڭغا ئوخشاش خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگىمۇ؟

تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى تەڭسىزلىكتىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش ئۈچۈن، تەڭسىزلىكنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى بىلىشىمىز كېرەك.

بىزگە مەلۇمكى، ھەقىقىي سانلارنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇشقا بولىدۇ. ئەگەر سان ئوقىدىكى ئوخشاش بولمىغان A، B ئىككى نۇقتا ئايرىم ـ ئايرىم ئوخشاش بولمىغان ھەقىقىي سان a بىلەن b غا ماس كەلسە، ئۇ ھالدا ئوڭ تەرەپتىكى نۇقتا ئىپادىلىگەن ھەقىقىي سان سول تەرەپتىكى نۇقتا ئىپادىلىگەن ھەقىقىي ساندىن چوڭ بولىدۇ.

ھەقىقىي سان a، b نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇشتا، تۆۋەندىكىدەك پاكىتلار مەۋجۇت:

ئەگەر $a-b$ مۇسبەت سان بولسا، ئۇ ھالدا $a>b$ بولىدۇ؛ ئەگەر $a-b$ نۆلگە تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا $a=b$ بولىدۇ؛ ئەگەر $a-b$ مەنپىي سان بولسا، ئۇ ھالدا $a<b$ بولىدۇ. ئەكسىچە بولغاندىمۇ توغرا بولىدۇ. بۇنى ئۇنداق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

يۇقىرىدىكى «$\Leftrightarrow$» بەلگە «تەڭ كۈچلۈك» دېگەن مەنىنى، يەنى ئىككى تەرەپنى ئۆز ئارا كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدىغانلىقىنى بىلدۈرىدۇ. يۇقىرىقى خۇسۇسىيەتلەردىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئىككى ھەقىقىي ساننىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇشتا، بۇ ئىككى ھەقىقىي ساننىڭ ئايرىمىسىنى تەكشۈرسەك بولىدۇ. بۇ، تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنى تەتقىق قىلىشىمىزنىڭ بىر چىقىش نۇقتىسى ھېسابلىنىدۇ.

تەڭسىزلىك تۆۋەندىكى خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاشقا بولىدۇ:

1 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b$ بولسا، ئۇ ھالدا $b<a$ بولىدۇ؛ ئەگەر $b<a$ بولسا، ئۇ ھالدا $a>b$ بولىدۇ. يەنى

$$a>b \Leftrightarrow b<a.$$

2 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b$، $b>c$ بولسا، ئۇ ھالدا $a>c$ بولىدۇ. يەنى

$$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c.$$

يۇقىرىقى ئىككى خۇسۇسىيەتتىن يەنە تەڭسىزلىكنىڭ تۆۋەندىكى خۇسۇسىيىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$c<b, b<a \Rightarrow c<a.$$

سان ئوقىدىكى A، B ئىككى نۇقتىنى بىرلا ۋاقىتتا ئوخشاش يۆنىلىش بويىچە تەڭ ئارىلىقتا يۆتكىسەك، باشقا ئىككى نۇقتا A_1 ۋە B_1 گە ئېرىشىمىز، بۇ چاغدا A بىلەن B ۋە A_1 بىلەن B_1 نىڭ ئوڭ ـ سول ئورۇن مۇناسىۋىتىدە ئۆزگىرىش بولمايدۇ. بۇنى تەڭسىزلىك تىلى بىلەن بايان قىلساق، تەڭسىزلىكنىڭ تۆۋەندىكى خۇسۇسىيىتىگە ئېرىشىمىز.

3 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b$ بولسا، ئۇ ھالدا $a+c>b+c$ بولىدۇ.

دېمەك، تەڭسىزلىكنىڭ ھەر ئىككى تەرىپىگە ئوخشاش بىر ھەقىقىي ساننى قوشساق، كېلىپ چىققان تەڭسىزلىك بىلەن ئەسلىي تەڭسىزلىك بىر خىل يۆنىلىشلىك بولىدۇ.

3 ـ خۇسۇسىيەتتىن تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$a+b>c \Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b) \Rightarrow a>c-b.$$

ئومۇمەن، تەڭسىزلىكتىكى ھەرقانداق بىر ئەزانىڭ ئالامىتىنى ئۆزگەرتكەندىن كېيىن، ئۇنى تەڭسىزلىكنىڭ يەنە بىر تەرىپىگە يۆتكەشكە بولىدۇ.

4 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b$، $c>0$ بولسا، ئۇ ھالدا $ac>bc$ بولىدۇ؛ ئەگەر $a>b$، $c<0$ بولسا، ئۇ ھالدا $ac<bc$ بولىدۇ.

5 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b$، $c>d$ بولسا، ئۇ ھالدا $a+c>b+d$ بولىدۇ.

(5) خۇسۇسىيەت شۇنى چۈشەندۈرىدۇكى، بىر خىل يۆنىلىشلىك ئىككى تەڭسىزلىكنى ئۆز ئارا قوشساق، كېلىپ چىققان تەڭسىزلىك بىلەن ئەسلىي تەڭسىزلىك بىر خىل يۆنىلىشلىك بولىدۇ.

6 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b>0$، $c>d>0$ بولسا، ئۇ ھالدا $ac>bd$ بولىدۇ.

(6) خۇسۇسىيەت شۇنى چۈشەندۈرىدۇكى، ھەر ئىككى تەرىپى مۇسبەت سان بولغان بىر خىل يۆنىلىشلىك تەڭسىزلىكلەرنى ئۆز ئارا كۆپەيتسەك، كېلىپ چىققان تەڭسىزلىك بىلەن ئەسلىي تەڭسىزلىك بىر خىل يۆنىلىشلىك بولىدۇ.

7 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b>0$ بولسا، ئۇ ھالدا $a^n>b^n$، ($n \geqslant 2$، $n \in \mathbf{N}$) بولىدۇ.

(7) خۇسۇسىيەت شۇنى چۈشەندۈرىدۇكى، تەڭسىزلىكنىڭ ھەر ئىككى تەرىپى مۇسبەت سان بولغاندا، تەڭسىزلىكنىڭ ھەر ئىككى تەرىپىنى بىرلا ۋاقىتتا دەرىجىگە كۆتۈرسەك، كېلىپ چىققان تەڭسىزلىك بىلەن ئەسلىي تەڭسىزلىك بىر خىل يۆنىلىشلىك بولىدۇ.

8 ـ خۇسۇسىيەت: ئەگەر $a>b>0$ **بولسا، ئۇ هالدا** $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ، $(n\geqslant 2$ ، $n\in \mathbf{N})$ **بولىدۇ.**

(8) خۇسۇسىيەت شۇنى چۈشەندۈرىدۇكى، تەڭسىزلىكنىڭ هەر ئىككى تەرىپى مۇسبەت سان بولغاندا، تەڭسىزلىكنىڭ هەر ئىككى تەرىپىگە نىسبەتەن بىرلا ۋاقىتتا يىلتىز چىقىرىش ئەمەلىنى بېجىرسەك، كېلىپ چىققان تەڭسىزلىك بىلەن ئەسلىي تەڭسىزلىك بىر خىل يۆنىلىشلىك بولىدۇ.

يۇقىرىدىكى تەڭسىزلىككە دائىر پاكىت ۋە خۇسۇسىيەتلەر تەڭسىزلىك مەسىلىلىرىنى هەل قىلىشنىڭ ئاساسى هېسابلىنىدۇ.

1 ـ مىسال. $a>b>0$ ، $c<0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$ نى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات: چۈنكى $a>b>0$ ، شۇڭا $ab>0$ ، $\frac{1}{ab}>0$.

بۇنىڭ بىلەن

$$a\times \frac{1}{ab}>b\times \frac{1}{ab},$$

يەنى

$$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}.$$

$c<0$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}.$$

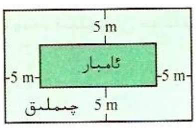
مەشىق

1. تۆۋەندىكى تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرىنى تەڭسىزلىكتىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ:

(1) a بىلەن b نىڭ يىغىندىسى مەنپىي بولمىغان سان؛

(2) مەلۇم تاشيولدىكى ئۆتۈشمە كۆۋرۈكنىڭ ئاپتوموبىللارنىڭ ئېگىزلىكى h قا بولغان «ئېگىزلىك چەكلىمىسى 4m»؛

(3) رەسىمدىكىدەك، يۈزى $350\mathrm{m}^2$ بولغان تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك يەرگە بىر ئامبار سېلىنىپ، ئەتراپى چىملىق قىلىنغان. ئامبارنىڭ ئۇزۇنلۇقى L كەڭلىكى W نىڭ 4 هەسسىسىدىن چوڭ بولىدۇ.



1(3) ـ مىسال ئۈچۈن

2. 50 تىن چوڭ، 60 تىن كىچىك ئىككى خانىلىق بىر ساننىڭ بىرلەر خانىسىدىكى سانى ئونلار خانىسىدىكى ساندىن 2 چوڭ. بۇ مۇناسىۋەتنى تەڭسىزلىكتىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ هەمدە بۇ ئىككى خانىلىق سانى تېپىڭ (بۇ ئىككى خانىلىق ساننىڭ ئونلار خانىسىدىكى سان بىلەن بىرلەر خانىسىدىكى سانىنى ئايرىم ـ ئايرىم a ۋە b بىلەن ئىپادىلەڭ).

3. بوش ئورۇنغا تەڭسىزلىك بەلگىسى «$>$» ياكى «$<$» نى تولدۇرۇڭ:

(1) $a>b,\ c<d\Rightarrow a-c$ ____ $b-d$;

(2) $a>b>0,\ c<d<0\Rightarrow ac$ ____ bd;

(3) $a>b>0\Rightarrow \sqrt[3]{a}$ ____ $\sqrt[3]{b}$;

(4) $a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a^2}$ ____ $\frac{1}{b^2}$.

CHAPTER

1.3 ـ كۆنۈكمە

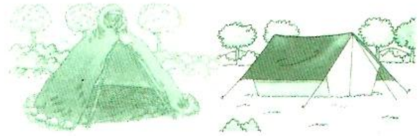
A گۇرۇپپا

1. ئەمەلىي تۇرمۇشتىكى تەڭسىزلىك بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولغان مىسالدىن بىرقانچىنى كەلتۈرۈڭ.

2. ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى ساننىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $2+\sqrt[3]{7}$, 4;　　　　(2) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$, $\sqrt{3}+\sqrt{14}$.

3. $x>0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ نى ئىسپاتلاڭ.



4. مەلۇم يازلىق لاگېردا 48 ئادەم بار بولۇپ، ئۇلار يولغا چىقىشتىن بۇرۇن A، B ئىككى خىل تىپلىق چېدىردىن بىر خىلىنى تاللىشى كېرەك، A تىپلىق چېدىر B تىپلىق چېدىردىن 5 دانە ئاز. پەقەت A تىپلىق چېدىرنىلا تاللىغاندا، ھەربىر چېدىردا 4 تىن ئادەم تۇرسا، چېدىر يېتىشمەيدۇ؛ ھەربىر چېدىردا 5 تىن ئادەم تۇرسا، بىر چېدىر تۇشماي قالىدۇ. پەقەت B تىپلىق چېدىرنىلا تاللىغاندا، ھەربىر چېدىردا 3 تىن ئادەم تۇرسا، چېدىر يېتىشمەيدۇ؛ ھەربىر چېدىردا 4 تىن ئادەم تۇرسا، چېدىر ئېشىپ قالىدۇ. A تىپلىق چېدىردىن x دانە بار دەپ پەرەز قىلىپ، مىسالدىكى تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرىنى تەڭسىزلىكتىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ.

5. مەلۇم شەھەرنىڭ مۇھىت ئاسراش ئىدارىسى شەھەرنىڭ كۆكەرتىلگەن يەر مەيدانىنى ئاشۇرۇش ئۈچۈن، ئىككى خىل مەبلەغ سېلىش لايىھەسىنى ئوتتۇرىغا قويدى: A لايىھەدىكىسى بىر قېتىمدىلا 5 مىليون يۈەن مەبلەغ سېلىش؛ B لايىھەدىكىسى بىرىنچى يىلى 50 مىڭ يۈەن مەبلەغ سېلىپ، كېيىن ھەر يىلى ئالدىنقى بىر يىلدىكىدىن 100 مىڭ يۈەن ئاشۇرۇپ مەبلەغ سېلىشتىن ئىبارەت. «n يىل ئۆتكەندىن كېيىن، B لايىھەدە سېلىنغان مەبلەغ A لايىھەدە سېلىنغان مەبلەغدىن كەم بولمايدۇ» غانلىقىنى تەڭسىزلىك تۈزۈپ ئىپادىلەڭ.

B گۇرۇپپا

1. ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى ئالگېبرالىق ئىپادىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) x^2+5x+6, $2x^2+5x+9$;　　　　(2) $(x-3)^2$, $(x-2)(x-4)$;

(3) $x>1$ بولغاندىكى x^3 بىلەن x^3-x+1 نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى؛

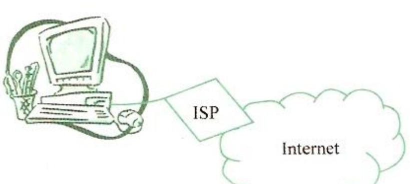
(4) x^2+y^2+1, $2(x+y-1)$.

2. $a>b>0$، $c>d>0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$ نى ئىسپاتلاڭ.

3. پويىز ئىستانسىسىدا مەلۇم شىركەتنىڭ يۆتكەش ئالدىدىكى «ئا» خىل مېلىدىن 1530t، «ب» خىل مېلىدىن 1150t بار. ھازىر A، B ئىككى خىل تىپلىق ۋاگوندىن جەمئىي 50 نى ئىشلىتىپ بۇ ماللارنى يۆتكەش پىلانلانغان. ئەگەر 35t «ئا» خىل مال بىلەن 15t «ب» خىل مال A تىپلىق بىر ۋاگونغا؛ 25t «ئا» خىل مال بىلەن 35t «ب» خىل مال B تىپلىق بىر ۋاگونغا توشسا، مۇشۇنىڭغا ئاساسەن A، B ۋاگونلارنىڭ سانىنى ئورۇنلاشتۇرۇشتا جەمئىي قانچە خىل لايىھە بار؟ ئەگەر ھەربىر A تىپلىق ۋاگوننىڭ كىرا ھەققى 5000 يۈەن، ھەربىر B تىپلىق ۋاگوننىڭ كىرا ھەققى 8000 يۈەن بولسا، قايسى خىل لايىھەنىڭ كىرا ھەققى ئاز بولىدۇ؟

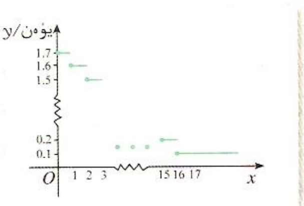
2-3 بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك ۋە ئۇنى يېشىش ئۇسۇلى

تورغا چىقىپ ئۇچۇر ئىگىلەش كىشىلەرنىڭ كۈندىلىك تۇرمۇشىنىڭ مۇھىم تەركىبىي قىسمى بولۇپ قالدى. ئىنتېرنېت مۇلازىمەت شىركىتى (Internet Service Provider) خېرىدارنىڭ كومپيۇتېرىنى ئىنتېرنېت تورىغا ئۇلاپ بېرىشكە مەسئۇل بولىدۇ، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، خېرىداردىن بەلگىلىك مىقداردا ھەق ئالىدۇ.



بىر ئوقۇغۇچى ئۆزىنىڭ كومپيۇتېرىنى ئىنتېرنېت تورىغا ئۇلىماقچى بولدى. ھازىر تاللاشقا بولىدىغان ئىككى ISP شىركىتى بار بولۇپ، A شىركەت سائىتىدە 1.5 يۈەن ھەق ئالىدۇ (1 سائەتكە توشمىسا 1 سائەت بويىچە ھېسابلىنىدۇ)؛ B شىركەتنىڭ ھەق ئېلىش پرىنسىپى 1.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك بولۇپ، بۇنىڭدا خېرىدار تورغا چىققان 1 ـ سائەت ئىچىدە (دەل 1 سائەتنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ، كېيىنكىلەرمۇ شۇنداق) 1.7 يۈەن، 2 ـ سائەت ئىچىدە 1.6 يۈەن ھەق ئېلىنىپ، كېيىن ھەربىر سائەتتىگە 0.1 يۈەن ئاز ئېلىنىدۇ (ئەگەر خېرىدارنىڭ بىر قېتىملىق تورغا چىققان ۋاقتى 17 سائەتتىن ئاشسا، 17 سائەت بويىچە ھەق ئېلىنىدۇ).

ئادەتتە، بىر قېتىملىق تورغا چىقىش ۋاقتى 17 سائەتتىن ئېشىپ كەتمەيدۇ، شۇڭا بىر قېتىملىق تورغا چىقىش ۋاقتىنى 17 سائەتتىن ئاز (كىچىك) دەپ پەرەز قىلساق، بىر قېتىملىق تورغا چىقىش ۋاقتى قانچە سائەت ئىچىدە بولغاندا A شىركەتنى تاللىغاندىكى تورغا چىقىش ھەققى B شىركەتنىڭكىدىن ئاز ياكى ئۇنىڭغا تەڭ بولىدۇ؟



1.2.3 ـ رەسىم

بۇ ئوقۇغۇچى بىر قېتىمدا x سائەت تورغا چىقىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا A شىركەت ئالىدىغان ھەق:

$$1.5x\text{(يۈەن)},$$

B شىركەت ئالىدىغان ھەق:

$$\frac{x(35-x)}{20}\text{(يۈەن)}.$$

ئەگەر A شىركەتنى تاللىغاندىكى تورغا چىقىش ھەققى B شىركەتنىڭكىدىن ئاز ياكى ئۇنىڭغا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا:

$$\frac{x(35-x)}{20}\geqslant 1.5x,$$

رەتلىسەك:

$$x^2-5x\leqslant 0. \quad ①$$

CHAPTER

بۇ، x كە دائىر بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك بولۇپ، ① تەڭسىزلىكنى قانائەتلەندۈرىدىغان يېشىملەر توپلىمىنى تاپساقلا، مەسىلىنىڭ جاۋابىغا ئېرىشىمىز.

پەقەت بىرلا نامەلۇم سانني ئۆز ئىچىگە ئالغان ھەمدە نامەلۇم ساننىڭ ئەڭ يۇقىرى دەرىجىسى 2 بولغان تەڭسىزلىكنى **بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك** دەپ ئاتايمىز.

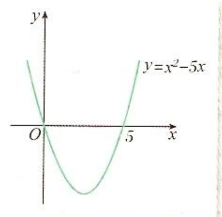
تەڭسىزلىك ① نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى قانداق تېپىش كېرەك؟

ئاۋۋال ئۇنىڭ بىلەن ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^2-5x$ ۋە بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە $x^2-5x=0$ نىڭ مۇناسىۋىتىنى كۆرۈپ ئۆتەيلى.

ئاسانلا بىلىشكە بولىدۇكى، تەڭلىمە $x^2-5x=0$ ئىككى ھەقىقىي يىلتىزغا ئىگە:

$$x_1=0,\ x_2=5.$$

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بىلەن ماس بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە يىلتىزىنىڭ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، $x_1=0$ ، $x_2=5$ ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^2-5x$ نىڭ نۆل نۇقتىسى بولىدۇ.



2.2.3 ـ رەسىم

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^2-5x$ نىڭ گرافىكىنى سىزايلى (2.2.3 ـ رەسىم). فۇنكسىيە گرافىكىنى كۆزىتىشتىن بىلىشكە بولىدۇكى، $x<0$ ياكى $x>5$ بولغاندا، فۇنكسىيە گرافىكى x ئوقىنىڭ يۇقىرى تەرىپىدە بولۇپ، بۇ چاغدا $y>0$، يەنى $x^2-5x>0$ بولىدۇ؛ $0<x<5$ بولغاندا، فۇنكسىيە گرافىكى x ئوقىنىڭ تۆۋەن تەرىپىدە بولۇپ، بۇ چاغدا $y<0$، يەنى $x^2-5x<0$ بولىدۇ. شۇڭا، بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك $x^2-5x\leqslant 0$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى:

$$\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 5\}.$$

فۇنكسىيە $y=x^2-5x$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىن خالىغان بىر $P(x,y)$ نۇقتىنى ئېلىپ، P نۇقتا پارابولا ئۈستىدە يۆتكەلگەندە، P نۇقتىنىڭ ئوردىناتى ئۇنىڭ ئابسىسساسىنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ قانداق ئۆزگىرىدىغانلىقىنى كۆزىتىڭ.

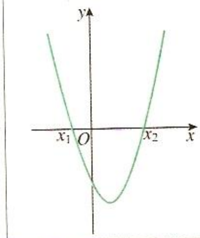
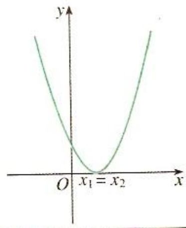
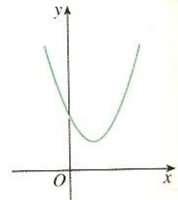
شۇنىڭ ئۈچۈن، بىر قېتىملىق تورغا چىقىش ۋاقتى 5 سائەت ئىچىدە (دەل 5 سائەتنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) بولغاندا، A شىركەتنى تاللىغاندىكى تورغا چىقىش ھەققى B شىركەتنىڭكىدىن ئاز ياكى ئۇنىڭغا تەڭ بولىدۇ؛ 5 سائەتتىن ئاشقاندا، B شىركەتنى تاللىغاندىكى تورغا چىقىش ھەققى ئاز بولىدۇ.

يۇقىرىقى ئۇسۇلنى ئادەتتىكى بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك $ax^2+bx+c>0$ ياكى $ax^2+bx+c<0(a>0)$ نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تېپىشقا كېڭەيتكىلى بولىدۇ. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئاۋۋال فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بىلەن ماس بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە يىلتىزىنىڭ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ يىلتىزىنى تېپىپ، ئاندىن فۇنكسىيە گرافىكى بىلەن x ئوقىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكنىڭ يېشىملەر توپلىمىنى ئېنىقلايمىز.

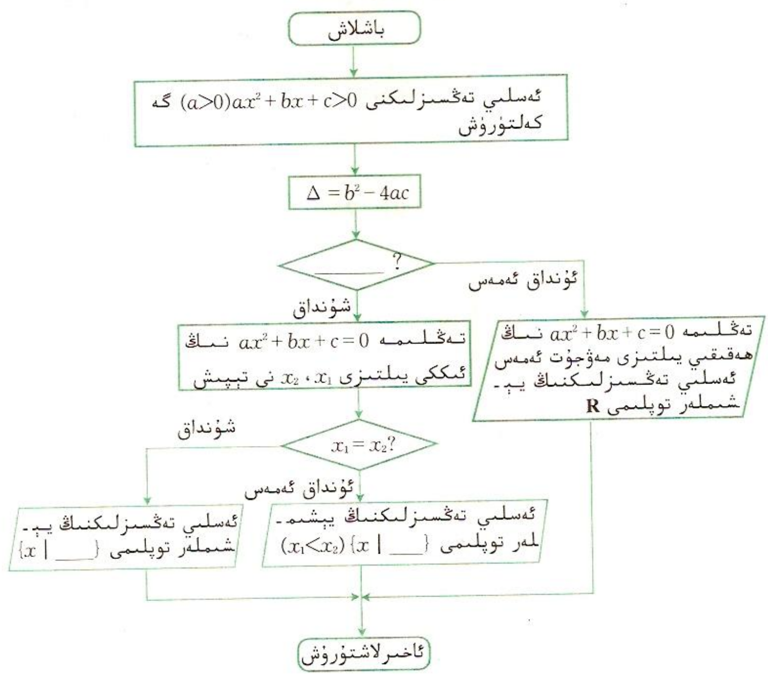
بىزگە مەلۇمكى، بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە $ax^2+bx+c=0(a>0)$ گە نىسبەتەن $\Delta=b^2-4ac$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇنىڭ يېشىمىنى $\Delta>0$ ، $\Delta=0$ ، $\Delta<0$ بولۇشىغا قاراپ ئۈچ خىل ئەھۋالغا ئايرىشقا بولىدۇ. بۇنىڭغا ماس ھالدا، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c(a>0)$ نىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنىمۇ ئۈچ خىل ئەھۋالغا ئايرىشقا بولىدۇ. شۇڭلاشقا، بىز ماس بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك $ax^2+bx+c>0(a>0)$ نىڭ يېشىملەر توپ-

3 ـ باب

ـلىمىنى ئۈچ خىل ئەھۋالغا ئايرىپ مۇھاكىمە قىلىمىز.
يۇقىرىدىكى ئۇسۇلغا ئاساسەن، تۆۋەندىكى جەدۋەلنى تولۇقلاڭ.

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$(a>0)y = ax^2 + bx + c$ نىڭ گرافىكى			
$(a>0)ax^2 + bx + c = 0$ نىڭ يىلتىزى			ھەقىقىي يىلتىزى مەۋجۇت ئەمەس
$(a>0)ax^2 + bx + c > 0$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى		$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	
$(a>0)ax^2 + bx + c < 0$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى		$\varnothing$	

تۆۋەندە ئادەتتىكى بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكنى يېشىش جەريانىنى پروگرامـ
ـا سخېمىسى بىلەن ئىپادىلەپ چىقتۇق، پروگراممىنىڭ ھۆكۈم قىلىش رامكىسى بىلەن بىر تەرەپ قىلىـ
ـش رامكىسىدىكى بوش ئورۇنلارنى ئۆزۈڭلار تولۇقلاپ بېقىڭلار.



1 ـ مىسال. تەڭسىزلىك $4x^2-4x+1>0$ نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تاپايلى.

يېشىش: كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى،

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant 0,$$

شۇڭا، ئەسلىي تەڭسىزلىكنىڭ يېشىملەر توپلىمى:

$$\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{2}\right\}.$$

2 ـ مىسال. تەڭسىزلىك $-x^2+2x-3>0$ نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تاپايلى.

يېشىش: تەڭسىزلىكنى تۆۋەندىكىدەك ئۆزگەرتىشكە بولىدۇ:

$$x^2-2x+3<0.$$

$\Delta=-8<0$ بولغانلىقتىن، تەڭلىمە $x^2-2x+3=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى مەۋجۇت ئەمەس، ئۇنىڭ ئۈستىگە، $y=x^2-2x+3$ نىڭ گرافىكى يۇقىرىغا قاراپ ئېچىلغانلىقتىن، ئەسلىي تەڭسىزلىكنىڭ يېشىملەر توپلىمى $\varnothing$ بولىدۇ.

❶ تورمۇزلىنىش ئارىلىقى دېگىنىمىز ئاپتوموبىلنىڭ تورمۇزلانغاندىن كېيىن ئىنېرتسىيىلىك كۈچى بىلەن ئالغا سىيرىلىش ئارىلىقىنى كۆرسىتىدۇ.

3 ـ مىسال. مەلۇم خىل ئاپتوموبىلنىڭ سېمونت يولدىكى تورمۇزلىنىش ئارىلىقى ❶ sm بىلەن ئاپتوموبىلنىڭ تېزلىكى x km/h ئارىسىدا تۆۋەندىكىدەك مۇناسىۋەت مەۋجۇت:

$$s=\frac{1}{20}x+\frac{1}{180}x^2.$$

بىر قېتىملىق قاتناش ھادىسىسىدە، بۇ خىل ئاپتوموبىلنىڭ تورمۇزلىنىش ئارىلىقى 39.5m دىن چوڭ ئىكەنلىكى ئۆلچەپ چىقىلغان بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئاپتوموبىلنىڭ تورمۇزلىنىشتىن ئىلگىرىكى تېزلىكى كەم دېگەندە قانچىلىك بولىدۇ (0.01km/h كىچە ئېنىقلىقتا)؟

يېشىش: بۇ ئاپتوموبىلنىڭ تورمۇزلىنىشتىن ئىلگىرىكى تېزلىكىنى كەم دېگەندە x km/h دەپ پەرەز قىلساق، مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن:

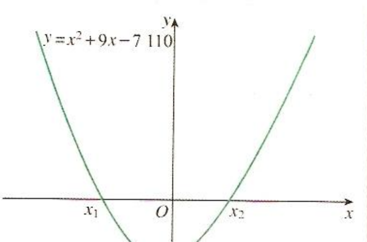
$$\frac{1}{20}x+\frac{1}{180}x^2>39.5.$$

ئەزالارنى يۆتكەپ رەتلىسەك:

$$x^2+9x-7\,110>0.$$

روشەنكى، $\Delta>0$ بولۇپ، تەڭلىمە $x^2+9x-7\,110=0$ ئىككى ھەقىقىي يىلتىزغا ئىگە، يەنى

$$x_1\approx-88.94,\ x_2\approx 79.94.$$



3.2.3 ـ رەسىم

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^2+9x-7\,110$ نىڭ گرافىكى (3.2.3 ـ رەسىم) نى سىزساق، گرافىكتىن تەڭسىزلىكنىڭ يېشىملەر توپلىمى تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىغا ئېرىشىمىز:

$$\{x\mid x<-88.94 \text{ ياكى } x>79.94\}.$$

بۇ ئەمەلىي مەسىلىدە $x>0$ بولغانلىقتىن، بۇ ئاپتوموبىلنىڭ تورمۇزلىنىشتىن ئىلگىرىكى تېزلىكى كەم دېگەندە 79.94km/h بولىدۇ.

4 ـ مىسال. بىر موتسىكلىت زاۋۇتى موتسىكلىتنى پۈتۈن قۇراشتۇرۇش ئاقما لىنىيىسىنى كىرگۈزدى. بۇ ئاقما لىنىيىدە ئىشلەپچىقىرىلغان موتسىكلىت سا-

3 ـ باب

نى x (دانە) بىلەن يارىتىلغان قىممەت y (يۈەن) ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت:

$$y=-2x^2+220x.$$

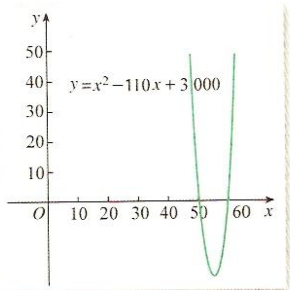
ئەگەر بۇ زاۋۇت مۇشۇ ئاقما لىنىيىدىن پايدىلىنىپ بىر ھەپتە ئىچىدە 6000 يۈەندىن يۇقىرى پايدا يا-
رىتىشنى ئۈمىد قىلسا، ئۇ ھالدا بۇ زاۋۇت بىر ھەپتە ئىچىدە تەخمىنەن قانچىلىك موتسىكلىت ئىشلەپ-
چىقىرىشى كېرەك؟

يېشىش: بىر ھەپتە ئىچىدە تەخمىنەن x دانە موتسىكلىت ئىشلەپچىقىرىشى كېرەك دەپ پەرەز قىل-
ساق، مىسال مەنىسىگە ئاساسەن:

$$-2x^2+220x>6000.$$

ئەزالارنى يۆتكەپ رەتلىسەك:

$$x^2-110x+3000<0.$$



4.2.3 ـ رەسىم

$\Delta=100>0$ بولغانلىقتىن، تەڭلىمە $x^2-110x+3000=0$ نىڭ
ئىككى ھەقىقىي يىلتىزغا ئىگە بولىدۇ:

$$x_1=50,\ x_2=60.$$

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^2-110x+3000$ نىڭ
گرافىكى (4.2.3 ـ رەسىم) دىن تەڭسىزلىكنىڭ يېشىملەر توپلىمى
تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىغا ئېرىشىمىز:

$$50<x<60.$$

x پەقەت پۈتۈن سانلىق قىممەت ئالىدىغانلىقتىن، بۇ ئاقما لى-
نىيىدە بىر ھەپتە ئىچىدە ئىشلەپچىقىرىلغان موتسىكلىت سانى 51
~ 59 ئارىلىقىدا بولغاندا، بۇ زاۋۇت 6000 يۈەندىن يۇقىرى پايدىغا
ئېرىشەلەيدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەرنىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تېپىڭ:

(1) $3x^2-7x\leqslant 10$; (2) $-2x^2+x-5<0$;

(3) $-x^2+4x-4<0$; (4) $x^2-x+\frac{1}{4}>0$;

(5) $-2x^2+x<-3$; (6) $12x^2-31x+20>0$;

(7) $3x^2+5x<0$.

2. ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x قايسى دائىرىدە قىممەت ئالغاندا، تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ قىممى-
تى 0 گە تەڭ بولىدۇ؟ 0 دىن چوڭ بولىدۇ؟ 0 دىن كىچىك بولىدۇ؟

(1) $y=3x^2-6x+2$; (2) $y=25-x^2$;

(3) $y=x^2+6x+10$; (4) $y=-3x^2+12x-12$.

2.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەرنىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تېپىڭ:

(1) $4x^2-4x>15$; (2) $13-4x^2>0$;

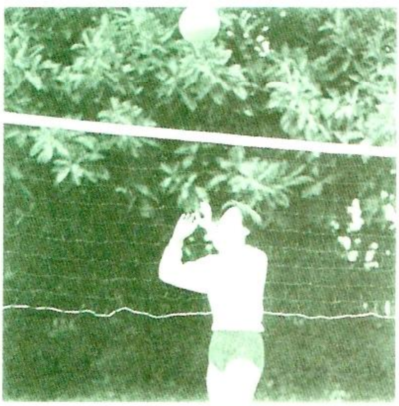
(3) $x^2-3x-10>0$; (4) $x(9-x)>0$.

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+9}$; (2) $y=\sqrt{-2x^2+12x-18}$.

3. ئەگەر x كە دائىر بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە $x^2-(m+1)x-m=0$ ئۆزئارا تەڭ بولمىغان ئىككى ھەقىقىي يىلتىزغا ئىگە بولسا، m نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

4. توپلام $A=\{x \mid x^2-16<0\}$، $B=\{x \mid x^2-4x+3>0\}$ بېرىلگەن، $A\cup B$ نى تېپىڭ.



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

5. بىر قېتىملىق تەنتەربىيە دەرسىدە، مەلۇم ئوقۇغۇچى بىر ۋالىبولنى دەسلەپكى تېزلىك $v_0=12\text{m/s}$ بىلەن تىك يۇقىرىغا ئاتتى. بۇ ۋالىبول ئېتىلىش نۇقتىسىدىن 2m دىن يۇقىرى ئورۇندا ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچىلىك ۋاقىت تۇرالايدۇ؟ (ئەسكەرتىش: ئەگەر ھاۋانىڭ قارشىلىقى ھېسابقا ئېلىنمىسا، ئۇ ھالدا تىك يۇقىرىغا ئېتىلغان جىسىمنىڭ ئېتىلىش نۇقتىسىدىن ئېگىزلىكى h بىلەن ۋاقىت x مۇنداق مۇناسىۋەتنى قانائەتلەندۈرىدۇ: $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$، بۇنىڭدا $g=9.8\text{m/s}^2$).

6. مەلۇم يېزىش ـ سىزىش قوراللىرى ماگىزىنى بىر تۈركۈم يېڭى تىپتىكى ئۈستەل چىرىغى كىرگۈزدى. ئەگەر ھەربىر ئۈستەل چىرىغى 15 يۈەنلىك باھا بويىچە سېتىلسا، كۈنىگە 30 دانە سېتىشقا بولىدۇ؛ ئەگەر سېتىش باھاسى ھەر 1 يۈەن ئۆرلىسە، كۈنلۈك سېتىش مىقدارى 2 دانە ئازىيىدۇ. بۇ بىر تۈركۈم ئۈستەل چىرىغىدىن كۈنىگە 400 يۈەندىن يۇقىرى سېتىش كىرىمىگە ئېرىشىش ئۈچۈن، چىراغ باھاسىنى قانداق بېكىتىش كېرەك؟

B گۇرۇپپا

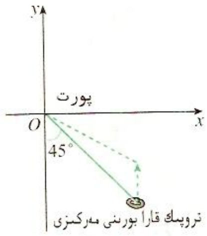
1. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەرنىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تېپىڭ:

(1) $4x^2-20x<25$; (2) $(x-3)(x-7)<0$;

(3) $-3x^2+5x-4>0$; (4) $x(1-x)>x(2x-3)+1$.

2. m قانداق ھەقىقىي سان بولغاندا، x كە دائىر بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە $mx^2-(1-m)x+m=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى مەۋجۇت بولمايدۇ؟

3. فۇنكسىيە $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{3}{4}$ بېرىلگەن، فۇنكسىيە قىممىتىنى 0 دىن چوڭ قىلىدىغان x نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.



(4 – مىسال ئۈچۈن)

4. مېتېئورولوگىيە ئورۇنلىرى مەلۇم پورتنىڭ جەنۇبتىن شەرققە 45° ئاغقان يۆنىلىشىدىكى 20km/h تېزلىك بىلەن دەل شىمال يۆنىلىشكە قاراپ يۆتكىلىۋاتقان تروپىك قارا بورىنى مەركىزىنىڭ پورت بىلەن ئارىلىقى 600km بولۇپ، بوران مەركىزى بىلەن ئارىلىقى 450km ئىچىدە بولغان رايونلارنىڭ ھەممىسى ئۇنىڭ تەسىرىگە ئۇچرايدىغانلىقى توغرىسىدا ئالدىن مەلۇمات بەردى، ئۇنداق بولسا، ھازىردىن باشلاپ قانچىلىك ۋاقىتتىن كېيىن، بۇ پورت تروپىك قارا بورىنىنىڭ تەسىرىگە ئۇچرايدۇ؟ تەسىر قىلىش ۋاقتى تەخمىنەن قانچىلىك بولىدۇ (0.1/h قىچە ئېنىقلىقتا)؟

3-3 ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) ۋە ئاددىي سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسى

1-3-3 ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) ۋە تەكشىلىك ساھەسى

ئەمەلىي تۇرمۇش ۋە ماتېماتىكىدا ئوخشاش بولمىغان ھەر خىل تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرىنى ئۇچرىتىمىز، ئۇلارنى ئوخشاش بولمىغان ماتېماتىكىلىق مودېللاردىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلەشكە ۋە تەتقىق قىلىشقا توغرا كېلىدۇ. ئالدىدا بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك ۋە ئۇنى يېشىش ئۇسۇلىنى ئۆگەندۇق، ئەمدى تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋىتىنىڭ يەنە بىر خىل مودېلىنى ئۆگىنىمىز.

ئالدى بىلەن بىر ئەمەلىي مىسالنى كۆرۈپ باقايلى.

بىر بانكىنىڭ كرېدىت بۆلۈمى يىل بېشىدا كارخانا ۋە شەخسلەرگە قەرز پۇل بېرىش ئۈچۈن 25000000 يۈەن ئىشلىتىشنى پىلانلاپ، بۇ مەبلەغدىن كەم دېگەندە 30000 يۈەن پايدا ئالماقچى بولغان، بۇنىڭ ئىچىدە كارخانا قەرز پۇلىدىن ئالىدىغان پايدا 12%، شەخسلەر قەرز پۇلىدىن ئالىدىغان پايدا 10% بولسا، كرېدىت بۆلۈمى مەبلەغنى قانداق تەقسىم قىلىشى كېرەك؟

بۇ مەسىلىدە بەزىبىر تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرى مەۋجۇت، ئۇلارنى قانداق تەڭسىزلىك مودېلىدىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلىشىمىز كېرەك؟

> ئىككى نامەلۇم سانىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھەمدە نامەلۇم سانىنىڭ دەرىجىسى 1 بولغان تەڭسىزلىكنى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك دەپ ئاتايمىز.

كارخانا قەرز پۇلىغا ئىشلىتىلىدىغان مەبلەغنى x يۈەن، شەخسلەر قەرز پۇلىغا ئىشلىتىلىدىغان مەبلەغنى y يۈەن دەپ پەرەز قىلساق، ئومۇمىي مەبلەغ سانى 25000000 يۈەن بولغانلىقتىن،

$$x+y \leqslant 25\,000\,000. \qquad ①$$

كارخانا قەرز پۇلىدىن 12%، شەخسلەر قەرز پۇلىدىن 10% بولۇپ، جەمئىي 30000 يۈەندىن ئارتۇق پايدا ئالماقچى بولغانلىقتىن،

$$(12\%)x+(10\%)y \geqslant 30\,000,$$

يەنى

$$12x+10y \geqslant 3\,000\,000. \qquad ②$$

ئاخىرىدا كارخانا قەرز پۇلى ۋە شەخسلەر قەرز پۇلىغا ئىشلىتىلىدىغان مەبلەغ سانىنىڭ مەنپىي قىممەت بولمايدىغانلىقىنى نەزەرگە ئالساق:

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \qquad ③$$

①، ②، ③ لەرنى بىرلەشتۈرسەك، مەبلەغنى تەقسىم قىلىشتا قانائەتلەندۈرۈشكە تېگىشلىك شەرتكە ئېرىشىمىز:

3 ـ باب

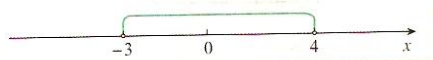
$$\begin{cases} x+y\leqslant 25\ 000\ 000, \\ 12x+10y\geqslant 3\ 000\ 000, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك بىرقانچە تەڭسىزلىكتىن تۈزۈلگەن تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسىنى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى دەپ ئاتايمىز.

ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) نى قانائەتلەندۈرىدىغان x بىلەن y نىڭ قىممىتى تەرتىپلىك سانلار جۈپى (x, y) نى هاسىل قىلىدۇ، مۇشۇنداق بارلىق تەرتىپلىك سانلار جۈپى (x, y) تىن هاسىل بولغان توپلام **ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) نىڭ يېشىملەر توپلىمى** دېيىلىدۇ. تەرتىپلىك سانلار جۈپىنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات تەكشىلىكىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى دەپ قاراشقا بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلاردىن هاسىل بولغان توپلام دەپ قاراشقا بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

بىزگە مەلۇمكى، بىر نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى سان ئوقىدىكى ئىنتېرۋال ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، مەسىلەن، $\begin{cases} x+3>0, \\ x-4<0 \end{cases}$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى سان ئوقىدىكى بىر ئىنتېرۋال (1.3.3 ـ رەسىم) بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك (تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى) نىڭ يېشىملەر توپلىمى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا قانداق شەكىلنى ئىپادىلەيدۇ؟



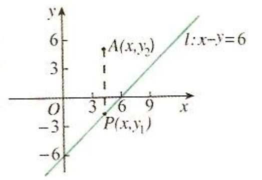
1.3.3 ـ رەسىم

ئالدى بىلەن بىر كونكرېت ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك

$$x-y<6$$

نىڭ يېشىملەر توپلىمى ئىپادىلەيدىغان شەكىلنى تەتقىق قىلىپ باقايلى.

2.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $x-y=6$ تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا بىر تۈز سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ. تۈز سىزىق $x-y=6$ تەكشىلىك ئىچىدىكى بارلىق نۇقتىلارنى ئۈچ گۇرگە بۆلىدۇ: تۈز سىزىق $x-y=6$ ئۈستىدە ياتقان نۇقتىلار؛ تۈز سىزىق $x-y=6$ نىڭ سول يۇقىرى تەرىپىدىكى ساھە ئىچىدە ياتقان نۇقتىلار؛ تۈز سىزىق $x-y=6$ نىڭ ئوڭ تۆۋەن تەرىپىدىكى ساھە ئىچىدە ياتقان نۇقتىلار.



2.3.3 ـ رەسىم

تۈز سىزىق l نۇقتىنى تۈز سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتا دەپ پەرەز $P(x, y_1)$

CHAPTER

$A(x,\ y_2)$ نۇقتىنى تاللاپ، 1.3 ـ جەدۋەلنى تولدۇرايلى ھەمدە 2.3.3 ـ رەسىمدە P نۇقتا بىلەن A نۇقتىنى بەلگىلەپ چىقايلى.

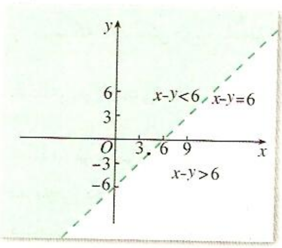
قىلايلى. كوئوردىناتى تەڭسىزلىك $x-y<6$ نى قانائەتلەندۈرىدىغان

1.3 ـ جەدۋەل

ئابسىسساسى x	-3	-2	-1	0	1	2	3
P نۇقتىنىڭ ئوردىناتى y_1							
A نۇقتىنىڭ ئوردىناتى y_2							

ئىزدىنىش

A نۇقتا بىلەن P نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى ئوخشاش بولغاندا، ئۇلارنىڭ ئوردىناتى قانداق مۇناسىۋەتتە ئىگە بولىدۇ؟ مۇشۇنىڭغا ئاساسەن، l تۈز سىزىقنىڭ سول يۇقىرى تەرىپىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى بىلەن تەڭسىزلىك $x-y<6$ نىڭ قانداق مۇناسىۋەتتە ئىگە ئىكەنلىكىنى ئېيتىپ بېقىڭ. l تۈز سىزىقنىڭ ئوڭ تۆۋەن تەرىپىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتىچۇ؟



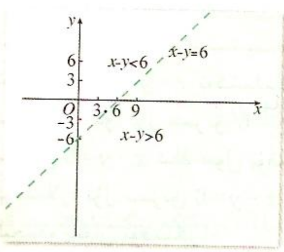
3.3.3 ـ رەسىم

بايقاشقا بولىدۇكى، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىدا، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك $x-y<6$ نىڭ يېشىمىنى كوئوردىنات قىلغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى l تۈز سىزىقنىڭ سول يۇقىرى تەرىپىدە بولىدۇ؛ ئەكسىچە، l تۈز سىزىقنىڭ سول يۇقىرى تەرىپىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئودىناتى تەڭسىزلىك $x-y<6$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ. شۇڭا، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، تەڭسىزلىك $x-y<6$ تۈز سىزىق $x-y=6$ نىڭ سول يۇقىرى تەرىپىدىكى تەكشىلىك ساھەسىنى ئىپادىلەيدۇ (3.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك). ئوخشاشلا، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك $x-y>6$ بولسا تۈز سىزىق $x-y=6$ نىڭ ئوڭ تۆۋەن تەرەپىدىكى تەكشىلىك ساھەسىنى ئىپادىلەيدۇ (4.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك). تۈز سىزىق $x-y=6$ بۇ ئىككى ساھەنىڭ **چېگرا** (boundary) سى دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ يەردە تۈز سىزىق $x-y=6$ نى ئۈزۈك سىزىق قىلىپ سىزىش ئارقىلىق ساھەنىڭ چېگرىنى ئۆز ئىچىگە ئالمايدىغانلىقىنى ئىپادىلىدۇق.

ئومۇمەن، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك

$$Ax+By+C>0$$

تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ نىڭ مەلۇم بىر يېقىدىكى بارلىق نۇقتىلاردىن تەركىب تاپقان تەكشىلىك ساھەسىنى ئىپادىلەيدۇ، بىز تۈز سىزىقنى ئۈزۈك سىزىق قىلىپ سىزىش ئارقىلىق ساھەنىڭ چېگرىنى ئۆز ئىچىگە ئالمايدىغانلىقىنى ئىپادىلەيمىز.



4.3.3 ـ رەسىم

تەڭسىزلىك

$$Ax+By+C\geqslant 0$$

3 - باب

ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەسى چېگرىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ، بۇ چاغدا چېگرىنى تۇتاش سىزىق قىلىپ سىزىمىز.

تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ نىڭ ئوخشاش بىر يېقىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى (x, y) نى $Ax+By+C$ غا قويۇشتىن كېلىپ چىقىدىغان ئالامەتلەر ئوخشاش بولىدۇ، شۇڭا، تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ نىڭ ئوخشاش بىر يېقىدىن مەلۇم بىر ئالاھىدە نۇقتا (x_0, y_0) نى ئېلىپ سىناش نۇقتىسى قىلساقلا، Ax_0+By_0+C نىڭ ئالامىتىگە ئاساسەن $Ax+By+C>0$ تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ نىڭ قايسى يېقىدىكى تەكشىلىك ساھەسىنى ئىپادىلەيدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ. تۆۋەندە بىرقانچە مىسال كۆرۈپ ئۆتەيلى.

1 - مىسال. تەڭسىزلىك $x+4y<4$ ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەسىنى سىزايلى.

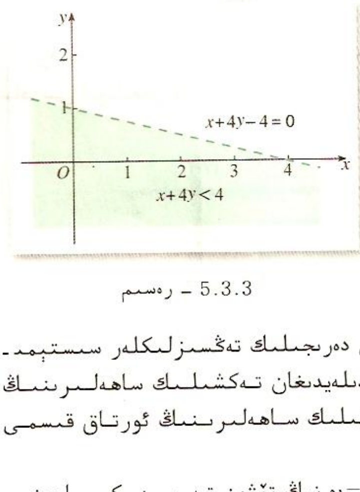
يېشىش: ئالدى بىلەن چېگرا $x+4y=4$ نى سىزىمىز، بۇ تۈز سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىلار $x+4y<4$ نى قانائەتلەندۈرمەيدىغانلىقتىن، ئۇنى ئۈزۈك سىزىق قىلىپ سىزىمىز.

$C\neq 0$ بولغاندا، كۆپ ھاللاردا كوئوردىنات بېشى $(0, 0)$ سىناش نۇقتىسى قىلىپ ئېلىنىدۇ.

كوئوردىنات بېشى $(0,0)$ نى ئېلىپ، ئۇنى $x+4y-4$ كە قويىمىز.

$$0+4\times 0-4=-4<0$$

بولغانلىقتىن، كوئوردىنات بېشى $(0,0)$ تەڭسىزلىك $x+4y-4<0$ ئىپادىلىگەن تەكشىلىك ساھەسى ئىچىدە بولىدۇ، تەڭسىزلىك $x+4y<4$ ئىپادىلەيدىغان ساھە 5.3.3 - رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.



5.3.3 - رەسىم

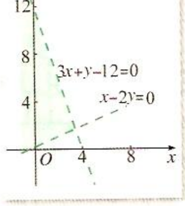
2 - مىسال. تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases} y<-3x+12,\\ x<2y \end{cases}$$

نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى تەكشىلىك ساھەسىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەيلى.

تەھلىل: تاپماقچى بولغان تەكشىلىك ساھەسىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى بىرلا ۋاقىتتا ئىككى تەڭسىزلىكنى قانائەتلەندۈرۈشى كېرەك، شۇڭلاشقا، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەسى ھەربىر تەڭسىزلىك ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەلىرىنىڭ كېسىشمە توپلىمى، يەنى ھەربىر تەڭسىزلىك ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەلىرىنىڭ ئورتاق قىسمى بولىدۇ.

يېشىش: تەڭسىزلىك $y<-3x+12$ تۈز سىزىق $y=-3x+12$ نىڭ تۆۋەن تەرىپىدىكى ساھەنى، تەڭسىزلىك $x<2y$ تۈز سىزىق $y=\frac{1}{2}x$ نىڭ يۇقىرى تەرىپىدىكى ساھەنى ئىپادىلەيدۇ. ئىككى ساھەنىڭ ئۈستمۇئۈست چۈشكەن قىسمىنى ئالساق، 6.3.3 - رەسىمنىڭ بويالغان قىسمى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسىنىڭ يېشىملەر توپلىمىنى ئىپادىلەيدۇ.



6.3.3 - رەسىم

3 - مىسال. چوڭ - كىچىكلىكى ئوخشاش بولمىغان ئىككى خىل پولات تاختىنى A، B، C ئۈچ خىل ئۆلچەمدە كېسىش كېرەك، ھەربىر دانە پولات تاختىدىن بىرلا ۋاقىتتا كېسىۋېلىشقا بولىدىغان ئۈچ خىل ئۆلچەمدىكى كىچىك پولات تاختىلارنىڭ سانى جەدۋەلدە كۆرسىتىلدى:

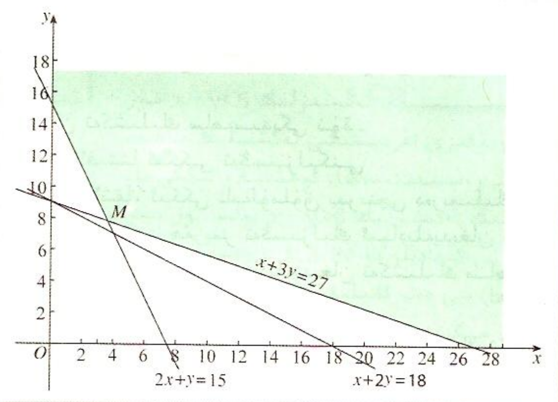
ئۆلچەم تىپى / پولات تاختىنىڭ تىپى	A ئۆلچەم	B ئۆلچەم	C ئۆلچەم
بىرىنچى خىل پولات تاختا	2	1	1
ئىككىنچى خىل پولات تاختا	1	2	3

A، B، C ئۈچ خىل ئۆلچەمدىكى مەھسۇلاتتىن ئايرىم ـ ئايرىم 15، 18، 27 پارچە كېرەك بولسا، يۇقىرىدىكى تەلەپنى ماتېماتىكىلىق مۇناسىۋەت ئىپادىسى ۋە شەكىلدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەيلى.

يېشىش: بىرىنچى خىل پولات تاختىدىن x دانە، ئىككىنچى خىل پولات تاختىدىن y دانە كېسىش كېرەك دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$\begin{cases} 2x+y\geqslant 15, \\ x+2y\geqslant 18, \\ x+3y\geqslant 27, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

يۇقىرىدىكى چەكلەش شەرتىنى شەكىل ئارقىلىق ئىپادىلىسەك، 7.3.3 ـ رەسىمدىكى تەكشىلىك ساھەسى (بويالغان قىسمى)گە ئېرىشىمىز.



7.3.3 ـ رەسىم

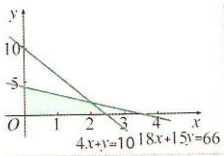
4 ـ مىسال. بىر خىمىيىۋى ئوغۇت زاۋۇتى A، B ئىككى خىل ئارىلاشما ئوغۇت ئىشلەپچىقىرىدۇ. A خىل ئوغۇتتىن 1 ۋاگون ئىشلەپچىقىرىش ئۈچۈن 4t فوسفات كىسلاتا تۇزى، 18t نىترات كىسلاتا تۇزى ئاساسلىق خام ماتېرىيال قىلىنىدۇ؛ B خىل ئوغۇتتىن 1 ۋاگون ئىشلەپچىقىرىش ئۈچۈن 1t فوسفات كىسلاتا تۇزى، 15t نىترات كىسلاتا تۇزى ئاساسلىق خام ماتېرىيال قىلىنىدۇ. ھازىر زاۋۇت بۇ ئىككى خىل ئارىلاشما ئوغۇتنى ئامباردىكى 10t فوسفات كىسلاتا تۇزى ۋە 66t نىترات كىسلاتا تۇزىنى ئاساسلىق خام ماتېرىيال قىلىپ ئىشلەپچىقارماقچى بولغان. ئىشلەپچىقىرىش شەرتىنى قانائەتلەندۈرىدىغان ماتېما-

3 ـ باب

تىكلىنىق مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى تۇزەيلى ھەمدە ماس تەكشىلىك ساھەسىنى سىزايلى.

يېشىش: ئىشلەپچىقارماقچى بولغان A، B ئىككى خىل ئارىلاشما ئوغۇتنىڭ ۋاگون سانىنى ئايرىم ـ ئايرىم x، y دەپ پەرەز قىلساق، ئۇلار تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدۇ:

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10,\\ 18x+15y\leqslant 66,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$



8.3.3 ـ رەسىم

بۇنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا 8.3.3 ـ رەسىمدىكى تەكشىلىك ساھەسى (بويالغان قىسمى) بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

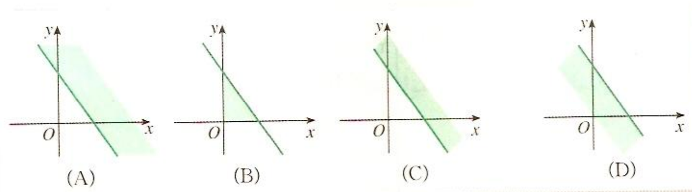
مەشىق

1. تەڭسىزلىك $x-2y+6>0$ ئىپادىلەيدىغان ساھە تۈز سىزىق $x-2y+6=0$ نىڭ (　　) دە بولىدۇ.

A. ئوڭ يۇقىرى تەرىپى.　　B. ئوڭ تۆۋەن تەرىپى.

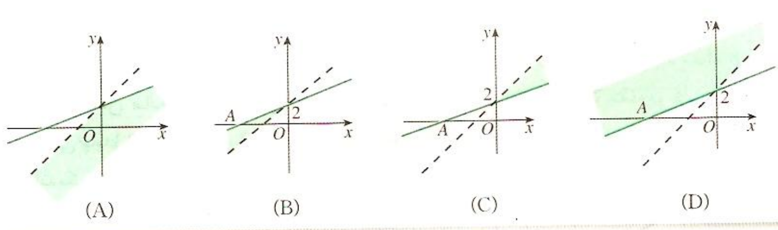
C. سول يۇقىرى تەرىپى.　　D. سول تۆۋەن تەرىپى.

2. تەڭسىزلىك $3x+2y-6\leqslant 0$ ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەسى (　　).



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى $\begin{cases}x-3y+6\geqslant 0,\\ x-y+2<0\end{cases}$ ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەسى (　　).



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. بىر ئائىلە سايمانلىرى زاۋۇتى ئىككى خىل تىپتىكى ئۈستەل A ۋە B نى ئىشلەپچىقىرىشنى پىلانلىمىدى. ھەربىر ئۈستەل سىلىقلاش، رەڭ بېرىش، سىرلاشتىن ئىبارەت ئۈچ ئىش باسقۇچىدىن ئۆتكۈزۈلىدۇ. A ئۈستەلنى سىلىقلاشقا 10min، رەڭ بېرىشكە 6min، سىرلاشقا 6min كېتىدۇ؛ B ئۈستەلنى سىلىقلاشقا 5min، رەڭ بېرىشكە 12min، سىرلاشقا 9min كېتىدۇ. ئەگەر بىر ئىشچى سىلىقلاش ۋە سىرلاش ئۈچۈن كۈنىگە ئايرىم ـ ئايرىم كۆپ دېگەندە 450min، رەڭ بېرىش ئۈچۈن كۈنىگە كۆپ دېگەندە 480min ئىشلىسە، ئىشلەپچىقىرىش شەرتىنى قانائەتلەندۈرىدىغان ماتېماتىكىلىق مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى تۈزۈڭ ھەمدە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا ماس تەكشىلىك ساھەسىنى سىزىڭ.

2-3-3 ئاددىي سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىلىرى

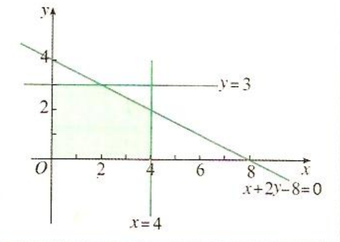
ئەمەلىي ئىشلەپچىقىرىش ۋە تۇرمۇشتا، كۆپ ھاللاردا بايلىقتىن پايدىلىنىش، ئادەم كۈچىنى تەڭشەش، ئىشلەپچىقىرىشنى ئورۇنلاشتۇرۇش دېگەندەك مەسىلىلەرگە دۇچ كېلىمىز.

مەسىلەن، مەلۇم زاۋۇت A، B ئىككى خىل زاپچاستىن پايدىلىنىپ «ئا»، «ب» ئىككى خىل مەھسۇلات ئىشلەپچىقىرىدۇ. ھەربىر دانە «ئا» مەھسۇلات ئىشلەپچىقىرىش ئۈچۈن 4 دانە A خىل زاپچاس ئىشلىتىپ، 1h ۋاقىت سەرپ قىلىدۇ، ھەربىر دانە «ب» مەھسۇلات ئىشلەپچىقىرىش ئۈچۈن 4 دانە B خىل زاپچاس ئىشلىتىپ، 2h ۋاقىت سەرپ قىلىدۇ. زاپچاس زاۋۇتى بۇ زاۋۇتنى كۈنىگە ئەڭ كۆپ بولغاندا 16 دانە A خىل زاپچاس ۋە 12 دانە B خىل زاپچاس بىلەن تەمىنلىيەلىسە، كۈنلۈك ئىشلەش ۋاقتىنى 8h دەپ ھېسابلىغاندا، بۇ زاۋۇتنىڭ بارلىق مۇمكىن بولىدىغان كۈنلۈك ئىشلەپچىقىرىشنىڭ ئورۇنلاشتۇرۇلۇشلىرى قانداق بولىدۇ؟

«ئا»، «ب» ئىككى خىل مەھسۇلاتتىن ئايرىم - ئايرىم x، y دانە ئىشلەپچىقىرىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، بېرىلگەن شەرتلەرگە ئاساسەن تۆۋەندىكى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسىغا ئېرىشىمىز:

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 8, \\ 4x\leqslant 16, \\ 4y\leqslant 12, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

9.3.3 - رەسىمدىكىدەك، يۇقىرىدىكى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسىنى تەكشىلىك ساھەسى قىلىپ ئىپادىلىسەك، رەسىمنىڭ بويالغان قىسمىدىكى پۈتۈن نۇقتا (كوئوردىناتى پۈتۈن سان بولغان نۇقتا) لار مۇمكىن بولىدىغان بارلىق كۈنلۈك ئىشلەپچىقىرىشنىڭ ئورۇنلاشتۇرۇلۇشلىرىغا ۋەكىللىك قىلىدۇ، يەنى $P(x,y)$ نۇقتا يۇقىرىدىكى تەكشىلىك ساھەسى ئىچىدە بولغاندىلا، ئورۇنلاشتۇرۇلغان ئىشلەپچىقىرىش ۋەزىيىتى x، y ئاندىن مەنىگە ئىگە بولىدۇ.



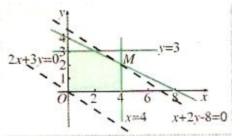
9.3.3 - رەسىم

يەنىمۇ ئىلگىرىلىگەن ھالدا، ئەگەر بىر دانە «ئا» مەھسۇلات ئىشلەپچىقارغاندىكى پايدا 2 مىڭ يۈەن، بىر دانە «ب» مەھسۇلات ئىشلەپچىقارغاندىكى پايدا 3 مىڭ يۈەن بولسا، قايسى خىل ئىشلەپچىقىرىش ئورۇنلاشتۇرۇلۇشىنى قوللانغاندا پايدا ئەڭ كۆپ بولىدۇ؟

«ئا» خىل مەھسۇلاتتىن x دانە، «ب» خىل مەھسۇلاتتىن y دانە ئىشلەپچىقارغاندىكى پايدىنى z دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $z=2x+3y$ بولىدۇ. مۇشۇنداق بولغاندا، يۇقىرىقى مەسىلە تۆۋەندىكىگە ئايلىنىدۇ: x، y تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى (1) نى قانائەتلەندۈرگەندە ھەمدە ئۇلار مەنپىي بولمىغان پۈتۈن سان بولغاندا، z نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى قانچە بولىدۇ؟

$z=2x+3y$ نى $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ قىلىپ يازساق، بۇ، يانتۇلۇق دەرىجىسى $-\frac{2}{3}$، y ئوقتىكى كېسىش ئارىلىقى $\frac{z}{3}$ بولغان تۈز سىزىق بولىدۇ. z ئۆزگەرگەندە، ئۆزئارا پاراللېل بولغان بىر گۇرۇپپا تۈز سىزىق (10.3.3 ـ رەسىم) ھاسىل بولىدۇ. بۇ تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسى ئېنىق بولغانلىقتىن، پەقەت بىر نۇقتا بېرىلسىلا (مەسىلەن، (1, 2))، بىر تۈز سىزىق ($y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$) نى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ. بۇ، كېسىش ئارىلىقى $\frac{z}{3}$ نى تەكشىلىكتىكى بىر نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى ئارقىلىق بىردىنبىر ئېنىقلىغىلى بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ. كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، تۈز سىزىق $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ بىلەن تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى (1) نى ئىپادىلەيدىغان ساھەنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردېناتى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى (1) نى قانائەتلەندۈرىدۇ ھەمدە كېسىش ئارىلىقى $\frac{z}{3}$ ئەڭ چوڭ بولغاندا، z ئەڭ چوڭ قىممەتنى ئالىدۇ. شۇڭا، بۇ مەسىلىنى يەنە تۆۋەندىكىگە ئايلاندۇرۇشقا بولىدۇ: تۈز سىزىق $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ بىلەن تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى (1) ئېنىقلايدىغان تەكشىلىك ساھەسى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولغاندا، ساھە ئىچىدىن شۇنداق بىر P نۇقتىنى تاپايلىكى، نەتىجىدە تۈز سىزىق P نۇقتىدىن ئۆتكەندىكى كېسىش ئارىلىقى $\frac{z}{3}$ ئەڭ چوڭ بولسۇن.

10.3.3 ـ رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، تۈز سىزىق $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ تۈز سىزىق $x=4$ بىلەن تۈز سىزىق $x+2y-8=0$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى $M(4, 2)$ دىن ئۆتكەندە، كېسىش ئارىلىقى $\frac{z}{3}$ نىڭ قىممىتى ئەڭ چوڭ بولۇپ، ئەڭ چوڭ قىممىتى $\frac{14}{3}$ بولىدۇ. بۇ چاغدا $2x+3y=14$. شۇڭا، ھەر كۈنى «ئا» مەھسۇلاتتىن 4 دانە، «ب» مەھسۇلاتتىن 2 دانە ئىشلەپچىقارغاندا، زاۋۇت ئەڭ چوڭ پايدا 14 مىڭ يۈەنگە ئېرىشىدۇ.



10.3.3 ـ رەسىم

يۇقىرىقى مەسىلىدە، تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى (1) ئۆزگەرگۈچى مىقدار x، y نىڭ چەكلەش شەرتى ھېسابلىنىدۇ. بۇ بىر گۇرۇپپا چەكلەش شەرتى x، y كە دائىر بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك بولغانلىقتىن، ئۇ يەنە سىزىقلىق چەكلەش شەرتى دەپمۇ ئاتىلىدۇ. بىز ئەڭ چوڭ قىممىتى تېپىلىدىغان فۇنكسىيە $z=2x+3y$ نى **نىشان فۇنكسىيىسى** (objective function) دەپ ئاتايمىز، بۇ مەسىلىدىكى $z=2x+3y$ ئۆزگەرگۈچى مىقدار x، y كە دائىر بىرىنچى دەرىجىلىك ئانالىتىك ئىپادە بولغانلىقتىن، ئۇ يەنە **سىزىقلىق نىشان فۇنكسىيىسى** (linear objectives) دەپمۇ ئاتىلىدۇ. نىشان فۇنكسىيىسىدىكى ئۆزگەرگۈچى مىقدار قانائەتلەندۈرىدىغان سىزىقلىق چەكلەش شەرتى بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك بىلەن ئىپادىلەنگەندىن سىرت، بەزىدە يەنە بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە بىلەنمۇ ئىپادىلىنىدۇ. ئومۇمەن، سىزىقلىق چەكلەش شەرتى ئاستىدا سىزىقلىق نىشان فۇنكسىيىسىنىڭ ئەڭ چوڭ ياكى ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىش مەسىلىسى ئومۇملاشتۇرۇلۇپ **سىزىقلىق لايىھىلەش** (linear program) مەسىـ

لىسى دەپ ئاتىلىدۇ. سىزىقلىق چەكلەش شەرتىنى قانائەتلەندۈرىدىغان يېشىم (x, y) **يول قويۇلىدىغان (مۇمكىن بولغان) يېشىم** (feasible solution)، بارلىق يول قويۇلىدىغان يېشىملەردىن تەركىب تاپقان توپلام **يول قويۇلىدىغان ساھە** (feasible region) دەپ ئاتىلىدۇ، بۇنىڭ ئىچىدىكى نىشان فۇنكسىيىسىنى ئەڭ چوڭ ياكى ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئېرىشتۈرگۈچى يول قويۇلىدىغان يېشىم بۇ مەسىلىنىڭ ئەۋزەل يېشىمى دەپ ئاتىلىدۇ. يۇقىرىقى مەسىلىدىكى يول قويۇلىدىغان ساھە 10.3.3 - رەسىمنىڭ بويالغان قىسمىدىن ئىبارەت، ئۇنىڭ ئىچىدىكى يول قويۇلىدىغان يېشىم (4, 2) بولسا ئەۋزەل يېشىم بولىدۇ.

ئىزدىنىش

(1) يۇقىرىقى مەسىلىدە، ئەگەر ھەربىر دانە «ئا» مەھسۇلات ئىشلەپچىقارغاندىكى پايدا 3 مىڭ يۈەن، ھەربىر دانە «ب» مەھسۇلات ئىشلەپچىقارغاندىكى پايدا 2 مىڭ يۈەن بولسا، بۇ زاۋۇت ئىشلەپچىقىرىشنى قانداق ئورۇنلاشتۇرسا ئاندىن ئەڭ چوڭ پايدىغا ئېرىشىدۇ؟ يەنە بىرقانچە گۇرۇپپا سانلىق مەلۇماتنى ئالماشتۇرۇپ سىناپ بېقىڭ.

(2) يۇقىرىدىكى جەريانغا ئاساسەن، ئەۋزەل يېشىم بىلەن يول قويۇلىدىغان ساھە ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

5 - مىسال. ئوزۇقلۇقشۇناسلار قۇرامىغا يەتكەنلەرنىڭ ياخشى بولغان كۈندىلىك يېمەك - ئىچمىكىنىڭ تەركىبىدە كەم دېگەن 0.075kg كاربون - سۇ بىرىكمىسى، 0.06kg ئاقسىل، 0.06kg ياغ بولۇشى كېرەك دەپ ئوتتۇرىغا قويدى. 1 كىلوگرام A خىل يېمەكلىكنىڭ تەركىبىدە 0.105kg كاربون - سۇ بىرىكمىسى، 0.07kg ئاقسىل، 0.14kg ياغ بار بولۇپ، بۇنىڭغا 28 يۈەن خەجلىنىدۇ؛ 1 كىلوگرام B خىل يېمەكلىكنىڭ تەركىبىدە 0.105kg كاربون - سۇ بىرىكمىسى، 0.14kg ئاقسىل، 0.07kg ياغ بار بولۇپ، بۇنىڭغا 21 يۈەن خەجلىنىدۇ. ئۇنداق بولسا، ئوزۇقلۇقشۇناسلار ئوتتۇرىغا قويغان كۈندىلىك يېمەك - ئىچمەك تەلىپىنى قاندۇرۇش ھەم چىقىمنى ئەڭ تۆۋەن قىلىش ئۈچۈن، ھەر كۈنى A خىل يېمەكلىك ۋە B خىل يېمەكلىكتىن قانچە kg يېيىش كېرەك؟

تەھلىل: بېرىلگەن سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن جەدۋەل تۈزۈۋالىمىز:

/kg يېمەكلىك	/kg كاربون - سۇ بىرىكمىسى	/kg ئاقسىل	ياغ/kg
A	0.105	0.07	0.14
B	0.105	0.14	0.07

يېشىش: ھەر كۈنى A خىل يېمەكلىكتىن $x$kg، B خىل يېمەكلىكتىن $y$kg يېيىش كېرەك، بۇنىڭ ئومۇمىي تەننەرخى z بولىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$\begin{cases} 0.105x+0.105y\geqslant 0.075, \\ 0.07x+0.14y\geqslant 0.06, \\ 0.14x+0.07y\geqslant 0.06, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0; \end{cases} \quad ①$$

نشان فۇنكسىيىسى:

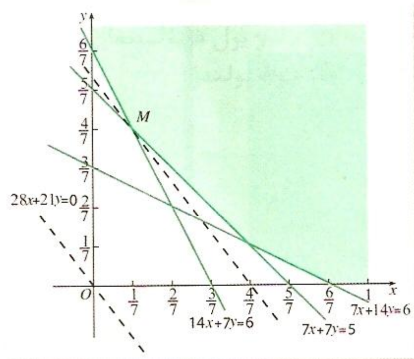
$$z = 28x + 21y.$$

ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى① بىلەن تۆۋەندىكى تەڭسىز ـ
لىكلەر سىستېمىسى تەڭ كۈچلۈك بولىدۇ:

$$\begin{cases}7x+7y\geqslant 5,\\ 7x+14y\geqslant 6,\\ 14x+7y\geqslant 6,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases} \qquad ②$$

ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى ② ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك
ساھەسى (11.3.3 ـ رەسىم) نى سىزساق، بۇ يول قويۇلىدىغان ساھە بولىدۇ.

ئەمدى $z=28x+21y$ ئۈستىدە مۇھاكىمە يۈرگۈزەي ـ
ى، ئۇنى $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{z}{21}$ قىلىپ يازساق، بۇ، يانتۇلۇقى
$-\dfrac{4}{3}$ بولغان، z كە ئەگىشىپ ئۆزگىرىدىغان بىر تۈركۈم
اراللېل سىزىق بولىدۇ. $\dfrac{z}{21}$ دېگىنىمىز تۈز سىزىقنىڭ
؛ ئوقتىكى كېسىش ئارىلىقى بولۇپ، $\dfrac{z}{21}$ ئەڭ كىچىك
ىممەت ئالغاندا، z نىڭ قىممىتى ئەڭ كىچىك بولىدۇ.
ەلۋەتتە، بۇ يەردىكى تۈز سىزىق يول قويۇلىدىغان ساھە
ىلەن كېسىشىشى كېرەك، يەنى چەكلەش شەرتى قانا ـ
ەتلەندۈرۈلگەندە نىشان فۇنكسىيىسى $z=28x+21y$ ئاندىن ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە بولىدۇ.



11.3.3 ـ رەسىم

11.3.3 ـ رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، تۈز سىزىق $z=28x+21y$ يول قويۇلىدىغان ساھەدىكى
M نۇقتىدىن ئۆتكەندە، كېسىش ئارىلىقى $\dfrac{z}{21}$ ئەڭ كىچىك، يەنى z ئەڭ كىچىك بولىدۇ.

تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases}7x+7y=5,\\ 14x+7y=6\end{cases}$$

ى يېشىش ئارقىلىق M نىڭ كوئوردىناتىغا ئېرىشىمىز:

$$x=\frac{1}{7},\ y=\frac{4}{7}.$$

شۇڭا $z_{\min}$❶ $=28x+21y=16$.

> ❶ min دېگىنىمىز minimum (ئەڭ كىچىك قىممەت) نىڭ قىسقىچە يېزىلىشى.

جاۋابى: ھەر كۈنى A خىل يېمەكلىكتىن تەخمىنەن 143g، B خىل يېمەك ـ
لىكتىن تەخمىنەن 571g يېگەندە، كۈندىلىك ئوزۇقلىنىش تەلىپى قاندۇرۇلۇپ، چىقىمى ئەڭ تۆۋەن بو ـ
لىدۇ، ئەڭ تۆۋەن تەننەرخ 16 يۈەن.

6 ـ مىسال. ئالدىنقى پاراگرافتا كەلتۈرۈلگەن 3 ـ مىسالدا، ئىككى خىل پولات تاختىنىڭ ھەربىردىن قانچىنى كەسكەندە، كېرەكلىك بولغان A، B، C ئۈچ خىل ئۆلچەمدىكى مەھسۇلاتنى كېسىۋالغىلى ھەمدە ئىشلىتىلگەن پولات تاختىنىڭ سانىنى ئەڭ ئاز قىلغىلى بولىدۇ؟

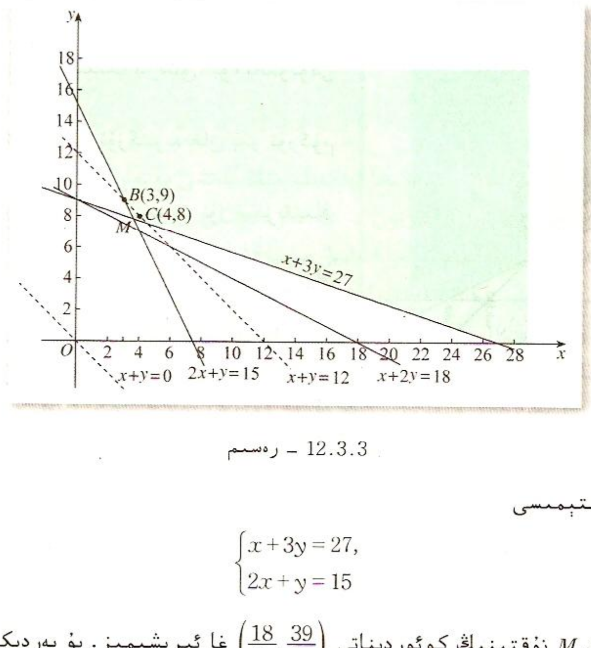
يېشىش: بىرىنچى خىل پولات تاختىدىن x دانە، ئىككىنچى خىل پولات تاختىدىن y دانە، بۇ ئىككى خىل پولات تاختىدىن جەمئىي z دانىنى كېسىش كېرەك دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا نىشان فۇنكسىيىسى:

$$z=x+y.$$

بۇنىڭ يول قويۇلىدىغان ساھەسى 12.3.3 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلدى.

$z=x+y$ نى $y=-x+z$ قىلىپ يازساق، يانتۇلۇقى -1، y ئوقتىكى كېسىش ئارىلىقى z بولغان بىر تۈركۈم پاراللېل سىزىقنى ئېرىشىمىز.

12.3.3 ـ رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، تۈز سىزىق $z=x+y$ يول قويۇلىدىغان ساھەدىكى M نۇقتىدىن ئۆتكەندە، كېسىش ئارىلىقى z ئەڭ كىچىك بولىدۇ.



12.3.3 ـ رەسىم

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases} x+3y=27, \\ 2x+y=15 \end{cases}$$

نى يېشىش ئارقىلىق M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $\left(\frac{18}{5},\frac{39}{5}\right)$ غا ئېرىشىمىز. بۇ يەردىكى $\frac{18}{5}$، $\frac{39}{5}$ لار پۈتۈن سان ئەمەس، ھالبۇكى، بۇ مەسىلىنىڭ ئەۋزەل يېشىمى (x, y) دىكى x، y لەر چوقۇم پۈتۈن سان بولۇشى كېرەك، شۇڭا $\left(\frac{18}{5},\frac{39}{5}\right)$ نۇقتا ئەۋزەل يېشىم بولمايدۇ. يول قويۇلىدىغان ساھە ئىچىدىكى پۈتۈن نۇقتا (ئابسىسساسى ۋە ئوردىناتى پۈتۈن سان بولغان نۇقتا) دىن ئۆتىدىغان ھەمدە كېسىش ئارىلىقى z نى ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان تۈز سىزىق $y=-x+12$ بولۇپ، ئۇ پۈتۈن نۇقتا $B(3,9)$ ۋە $C(4,8)$ دىن ئۆتىدۇ، شۇڭا بۇ نۇقتىلار ئەۋزەل يېشىم بولىدۇ.

$$z_{\min}=12.$$

جاۋابى: كېرەكلىك بولغان ئۈچ خىل ئۆلچەمدىكى مەھسۇلاتنى كېسىۋېلىش ھەمدە ئىشلىتىلىدىغان

ئىككى خىل پولات تاختىنىڭ سانىنى ئەڭ ئاز قىلىشتا ئىككى خىل ئۇسۇل بار، بىرىنچى خىل ئۇسۇلدا بىرىنچى خىل پولات تاختىدىن 3 دانە، ئىككىنچى خىل پولات تاختىدىن 9 دانە، ئىككىنچى خىل ئۇسۇلدا بىرىنچى خىل پولات تاختىدىن 4 دانە، ئىككىنچى خىل پولات تاختىدىن 8 دانە ئىشلىتىلىدۇ. ھەر ئىككى خىل ئۇسۇلدا ئىككى خىل پولات تاختىدىن كەم دېگەندە 12 دانە ئىشلىتىلىدۇ.

7 ـ مىسال. ئالدىنقى پاراگرافتا كەلتۈرۈلگەن 4 ـ مىسالدا، ئەگەر A خىل ئوغۇتتىن 1 ۋاگون ئىشلەپچىقارغاندىكى پايدا 10 000 يۈەن، B خىل ئوغۇتتىن 1 ۋاگون ئىشلەپچىقارغاندىكى پايدا 5000 يۈەن بولسا، ئۇ ھالدا A، B ئىككى خىل ئوغۇتنىڭ ھەرقايسىسىدىن ئايرىم ـ ئايرىم قانچە ۋاگون ئىشلەپچىقارغاندا ئاندىن ئەڭ چوڭ پايدىغا ئېرىشكىلى بولىدۇ؟

يېشىش: A خىل ئوغۇتتىن x ۋاگون، B خىل ئوغۇتتىن y ۋاگون ئىشلەپچىقارغاندا z (10 مىڭ) يۈەن پايدىغا ئېرىشكىلى بولىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، نىشان فۇنكسىيىسى $z=x+0.5y$، يول قويۇلىدىغان ساھە 8.3.3 ـ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.

$z=x+0.5y$ نى $y=-2x+2z$ قىلىپ يازساق، يانتۇلۇقى -2، y ئوقتىكى كېسىش ئارىلىقى $2z$ بولغان ھەمدە z قا ئەگىشىپ ئۆزگىرىدىغان بىر تۈركۈم پاراللېل سىزىققا ئېرىشىمىز.

13.3.3 ـ رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، تۈز سىزىق $y=-2x+2z$ يول قويۇلىدىغان ساھەدىكى M نۇقتىدىن ئۆتكەندە، كېسىش ئارىلىقى $2z$ ئەڭ چوڭ، يەنى z ئەڭ چوڭ بولىدۇ.

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

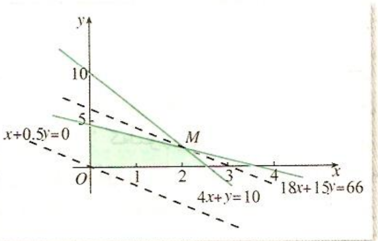
$$\begin{cases}18x+15y=66,\\4x+y=10\end{cases}$$

نى يېشىش ئارقىلىق M نىڭ كوئوردىناتىغا ئېرىشىمىز:

$$x=2,\ y=2.$$

شۇڭا $z_{\max}=x+0.5y=3$.

جاۋابى: A، B ئىككى خىل ئوغۇتنىڭ ھەرقايسىسىدىن 2 ۋاگون ئىشلەپچىقارغاندا ئەڭ چوڭ پايدىغا ئېرىشكىلى بولىدۇ، ئەڭ چوڭ پايدا 30 مىڭ يۈەن.



13.3.3 ـ رەسىم

مەشىق

1. تۆۋەندىكى سىزىقلىق لايىھەلەش مەسىلىلىرىنى يېشىڭ:

(1) $z=2x+y$ نىڭ x، y لەر تۆۋەندىكى چەكلەش شەرتىنى قانائەتلەندۈرگەندىكى ئەڭ چوڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

$$\begin{cases}y\leqslant x,\\x+y\leqslant 1,\\y\geqslant -1.\end{cases}$$

(2) $z=3x+5y$ نىڭ x، y لەر تۆۋەندىكى چەكلەش شەرتىنى قانائەتلەندۈرگەندىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى بىلەن ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ:

$$\begin{cases}5x+3y\leqslant 15,\\y\leqslant x+1,\\x-5y\leqslant 3.\end{cases}$$

2. مەلۇم زاۋۇت «ئا»، «ب» ئىككى خىل مەھسۇلاتنى ئىشلەپچىقارىدۇ، ھەربىر دانە مەھسۇلاتنىڭ سېتىش كىرىمى

CHAPTER

ئايرىم ـ ئايرىم 3000 يۈەن، 2000 يۈەن. «ئا»، «ب» مەھسۇلاتنىڭ ھەر ئىككىسىنى A، B ئىككى خىل ئۈسكۈنىدە پىششىقلاپ ئىشلەشكە توغرا كېلىدۇ، A، B ئىككى خىل ئۈسكۈنىنىڭ ھەربىرىدە 1 دانە «ئا» مەھسۇلاتنى پىششىقلاپ ئىشلەش ئۈچۈن كېتىدىغان ئىش ۋاقتى ئايرىم ـ ئايرىم 1h، 2h، 1 دانە «ب» مەھسۇلاتنى پىششىقلاپ ئىشلەش ئۈچۈن كېتىدىغان ئىش ۋاقتى ئايرىم ـ ئايرىم 2h، 1h بولۇپ، A، B ئىككى خىل ئۈسكۈنىنىڭ ھەر ئايدىكى ئۈنۈملۈك ئىشلىتىلىش ۋاقتى ئايرىم 400h ۋە 500h بولسا، بۇ زاۋۇت ئىشلەپچىقىرىشنى قانداق ئورۇنلاشتۇرغاندا ئاندىن ئەڭ كۆپ پايدىغا ئېرىشەلەيدۇ؟

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

خاتالىق نەدە

بىر سائەتلىك تەڭسىزلىكنى يېشىش دەرسىدە، مۇرات مۇئەللىم بىر مىسالنى ئوتتۇرىغا قويۇپ، ئوقۇغۇچىلاردىن ئاۋۋال يېشىمىنى تېپىشنى تەلەپ قىلدى، بۇ مىسال مۇنداق:

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 3, & ①\\ -1\leqslant x-y\leqslant 1 & ②\end{cases}$$

بېرىلگەن، $4x+2y$ نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

مىسال ئوتتۇرىغا قويۇلغاندىن كېيىن، ساۋاقداشلار دەرھال يېشىشكە كىرىشىپ، نەتىجىسىنى تېزلا كەلتۈرۈپ چىقاردى. لېكىن كۆپچىلىكنىڭ كەلتۈرۈپ چىقارغان نەتىجىسى ئىككى خىل بولۇپ، بۇ ئىككى خىل نەتىجىنى كەلتۈرۈپ چىقارغان ساۋاقداشلارنىڭ ھەممىسى ئۆزىنىڭكىنى توغرا دەپ ھېسابلىدى، ئۇلار ئىككىگە بۆلۈنۈپ كەسكىن مۇنازىرە ئېلىپ بارغان بولسىمۇ، يەنىلا بىر ـ بىرىنى قايىل قىلالمىدى. شۇنىڭ بىلەن مۇرات مۇئەللىم ئىككى تەرەپنىڭ ھەربىرىدىن بىر ۋەكىل چىقىرىپ، ئۆزلىرىنىڭ يېشىش ئۇسۇلىنى دوسكىغا يازدۇردى.

بىرىنچى خىل يېشىش ئۇسۇلى: ①، ② دىن ئىبارەت بۇ ئىككى تەڭسىزلىكنى بىرلەشتۈرۈپ، ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يېشىشتىكىگە ئوخشىشىپ كېتىدىغان ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئايرىم ـ ئايرىم x بىلەن y نىڭ دائىرىسىنى تاپىمىز، ئاندىن ئۇلارنى $4x+2x$ كە بىۋاسىتە قويۇپ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تاپساقلا بولىدۇ، يەنى

①+② دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$0\leqslant 2x\leqslant 4, 0\leqslant 4x\leqslant 8. \quad ③$$

②×(−1) دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$-1\leqslant y-x\leqslant 1. \quad ④$$

①+④ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$0\leqslant 2y\leqslant 4. \quad ⑤$$

بۇلارنى $4x+2y$ كە قويساق:

$$0\leqslant 4x+2y\leqslant 12.$$

ئىككىنچى خىل يېشىش ئۇسۇلى:

$$4x+2y=3(x+y)+(x-y)$$

ھەمدە بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن:

$$3\leqslant 3(x+y)\leqslant 9, \quad ⑥$$

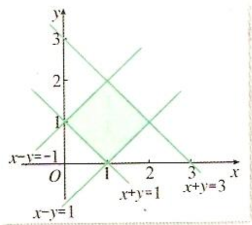
$$-1\leqslant x-y\leqslant 1, \quad ⑦$$

⑥، ⑦ ئىپادىلەرنى قوشساق:

$$2\leqslant 4x+2y=3(x+y)+(x-y)\leqslant 10.$$

ئىككى خىل يېشىش ئۇسۇلىنىڭ نەتىجىسى نېمە ئۈچۈن ئوخشاش ئەمەس؟

بۇ پاراگرافتىكى مەزمۇنلارنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، بۇنداق ئەھۋالنىڭ كېلىپ چىقىش سەۋەبىنى چۈشەندۈرەلەيدىغانسىز؟ ئەمەلىيەتتە، تەڭسىزلىك ①، ② لەر بىر تەكشىلىك ساھەسى (1 ـ رەسىم) نى ئىپنىقلايدۇ. 1 ـ رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، x بىلەن y ئۆزئارا مۇستەقىل مۇناسىۋەتتە بولماستىن، بەلكى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى بەلگىلىگەن ئۆزئارا چەكلەش مۇناسىۋىتىدە بولىدۇ. x ئەڭ چوڭ (كىچىك) قىممەتنى ئالغاندا، y شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا ئەڭ چوڭ (كىچىك) قىممەتنى ئالالمايدۇ؛ y ئەڭ چوڭ (كىچىك) قىممەتنى ئالغاندا، x مۇ شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا ئەڭ چوڭ (كىچىك) قىممەتنى ئالالمايدۇ. بىرىنچى خىل يېشىش ئۇسۇلىدىكى مەسىلە دەل مۇشۇ يەردە بولۇپ، ئۇنىڭدا x بىلەن y نىڭ ئۆزئارا چەكلەش مۇناسىۋىتى ئېتىبارغا ئېلىنمىغانلىقتىن، كېلىپ چىققان قىممەت ئېلىش دائىرىسى ئەمەلىي دائىرىدىن چوڭ بولۇپ قالغان. ئىككىنچى خىل يېشىش ئۇسۇلىدا x بىلەن y نىڭ ئۆزئارا چەكلەش مۇناسىۋىتى ئومۇمىي جەھەتتىن ساقلىنىپ قالغان، شۇڭا بۇ ئۇسۇلدا كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان قىممەت ئېلىش دائىرىسى توغرا بولغان.



1 ـ رەسىم

ساۋاقداشلار، ئەمدى چۈشەنگەنسىلەر؟

3.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەر ئىپادىلىگەن تەكشىلىك ساھەسىنى سىزىڭ:

(1) $x+y\leqslant 2$; (2) $2x-y>2$; (3) $y\leqslant -2$; (4) $x\geqslant 3$.

2. تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى $\begin{cases}-x+y-2\leqslant 0,\\ x+y-4\leqslant 0,\\ x-3y+3\leqslant 0\end{cases}$ ئىپادىلىگەن تەكشىلىك ساھەسىنى سىزىڭ.

3. مەلۇم كارخانا تېلېۋىزىيە ئىستانسىسىغا ئىككى يۈرۈش كۆپ قىسىملىق تېلېۋىزىيە تىياتىرى قويۇشنى ھاۋالە قىلدى. بۇنىڭ ئىچىدە، كۆپ قىسىملىق تېلېۋىزىيە تىياتىرى A نىڭ ھەر قېتىمقى قويۇلۇش ۋاقتى 80min، قىستۇرۇلىدىغان ئېلان ۋاقتى 1min بولغاندا، كۆرۈرمەنلەرنىڭ سانى 600 مىڭ بولىدىكەن؛ كۆپ قىسىملىق تېلېۋ-

ـزىيە تىياتىرى B نىڭ ھەر قېتىمقى قويۇلۇش ۋاقتى 40min، قىستۇرۇلىدىغان ئېلان ۋاقتى 1min بولغاندا، كۆرۈر-مەنلەرنىڭ سانى 200 مىڭ بولىدىكەن. ئىككى تەرەپ تۈزگەن كېلىشىم بويىچە، تېلېۋىزىيە ئىستانسىسى بۇ كارخانىنى ھەر ھەپتىدە 320min تىن ئېشىپ كەتمىگەن كۆرسىتىش ۋاقتى بىلەن تەمىنلىشى ھەمدە ھەپتىسىگە كەم دې-گەندە 6min ئېلان بېرىشى كېرەك. ئەگەر سىز تېلېۋىزىيە ئىستانسىسىنىڭ فىلىم ئىشلىگۈچىسى بولسىڭىز، تې-لېۋىزىيە ئىستانسىسى ھەر ھەپتىدە ئىككى يۈرۈش تېلېۋىزىيە تىياتىرىنىڭ ھەربىرىنى قانچە قېتىمدىن قويسا، ئاندىن ئەڭ يۇقىرى كۆرۈش نىسبىتىگە ئېرىشەلەيدۇ؟

4. ئائىلە ئېلېكتر سايمانلىرى ئىشلەپچىقىرىدىغان مەلۇم كارخانا بازار ئەھۋالىنى تەكشۈرۈپ تەھلىل قىلغان-دىن كېيىن، مەھسۇلات ئىشلەپچىقىرىش لايىھىسىنى تەڭشەش قارارىغا كېلىپ، ھەپتىسىگە (40 ئىش سائىتى بو-يىچە ھېسابلىنىدۇ) جەمئىي 120 دانە ھاۋا تەڭشىگۈچ، رەڭلىك تېلېۋىزور ۋە توڭلاتقۇ، بۇنىڭ ئىچىدە كەم دېگەندە 20 دانە توڭلاتقۇ ئىشلەپچىقارماقچى بولدى. بۇ ئائىلە ئېلېكتر سايمانلىرىنىڭ ھەربىر دانىسىنى ئىشلەپچىقىرىش ئۈچۈن كېتىدىغان ئىش سائىتى ۋە ھەربىر دانىسىنىڭ مەھسۇلات قىممىتى جەدۋەلدە بېرىلدى:

ئېلېكتر سايمىنىنىڭ نامى	ھاۋا تەڭشىگۈچ	رەڭلىك تېلېۋىزور	توڭلاتقۇ
ئىش سائىتى	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
مىڭ يۈەن/مەھسۇلات قىممىتى	4	3	2

مەھسۇلات قىممىتىنى ئەڭ يۇقىرى قىلىش ئۈچۈن، ھەر ھەپتىدە ھاۋا تەڭشىگۈچ، رەڭلىك تېلېۋىزور ۋە توڭلاتقۇ-نىڭ ھەرقايسىسىدىن قانچە دانە ئىشلەپچىقىرىش كېرەك؟ ئەڭ يۇقىرى مەھسۇلات قىممىتى قانچە (مىڭ يۈەن بىر-لىك قىلىنىدۇ)؟

B گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى ئىپادىلىگەن تەكشىلىك سا-ھەسىنى سىزىڭ:

$$\begin{cases} 2x+3y\leqslant 12, \\ 2x+3y>-6, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

2. $(x+2y-1)(x-y+3)>0$ ئىپادىلىگەن تەكشىلىك ساھەسىنى سىزىڭ.

3. «ئا»، «ب» ئىككى ئاشلىق ئامبىرىدىن A، B ئىككى بازارغا گۈرۈچ يۆتكەش پىلانلاندى. «ئا» ئامباردىن 100t، «ب» ئامباردىن 80t گۈرۈچ يۆتكەشكە بولىدىغانلىقى ھەمدە A بازارغا 70t، B بازارغا 110t گۈرۈچ كېرەك ئىكەنلىكى بېرىلىپ، ئىككى ئامباردىن ئىككى بازارغىچە بولغان مۇساپە ۋە كىرا ھەققى جەدۋەلدە كۆرسىتىلدى:

	مۇساپە /km		كىرا ھەققى (يۈەن·t⁻¹·km⁻¹)	
	«ئا» ئامبار	«ب» ئامبار	«ئا» ئامبار	«ب» ئامبار
A بازار	20	15	12	12
B بازار	25	20	10	8

(1) بۇ ئىككى ئامبارنىڭ ھەرقايسىسىدىن A ، B ئىككى بازارغا قانچە t گۆرۈچ يۆتكىگەندە، ئومۇمىي كىرا ھەققىنى ئەڭ تېجىگىلى بولىدۇ؟ بۇ چاغدا ئومۇمىي كىرا ھەققى قانچىلىك بولىدۇ؟

(2) ئەڭ مۇۋاپىق بولمىغان يۆتكەش لايىھىسى قانداق بولىدۇ؟ ئۇنىڭ دۆلەتكە ئېلىپ كېلىدىغان زىيىنى قانچىلىك؟

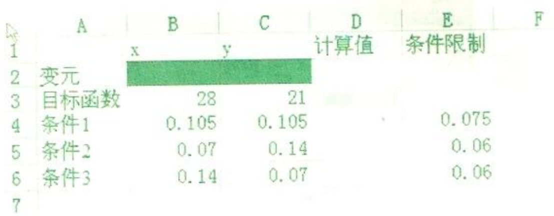
ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسىنى Excel دىن پايدىلىنىپ يېشىشكە دائىر مىسال

ئالدىدىكى مەزمۇنلارنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسىنى تەكشىلىك ساھەسىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلالايدىغان بولدۇق. ئەمەلىيەتتە، نۇرغۇن كومپيۇتېر يۇمشاق دېتاللىرى بىزنى سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسىنى يېشىشنىڭ ئاددىي ھەم ئۈنۈملۈك قورالى بىلەن تەمىن ئېتىدۇ. تۆۋەندە Excel نى مىسال قىلىپ، 2.3.3 ـ پاراگرافتا كەلتۈرۈلگەن 1 ـ مىسالدىكى سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسىنى Excel نىڭ «规划求解 (لايىھىلەش مەسىلىسىنى يېشىش)» قورالىدىن پايدىلىنىپ يېشىمىز. بۇنىڭ كونكرېت مەشغۇلات باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىچە:

1. Excel تىزىملىكىدىكى «工具 (قورال)» تاللاش تۈرىنىڭ تىزىملىكىنى ئېچىپ، ئۇنىڭدىكى 加载宏 (يۈكلەنمە ماكرو)» بۇيرۇقىنى بىر قېتىم چەكسەكلا «加载宏» كۆزنىكى ئېچىلىدۇ، ئاندىن ئۇنىڭ ئىچىدىكى «规划求解» نى تاللاپ، «确定 (بېكىتىش)» كۇنۇپكىسىنى بىر قېتىم چېكىمىز.

2. خىزمەت جەدۋىلىگە 1 ـ مىسالدىكى سانلىق مەلۇمات ۋە چەكلەش شەرتىنى كىرگۈزىمىز ھەمدە بۆلەك كاتەكچىسى (单元格) B2 ، C2 ، D3 نى ئايرىم ـ ئايرىم ئۆزگەرگۈچى مىقدار x ، y نىڭ يېشىمى ۋە ئەڭ چوڭ (ئەڭ كىچىك) قىممەت z نىڭ چىقىرىلىش ساھەسى قىلىمىز (1 ـ رەسىمدىكىدەك).



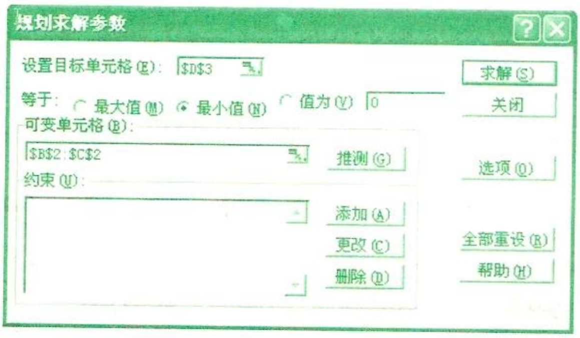
	A	B	C	D	E	F
1		x	y	计算值	条件限制	
2	变元					
3	目标函数	28	21			
4	条件1	0.105	0.105		0.075	
5	条件2	0.07	0.14		0.06	
6	条件3	0.14	0.07		0.06	
7						

1 ـ رەسىم

CHAPTER

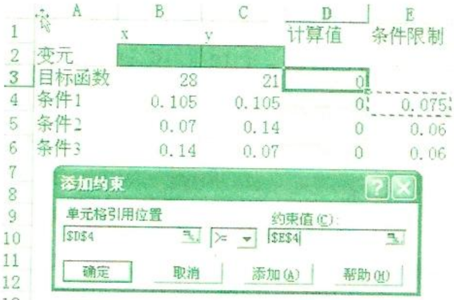
3. بۆلەك كاتەكچىسى D3 كە فورمۇلا «= \$B\$2*B3+\$C\$2*C3» (بۇ فورمۇلا نىشان فۇنكسىيىسى بولىدۇ) نى كىرگۈزۈپ، بۇ فورمۇلىنى ئايرىم - ئايرىم بۆلەك كاتەكچىسى D4 (D4 نى ئىككى قېتىم چەكسەك، فورمۇلىنىڭ «= \$B\$2*B4+\$C\$2*C4» كە ئۆزگىرىدىغانلىقىنى كۆرىمىز، بۇ $0.105x+0.105y$ نى ئىپادىلەيدۇ)، D5، D6 گە نۇسخىلايمىز.

4. بۆلەك كاتەكچىسى D3 نى تاللاپ، «工具» تىزىملىكىنى ئاچىمىز، ئاندىن «规划求解» بۇيرۇقىنى بىر قېتىم چېكىپ، «规划求解参数(لايىھىلەش مەسىلىسىنى يېشىش پارامېتىرى)» دىئالوگ رامكىسىنى ئاچىمىز (2 - رەسىمدىكىدەك). «等于(تەڭ بولۇش)» ئىستونىدىن «最小值(ئەڭ كىچىك قىممەت)» نى تاللاپ، «可变单元格(ئۆزگىرىشچان بۆلەك كاتەكچىسى)» رامكىسىغا «\$B\$2:\$C\$2» نى كىرگۈزىمىز.



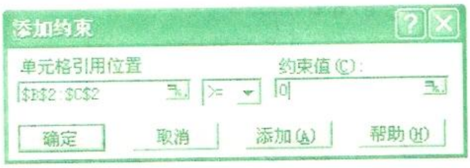
2 - رەسىم

«约束(چەكلەش)» تىكى «添加(قوشۇش)» كۇنۇپكىسىنى بىر قېتىم چېكىپ، «添加约束(چەكلەشنى قوشۇش)» دىئالوگ رامكىسىنى ئاچىمىز، ئاندىن «单元格引用位置(بۆلەك كاتەكچىسىنىڭ ئىشلىتىلىش ئورنى)» رامكىسىغا «\$D\$4» نى كىرگۈزۈپ، تارتما سېلىشتۇرما لىق بەلگە جەدۋىلى(下拉式比较符列表) دىن «>=» نى تاللايمىز ھەمدە «约束值(چەكلەش قىممىتى) [C]:» رامكىسىغا «\$E\$4» (چەكلەش شەرتى $0.105x+0.105y\geqslant 0.075$ نى ئىپادىلەيدۇ) نى كىرگۈزىمىز (3 - رەسىمدىكىدەك). «添加» كۇنۇپكىسىنى بىر قېتىم چېكىپ، باشقا چەكلەش شەرتلىرىنى كىرگۈزۈشنى يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش ئىجرا قىلىمىز، يەنى «\$D\$5 \$E\$5»، «\$D\$6>=\$E\$6 »، «\$D\$4>=\$E\$4».



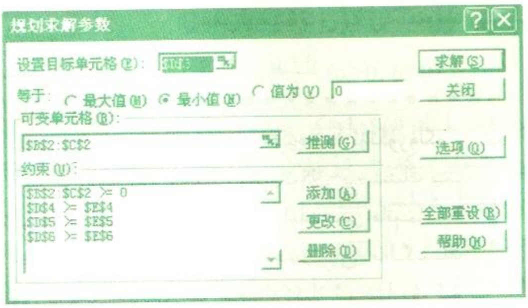
3 - رەسىم

ئاخىرىدا ئۆزگىرىشچان ئېلېمېنتنىڭ مەنپىي بولماسلىق شەرتى «\$B\$2:\$C\$2>=0» نى كىرگۈزىمىز (4 - رەسىم).



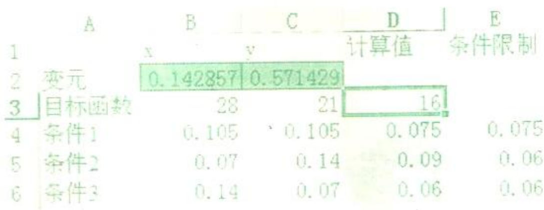
4 ـ رەسىم

«确定» كۇنۇپكىسىنى بىر قېتىم چەككەندىن كېيىن، نەتىجىسى 5 ـ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.



5 ـ رەسىم

«求解(يېشىم تېپىش)» كۇنۇپكىسىنى چېكىپ يېشىم تېپىشنى تاماملايمىز (6 ـ رەسىم).



	A	B	C	D	E
1		x	y	计算值	条件限制
2	变元	0.142857	0.571429		
3	目标函数	28	21	16	
4	条件1	0.105	0.105	0.075	0.075
5	条件2	0.07	0.14	0.09	0.06
6	条件3	0.14	0.07	0.06	0.06

6 ـ رەسىم

يمەك، $x = 0.142857$ ، $y = 0.571429$ بولغاندا، $z_{min} = 16$ بولىدۇ.

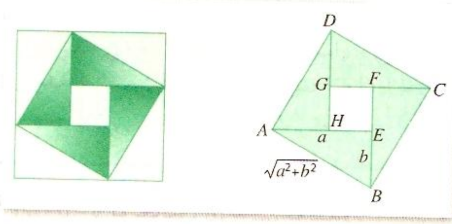
يۇقىرىدا پەقەت سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسىگە دائىر بىر ئاددىي مىسالنى كەلتۈردۇق، Exce دىن پايدىلىنىپ يەنە كۆپ ئۆزگەرگۈچى مىقدارلىق سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسى ۋە سىزىقلىق لايىھىلەشكە تەۋە بولمىغان مەسىلىلەرنىمۇ ھەل قىلغىلى بولىدۇ، قىزىقىدىغان ساۋاقداشلار Excel دىكى «规划求解» نىڭ ياردەمچى تىزىملىكىدىن پايدىلانسا بولىدۇ.

4-3 ئاساسىي تەڭسىزلىك: $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

ئىزدىنىش

1.4.3 - رەسىم

1.4.3 - رەسىمدىكىسى بېيجىڭدا ئۆتكۈزۈلگەن 24 - نۆۋەتلىك خەلقئارا ماتېماتىكلار يىغىنىنىڭ يىغىن بەلگىسى بولۇپ، بۇ بەلگە جۇڭگونىڭ قەدىمكى زاماندىكى ماتېماتىكا ئالىمى جاۋ شۇاڭنىڭ خوردا سخېمىسىغا ئاساسەن لايىھەلەنگەن، بەلگىنىڭ رەڭگى ئوچۇق - تۇتۇق بولۇپ، خۇددى بىر چاقپەلەككىلا ئوخشايدۇ، ئۇ جۇڭگو خەلقىنىڭ خۇش پېئىل، مېھماندوستلۇقىنى نامايان قىلىدۇ. سىز بۇ رەسىمدىن بەزىبىر تەڭ بولۇش ياكى تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرىنى تاپالامسىز؟



2.4.3 - رەسىم

1.4.3 - رەسىمدىكى «چاقپەلەك» نى 2.4.3 - رەسىمدىكىدەك ئابستراكسىيىلىسەك، كۋادرات $ABCD$ نىڭ ئىچىدە 4 دانە تەڭ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بار بولىدۇ. تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تىك تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى a، b دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ هالدا كۋادراتنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى $\sqrt{a^2+b^2}$ بولىدۇ. شۇنداق قىلىپ، 4 دانە تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى $2ab$، كۋادراتنىڭ يۈزى a^2+b^2 بولىدۇ. كۋادرات $ABCD$ نىڭ يۈزى 4 دانە تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىدىن كىچىك بولمىغانلىقتىن، تۆۋەندىكى تەڭسىزلىككە ئېرىشىمىز:

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ تەڭ يانلىق تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭغا ئۆزگەرگەندە، يەنى $a=b$ بولغاندا، كۋادرات $EFGH$ كىچىكلەپ بىر نۇقتىغا ئايلىنىدۇ - دە، بۇ چاغدا مۇنداق بولىدۇ:

$$a^2+b^2=2ab.$$

ئومۇمەن، خالىغان ھەقىقىي سان a، b غا نىسبەتەن

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab$$

بولۇپ، پەقەت ۋە پەقەت $a=b$ بولغاندىلا تەڭلىك بەلگىسى كۆچكە ئىگە بولىدۇ.

ئۇنىڭ ئىسپاتىنى ئوتتۇرىغا قويالامسىز؟

ئالاھىدە ئەھۋالدا، ئەگەر $a>0$، $b>0$ بولسا، $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ نى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا a، b نىڭ ئورنىغا قويساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}\,.$$

ئادەتتە يۇقىرىقى ئىپادىنى تۆۋەندىكى كۆرۈنۈشتە يازىمىز:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}\ (a>0,\ b>0) \qquad (*)$$

يۇقىرىدا بىز گېئومېترىيىلىك شەكىلدىكى يۈزلەرنىڭ مۇناسىۋىتىدىن تەڭسىزلىك (*) كە ئىگە بولدۇق. بۇ تەڭسىزلىكنى تەڭسىزلىكنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىپ بىۋاسىتە كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولامدۇ؟ قېنى بىرلىكتە تەھلىل قىلىپ باقايلى.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \qquad ①$$

نى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت

$$a+b \geqslant \_\_\_\_ \qquad ②$$

نى ئىسپاتلىساقلا بولىدۇ، ② نى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت

$$a+b- \_\_\_\_ \geqslant 0 \qquad ③$$

نى ئىسپاتلىساقلا بولىدۇ، ③ نى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت

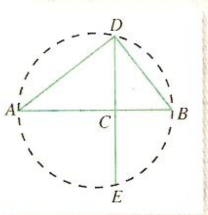
$$(\_\_\_\_ - \_\_\_\_)^2 \geqslant 0 \qquad ④$$

نى ئىسپاتلىساقلا بولىدۇ.

روشەنكى، ④ كۈچكە ئىگە. پەقەت ۋە پەقەت $a=b$ بولغاندىلا، ④ دىكى تەڭلىك بەلگىسى كۈچكە ئىگە بولىدۇ.

شۇنداق قىلىپ، ئاساسىي تەڭسىزلىك (*) نى يەنە بىر قېتىم كەلتۈرۈپ چىقارغان بولدۇق.

ئىزدىنىش



3.4.3 ـ رەسىم

3.4.3 ـ رەسىمدە، AB چەمبەرنىڭ دىئامېترى، C نۇقتا AB ئۈستىدىكى بىر نۇقتا، $AC=a$، $BC=b$، C نۇقتا ئارقىلىق AB غا تىك قىلىپ DE خوردا يۈرگۈزۈلۈپ، A بىلەن D، B بىلەن D تۇتاشتۇرۇلغان. تەڭسىزلىك (*) نىڭ گېئومېترىيىلىك چۈشەندۈرۈلۈشىنى مۇشۇ شەكىلدىن پايدىلىنىپ بايان قىلالامسىز؟

3.4.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $\triangle ACD \backsim \triangle BCD$ نى ئىسپاتلىساق، بۇنىڭدىن $CD=\sqrt{ab}$ كېلىپ چىقىدۇ. CD چەمبەر رادىئۇسىدىن كىچىك ياكى ئۇنىڭغا تەڭ بولغانلىقتىن، ئۇنى تەڭسىزلىك بىلەن تۆۋەن-

دىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

روشەنكى، يۇقىرىقى تەڭسىزلىكتە پەقەت ۋە پەقەت C نۇقتا چەمبەر مەركىزى بىلەن ئۇستمۇئۇست چۈشكەندە، يەنى $a=b$ بولغاندىلا، تەڭلىك بەلگىسى كۆچكە ئىگە بولىدۇ.

ئادەتتە بىز $\frac{a+b}{2}$ نى مۇسبەت سان a، b نىڭ ئارىفمېتىكىلىق ئوتتۇرىچە سانى، $\sqrt{ab}$ نى مۇسبەت سان a، b نىڭ گېئومېترىيىلىك ئوتتۇرىچە سانى دەپ ئاتايمىز.

تەڭسىزلىك (*) بىر ئاساسىي تەڭسىزلىك بولۇپ، ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا كەڭ قوللىنىلىدۇ، ئۇ يەنە ئەڭ چوڭ (كىچىك) قىممەت مەسىلىسىنى ھەل قىلىشنىڭ كۈچلۈك قورالى ھېسابلىنىدۇ.

تۆۋەندە ئىككى مىسالنى كۆرۈپ باقايلى.

1 ـ مىسال. (1) مەيدانى (يۈزى) $100\,\mathrm{m}^2$ كېلىدىغان تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىقنى چىتلاق بىلەن قورشاشتا، بۇ تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى ئايرىم ـ ئايرىم قانچىلىك بولغاندا، ئىشلىتىلىدىغان چىتلاق ئەڭ قىسقا بولىدۇ؟ چىتلاقنىڭ ئەڭ قىسقا ئۇزۇنلۇقى قانچىلىك؟

(2) $36\mathrm{m}$ ئۇزۇنلۇقتىكى بىر بۆلەك چىتلاقتىن بىر تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىق قورشاپ چىقىشتا، بۇ تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى ئايرىم ـ ئايرىم قانچىلىك بولغاندا، كۆكتاتلىقنىڭ مەيدانى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟ ئەڭ چوڭ مەيدانى قانچىلىك؟

تەھلىل: (1) دە، تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىقنىڭ مەيدانى ئېنىق بولۇپ، ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئېنىق ئەمەس. ئەگەر كۆكتاتلىقنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئېنىقلانسىلا، چىتلاقنىڭ ئۇزۇنلۇقىمۇ ئېنىقلانغان بولىدۇ، شۇڭا بۇ يەردە تۆۋەندىكى مەسىلىنى ھەل قىلىشىمىز كېرەك: كۆكتاتلىقنىڭ مەيدانى ئېنىق بولغاندا، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى قانداق قىممەت ئالسا چىتلاقنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئەڭ قىسقا بولىدۇ؟

(2) دە، تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىقنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى ئېنىق بولۇپ، ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئېنىق ئەمەس، ئەگەر تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىقنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئېنىقلانسا، ئۇنىڭ مەيدانىمۇ ئېنىقلانغان بولىدۇ. شۇڭا، بۇ يەردە تۆۋەندىكى مەسىلىنى ھەل قىلىشىمىز كېرەك: كۆكتاتلىقنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى ئېنىق بولغاندا، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى قانداق قىممەت ئالسا چىتلاق بىلەن قورشالغان مەيدان ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

يېشىش: (1) تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىقنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى $x\mathrm{m}$، كەڭلىكىنى $y\mathrm{m}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $xy=100$ بولۇپ، چىتلاقنىڭ ئۇزۇنلۇقى $2(x+y)\ \mathrm{m}$ بولىدۇ.

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

كە ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$x+y \geqslant 2\sqrt{100},$$

$$2(x+y) \geqslant 40.$$

تەڭلىك بەلگىسى پەقەت ۋە پەقەت $x=y$ بولغاندىلا كۈچكە ئىگە بولۇپ، بۇ چاغدا $x=y=10$ بولىدۇ.

شۇڭا، بۇ تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئوخشاشلا $10\,\mathrm{m}$ بولسا، ئىشلىتىلىدىغان چىتلاق ئەڭ قىسقا بولىدۇ، ئۇنىڭ ئەڭ قىسقا ئۇزۇنلۇقى $40\,\mathrm{m}$.

(2) تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىقنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى $x\,\mathrm{m}$، كەڭلىكىنى $y\mathrm{m}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $2(x+y)=36$، $x+y=18$ بولۇپ، تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىقنىڭ مەيدانى $xy\mathrm{m}^2$ بولىدۇ.

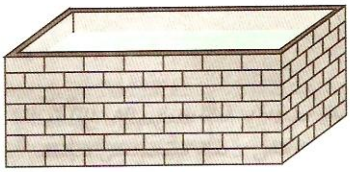
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

غا ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$xy \leqslant 81,$$

پەقەت ۋە پەقەت $x=y$، يەنى $x=y=9$ بولغاندىلا، تەڭلىك بەلگىسى كۈچكە ئىگە بولىدۇ.

شۇڭا، بۇ تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئوخشاشلا $9\,\mathrm{m}$ بولسا، كۆكتاتلىقنىڭ مەيدانى ئەڭ چوڭ بولىدۇ، ئۇنىڭ ئەڭ چوڭ مەيدانى $81\,\mathrm{m}^2$.



2 ـ مىسال. مەلۇم زاۋۇت سىغىمى $4800\mathrm{m}^3$، چوڭقۇرلۇقى $3\mathrm{m}$ كېلىدىغان پاراللېلېپىپېد شەكىللىك بىر قاپقاقسىز سۇ كۆلچىكى ياسىماقچى بولدى. ئەگەر كۆلچەك تۈۋىنىڭ ھەر كۋادرات مېترىنىڭ پۈتۈش باھاسى 150 يۈەن، كۆلچەك تېمىنىڭ ھەر كۋادرات مېترىنىڭ پۈتۈش باھاسى 120 يۈەن بولسا، سۇ كۆلچىكىنى قانداق لايىھىلىگەندە ئومۇمىي پۈتۈش باھاسى ئەڭ تۆۋەن بولىدۇ؟ ئەڭ تۆۋەن ئومۇمىي پۈتۈش باھاسى قانچىلىك بولىدۇ؟

تەھلىل: پاراللېلېپىپېد شەكلىدىكى بۇ سۇ كۆلچىكىنىڭ ئېگىزلىكى $3\mathrm{m}$ بولۇپ، تۈۋىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئېنىق ئەمەس. ئەگەر تۈۋىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى ئېنىقلانسىلا، ئومۇمىي پۈتۈش باھاسىمۇ ئېنىقلانغان بولىدۇ. شۇڭا، تۈۋىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى قانداق قىممەت ئالسا سۇ كۆلچىكىنىڭ ئومۇمىي پۈتۈش باھاسى ئەڭ تۆۋەن بولىدىغانلىقىنى تەكشۈرۈش كېرەك.

يېشىش: تۈۋىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى $x\,\mathrm{m}$، كەڭلىكىنى $y\,\mathrm{m}$، سۇ كۆلچىكىنىڭ ئومۇمىي پۈتۈش باھاسىنى z يۈەن دەپ پەرەز قىلساق، مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن:

$$z = 150 \times \frac{4\,800}{3} + 120(2\times 3x + 2\times 3y)$$

$$= 240\,000 + 720(x+y)$$

سىغىمىنىڭ $4\,800\mathrm{m}^3$ بولغانلىقىغا ئاساسەن:

$$3xy = 4\,800,$$

شۇڭا

$$xy = 1\,600.$$

ئاساسىي تەڭسىزلىك ۋە تەڭسىزلىكنىڭ خۇسۇسىيىتىگە ئاساسەن:

$$240\,000 + 720(x+y) \geqslant 240\,000 + 720\times 2\sqrt{xy},$$

يەنى

$$z \geqslant 240\,000 + 720\times 2\sqrt{1\,600},$$

$$z \geqslant 297\,600$$

$x=y$، يەنى $x=y=40$ بولغاندا، تەڭلىك بەلگىسى كۈچكە ئىگە بولىدۇ.

شۇڭا، كۆلچەكنىڭ تۈۋىنى تەرەپ ئۇزۇنلۇقى $40\,\mathrm{m}$ بولغان كۋادرات قىلىپ لايىھىلىگەندە ئومۇمىي پۈتۈش باھاسى ئەڭ تۆۋەن بولىدۇ، ئەڭ تۆۋەن ئومۇمىي پۈتۈش باھاسى 297 600 يۈەن.

مەشىق

1. $x>0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، x قانداق قىممەت ئالغاندا، $x+\dfrac{1}{x}$ نىڭ قىممىتى ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟ ئەڭ كىچىك قىممىتى قانچە؟

2. تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزى 50 كە تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئۇنىڭ ئىككى تىك تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم قانچىلىك بولغاندا، ئۇلارنىڭ يىغىندىسى ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟ ئەڭ كىچىك قىممىتى قانچە؟

3. 20cm ئۇزۇنلۇقتىكى بىر تال سىمنى ئېگىپ بىر تىك تۆتبۇلۇڭ ياساشتا، ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى ئايرىم ـ ئايرىم قانچىلىك بولغاندا يۈزى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

4. ھەجمى $32m^3$، ئېگىزلىكى 2m بولغان پاراللېلىپىپېد شەكىللىك بىر قەغەز كوروپكا ياساشتا، ئاساسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكى قانداق قىممەت ئالغاندا قەغەز ئەڭ ئاز كېتىدۇ؟

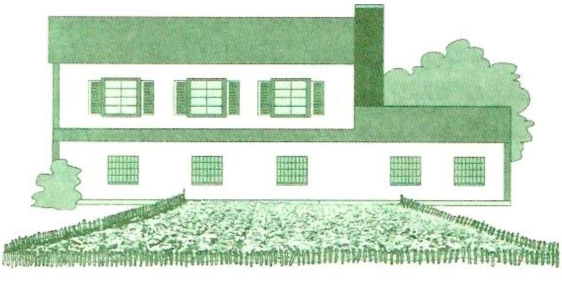
4.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. (1) 36 نى ئىككى مۇسبەت سانىنىڭ كۆپەيتمىسى قىلىپ يېزىشتا، بۇ ئىككى مۇسبەت سان قانداق قىممەت ئالغاندا ئۇلارنىڭ يىغىندىسى ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟

(2) 18 نى ئىككى مۇسبەت سانىنىڭ يىغىندىسى قىلىپ يېزىشتا، بۇ ئىككى مۇسبەت سان قانداق قىممەت ئالغاندا ئۇلارنىڭ كۆپەيتمىسى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

2. 30m ئۇزۇنلۇقتىكى چىتلاق بىلەن بىر تەرىپى تامغا تېگىشىپ تۇرىدىغان تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك كۆكتاتلىق قورشاپ چىقىشتا، تامنىڭ ئۇزۇنلۇقى 18m بولسا، بۇ تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى قانچىلىك بولغاندا كۆكتاتلىقنىڭ مەيدانى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟ ئەڭ چوڭ مەيدانى قانچىلىك؟



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

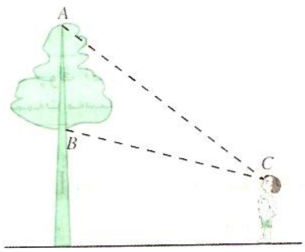
3. ئايلانما ئۇزۇنلۇقى 36 بولغان تىك تۆتبۇلۇڭنى ئۇنىڭ بىر تەرىپىنى چۆرىدىتىپ ئايلاندۇرغاندا بىر سىلىندىر ھاسىل بولىدۇ. تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى ئايرىم ـ ئايرىم قانچىلىك بولغاندا، ئايلاندۇرۇشتىن كېلىپ چىققان سىلىندىرنىڭ يان سىرتى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

4. مەلۇم ئىدارە ئارقا تەرىپى تامغا يۆلەنگەن بىر ئىبتىز ئۆي سالماقچى. ئۆينىڭ يەر يۈزى $12\,\mathrm{m}^2$ بولۇپ، ئالدى تېمىنىڭ ھەر كۋادرات مېتىرىنىڭ پۈتۈش باھاسى 1200 يۈەن، يان تېمىنىڭ ھەر كۋادرات مېتىرىنىڭ پۈتۈش باـ ھاسى 800 يۈەن، تورۇسىنىڭ پۈتۈش باھاسى 5800 يۈەن. ئەگەر تامنىڭ ئېگىزلىكى $3\,\mathrm{m}$ بولسا ھەمدە ئۆينىڭ ئارقا تەرىپى بىلەن يەر يۈزىنىڭ خىراجىتى ھېسابقا ئېلىنمىسا، ئۆينى قانداق لايىھىلىگەندە ئومۇمىي پۈتۈش باھاسى ئەڭ تۆۋەن بولىدۇ؟ ئەڭ تۆۋەن ئومۇمىي پۈتۈش باھاسى قانچىلىك؟

B گۇرۇپپا

1. ئايلانما ئۇزۇنلۇقى 24 بولغان تىك تۆتبۇلۇڭ $ABCD(AB>AD)$ نى AC نى بويلاپ قاتلىساق، AB، CD لار P نۇقتىدا كېسىشىدۇ. $AB=x$ دەپ پەرەز قىلىپ، $\triangle ADP$ نىڭ ئەڭ چوڭ يۈزى ۋە ماس x نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

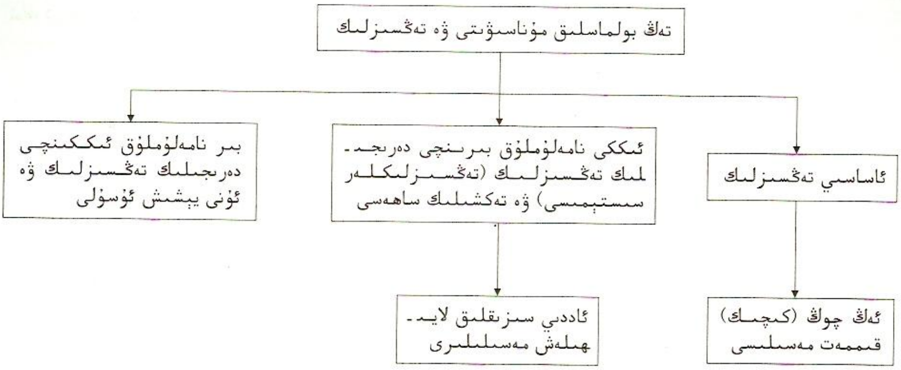
2. رەسىمدىكىدەك، دەرەخ ئۇچى A دىن يەر يۈزىگىچە بولغان ئا- رىلىق $a\,\mathrm{m}$، دەرەختىكى يەنە بىر B نۇقتىدىن يەر يۈزىگىچە بولغان ئارىلىق $b\,\mathrm{m}$. يەر يۈزىدىن $c\,\mathrm{m}$ ئېگىزلىكتىكى C نۇقتىدىن بۇ دە- رەخكە قارىغاندا، C نۇقتا بىلەن دەرەخنىڭ ئارىلىقى قانچىلىك بول- غاندا A، B غا قاراش بۇلۇڭى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. رېئال دۇنيا ۋە كۈندىلىك تۇرمۇشتا نۇرغۇنلىغان تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرى بار، سىز بۇ ھەقتە بىر - ئىككى مىسال كەلتۈرۈپ، بۇ تەڭ بولماسلىق مۇناسىۋەتلىرىنى تەڭسىزلىكتىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلىيەلەمسىز؟

2. شەيئىلەرنىڭ ئۆزگىرىش جەريانىدا، تەڭ بولۇش ۋە تەڭ بولماسلىقنى ئۆزئارا ئايلاندۇرۇشقا بولىدۇ، بۇ خىل ئايلاندۇرۇشنى بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە ۋە بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە بىلەن بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكنى ئۆزئارا باغلاشتۇرۇش جەريانىدا ناھايىتى ياخشى ئەكس ئەتتۈرۈشكە بولىدۇ. مۇشۇنداق ئايلاندۇرۇش بولغانلىقتىن، بىزنىڭ تەڭسىزلىكنى تەڭلىمىنىڭ يېشىمى ۋە فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىدىن پايدىلىنىپ يېشىشىمىزگە ئىمكانىيەت يارىتىلىدۇ. سىز بۇ ئۈچى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئۆزگىرىش نۇقتىسىدىن چىقىپ ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

3. ئىككى نامەلۇملۇق سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسى دېگەندە قانداق مەسىلىلەر كۆزدە تۇتۇلىدۇ؟ بۇنداق مەسىلىلەرنى نېمە ئۈچۈن ئىككى نامەلۇملۇق بىرىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى ئارقىلىق ھەل قىلىشقا بولىدۇ؟

4. ئاساسىي تەڭسىزلىكنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانىدا، بىز ئۇنىڭ ئالگېبرالىق ئارقا كۆرۈنۈشىنى كۆرۈپلا قالماستىن، يەنە ئۇنىڭ گېئومېتىرىيىلىك ئارقا كۆرۈنۈشىنىمۇ كۆردۇق، سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈش بىزنىڭ تەتقىق قىلىشتىكى پىكىر يولىمىزنى ئېچىپ بەردى. سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈش ئىدىيىسىگە بولغان تونۇشىڭىزنى ئاساسىي تەڭسىزلىكنى ئۆگىنىشكە بىرلەشتۈرۈپ سۆزلەپ بېرەلەمسىز؟

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. $\sqrt{\frac{5}{12}}+\sqrt{\frac{1}{5}}$ بىلەن $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{7}}$ نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ.

2. توپلام $A=\{x \mid x^2-x-6<0\}$، $B=\{x \mid x^2+2x-8>0\}$ بېرىلگەن، $A \cap B$ نى تېپىڭ.

3. k قانداق قىممەت ئالغاندا، بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ بارلىق ھەقىـ قىي سان x كە نىسبەتەن ھامان كۈچكە ئىگە بولىدۇ؟

4. تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases}4x+3y+8>0,\\ x<0,\\ y<0\end{cases}$$

ئىپادىلەيدىغان تەكشىلىك ساھەسى ئىچىدىكى پۈتۈن نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى __________ بولىدۇ.

5. مەلۇم ترانسپورت شىركىتىدە يۈك كۆتۈرۈشچانلىقى 6t بولغان A تىپلىق 7 ئاپتوموبىل، يۈك كۆتۈرۈشچانلىقى 10t بولغان B تىپلىق 4 ئاپتوموبىل ۋە 9 شوپۇر بار بولۇپ، بۇ شىركەت بىر بۆلەك يۇقىرى سۈرئەتلىك تاشيول قۇرۇ- لۇشىنىڭ كۈنىگە كەم دېگەندە 360t قارامايى توشۇش ۋەزىپىسىنى كۆتۈرە ئالغان. ئەگەر ھەربىر A تىپلىق ئاپتوموبىل- نىڭ كۈنلۈك بېرىپ ـ كېلىش قېتىم سانى 8 قېتىم، كۈنلۈك بېرىپ ـ كېلىش تەننەرخى 160 يۈەن، B تىپلىق ئاپتو- موبىلنىڭ كۈنلۈك بېرىپ ـ كېلىش قېتىم سانى 6 قېتىم، كۈنلۈك بېرىپ ـ كېلىش تەننەرخى 252 يۈەن ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ھەر كۈنى A تىپلىق ئاپتوموبىل بىلەن B تىپلىق ئاپتوموبىلنىڭ ھەرقايسىسىدىن قانچىنى يولغا چى- قارغاندا، شىركەت چىقىم قىلىدىغان تەننەرخ ئەڭ تۆۋەن بولىدۇ؟

6. يۈزى مۇقىم قىممەت S بولغان سېكتورنىڭ رادىئۇسى قانچىلىك بولغاندا ئۇنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟

7. ئايلانما ئۇزۇنلۇقى مۇقىم قىممەت P بولغان سېكتورنىڭ رادىئۇسى قانچىلىك بولغاندا ئۇنىڭ يۈزى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

8. A، B ئىككى جاينىڭ ئارىلىقى s km كېلىدۇ، ئاپتوموبىل A جايدىن تەكشى تېزلىك بىلەن B جايغا بېرىشتا، تېزلىكى c km/h تىن ئېشىپ كەتسە بولمايدۇ. ئاپتوموبىلنىڭ سائەتلىك يۈك توشۇش تەننەرخى (بىرلىكى: يۈەن) ئۆز- گىرىشچان قىسىم ۋە مۇقىم قىسىمدىن تەركىب تاپقان بولۇپ، ئۆزگىرىشچان قىسىم تېزلىك v (بىرلىكى: km/h) نىڭ كۋادراتى بىلەن ئوڭ تاناسىپ، تۇرىدۇ ھەمدە تاناسىپلىق كوئېففىتسېنتى b، مۇقىم قىسىم a يۈەن ($a<bc^2$). پۈتۈن مۇساپىدىكى يۈك توشۇش تەننەرخىنى ئەڭ كىچىك قىلىش ئۈچۈن، ئاپتوموبىل قانچىلىك تېزلىك بىلەن مېڭىشى كې- رەك؟

B گۇرۇپپا

1. ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭسىزلىك $ax^2+bx+c<0$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى بارلىق ھەقىقىي سانلار بولۇشىنىڭ

شەرتى (　　).

(A) $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta > 0. \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$　　(C) $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta > 0. \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$

2. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسىنى يېشىڭ:

(1) $\begin{cases} 4x^2 - 27x + 18 > 0, \\ x^2 + 4x + 4 > 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \geqslant 0, \\ 4x^2 - 15x + 9 > 0. \end{cases}$

3. ئەگەر x كە دائىر تەڭسىزلىك $-\frac{1}{2}x^2 + 2x > mx$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى $\{x \mid 0<x<2\}$ بولسا، m نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. مەلۇم كىيىم - كېچەك ئىشلەپچىقىرىش سودىگىرىنىڭ $10\,\mathrm{m}^2$ پاختا رەخت، $10\,\mathrm{m}^2$ يۇڭ رەخت ۋە $6\,\mathrm{m}^2$ يىپەك رەختى بار. بىر ئىشتان تىكىشكە $1\,\mathrm{m}^2$ پاختا رەخت، $2\,\mathrm{m}^2$ يۇڭ رەخت، $1\,\mathrm{m}^2$ يىپەك رەخت، بىر يوپكا تىكىشكە $1\,\mathrm{m}^2$ پاختا رەخت، $1\,\mathrm{m}^2$ يۇڭ رەخت، $1\,\mathrm{m}^2$ يىپەك رەخت كېتىدۇ. بىر ئىشتاننىڭ ساپ پايدىسى 20 يۈەن، بىر يوپكىنىڭ ساپ پايدىسى 40 يۈەن بولۇپ، هازىر پايدىنى ئەڭ كۆپ قىلىش ئۈچۈن، بۇ ئىككى خىل كىيىمنى ئىشلەپچىقىرىش پىلانىنى ئورۇنلاشتۇرۇشقا توغرا كەلدى. ئىشلەپچىقىرىلىدىغان بۇ ئىككى خىل كىيىمنىڭ سانى قانائەتلەندۈرىدىغان ماتېماتىكىلىق مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى تۈزۈڭ ھەمدە شەكلىنى سىزىڭ.

5. $\begin{cases} 2x + y - 2 \geqslant 0, \\ x - 2y + 4 \geqslant 0, \\ 3x - y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$

بېرىلگەن. x، y قانداق قىممەت ئالغاندا، $x^2 + y^2$ ئەڭ چوڭ قىممەت، ئەڭ كىچىك قىممەت ئالىدۇ؟ ئەڭ چوڭ، ئەڭ كىچىك قىممىتى ئايرىم - ئايرىم قانچە؟

6. بىر خىل نەرسىنى ئىككى قېتىم سېتىۋېلىشتا، ئوخشاش بولمىغان ئىككى خىل ئۇسۇلنى قوللىنىشقا بولىدۇ. بىرىنچى خىلى، نەرسە باھاسىنىڭ ئۆرلەش - تۆۋەنلىشىنى ئويلاشماي، ھەر قېتىمدا سېتىۋالىدىغان نەرسىنىڭ سانىنى مۇقىم قىلىش؛ ئىككىنچى خىلى، نەرسە باھاسىنىڭ ئۆرلەش - تۆۋەنلىشىنى ئويلاشماي، ھەر قېتىمدا نەرسە سېتىۋېلىش ئۈچۈن خەجلەيدىغان پۇل سانىنى مۇقىم قىلىش. قايسى خىل سېتىۋېلىش ئۇسۇلى تېجەشلىكرەك بولىدۇ؟كەلتۈرۈپ چىقارغان يەكۈنىڭىزنى كېڭەيتەلەمسىز؟

خاتىمە

پارتىيىنىڭ مائارىپ فاڭجېنىنى ئومۇميۈزلۈك ئىزچىللاشتۇرۇش ھەمدە دەۋر تەرەققىياتىنىڭ ئېھتىياجىغا ماسلىشىپ، ئوقۇغۇچىلارنىڭ ئۆمۈر بويى تەرەققىي قىلىشىغا ئاساس ھازىرلاش ئۈچۈن، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ھەرقايسى پەنلەر دەرس ئۆلچەملىرى (تەجرىبە نۇسخا) گە ئاساسەن، ھەرقايسى پەنلەرنىڭ ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكلىرىنى تۈزۈپ چىقتۇق، تۈزۈش جەريانىدا مائارىپ ساھەسىدىكى كۆپلىگەن پېشقەدەملەر ۋە ھەرقايسى پەن مۇتەخەسسىسلىرىنىڭ قىزغىن ياردىمى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىشىغا ئېرىشتۇق. ھەرقايسى پەن دەرسلىكلىرى دەرس ئىسلاھاتى تەجرىبە رايونلىرىدىكى ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلار بىلەن ئاخىر يۈز كۆرۈشكەن بۇ پەيتتە، دەرسلىكلەرنىڭ باش مەسلىھەتچىسى بولغان دىڭ شىسۈن، شۇ جيالۇ، يې جىشەن، گۇ مىڭيۈەن، لۇ شىڭۋېي، ۋاڭ زىكۈن، لياڭ خېڭ، جىن چۈڭجى، بەي چۈنلى، تاۋ شىپىڭ قاتارلىق يولداشلارغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا دەرسلىك تۈزۈشكە يېتەكچىلىك قىلىش كومىتېتىنىڭ مۇدىرى يولداش لىيۇ بىن ۋە كومىتېت ئەزالىرى جياڭ لەنشېڭ، لى جىلىن، ياڭ خۇەنمىڭ،گۇ لىڭيۈەن، يۈەن خاڭپېي قاتارلىق يولداشلارغىمۇ مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن «ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمى (تەجرىبە نۇسخا)» گە ئاساسەن، بىز بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتىدىكى پروفېسسور لىيۇ شاۋشۆنى باش تۈزگۈچىلىككە تەكلىپ قىلىپ، تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمىنى تەتقىق قىلىش تۈزۈش گۇرۇپپىسىدىكى بىر قىسىم ئەزالار، ئالىي مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرى، ماتېماتىكا تەلىم ـ تەربىيە نەزەرىيىسى خىزمەت خادىملىرى، ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتۇش تەتقىقاتى خادىملىرى ۋە ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرىدىن تۈزۈش كومىتېتى تەشكىللەپ، بۇ بىر يۈرۈش ماتېماتىكا تەجرىبە دەرسلىكىنى تۈزۈپ چىقتۇق. بۇ يەردە، بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتى ماتېماتىكا پېنى ئىنستىتۇتى رەھبەرلىرىنىڭ بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكنى تۈزۈش خىزمىتىگە يۈكسەك ئەھمىيەت بەرگەنلىكى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىغانلىقىغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا مۇشۇ بىر يۈرۈش دەرسلىككە تۈزىتىش پىكرى بەرگەن ۋە ياردىمىنى ئايىمىغان مۇتەخەسسىس، ئالىم، ئوقۇتقۇچى ھەمدە جەمئىيەتنىڭ ھەرقايسى ساھەلىرىدىكى دوستلارغا مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بۇ قىسىم دەرسلىك تۈزۈش كومىتېتىدىكى بارلىق ئەزالارنىڭ كوللېكتىپ ئەقىل ـ پاراسىتىنىڭ نەتىجىسىدۇر. دەرسلىكتە بېرىلگەن ئاساسلىق تۈزگۈچىلەر ۋە مەسئۇل مۇھەررىرىدىن سىرت، بۇ قىسىم دەرسلىكنى مۇزاكىرە قىلىشقا قاتناشقانلاردىن لىيۇ يىجۇ، جياڭ پېيجىن، رېن زىچاۋ، جاڭ جىنسۇڭ، ۋاڭ رۇڭ، جاڭ شۇمېي، لى يۇڭ، ۋاڭ شېنخۇەي، لۇ ۋېيچۈەن، شۇ يۇڭ، لۇ بىن، بەي تاۋ، گۇ دەن قاتارلىقلار بار.

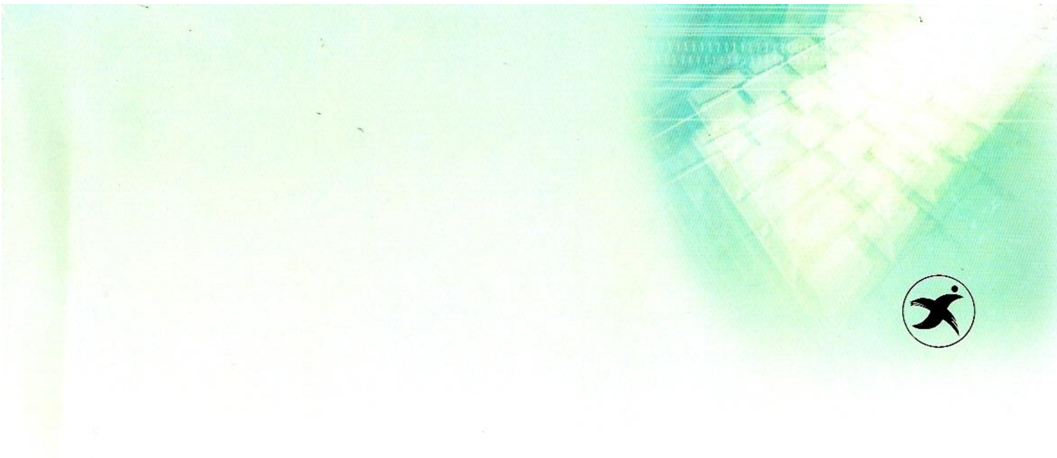
بىز يەنە مۇشۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىۋاتقان ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلارغىمۇ رەھمەت ئېيتىمىز. سىلەرنىڭ بۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىش جەريانىدا پىكىر ۋە تەكلىپلەرنى بىزگە ئۆز ۋاقتىدا يەتكۈزۈپ بېرىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز، شۇنداقلا سىلەرگە چوڭقۇر مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز. ھەممەيلەن قول تۇتىشىپ، ئوقۇتۇش ماتېرىيالى قۇرۇلۇشى خىزمىتىنى بىرلىكتە ئورۇندايلى. ئالاقىلىشىش شەكلى:

Tel: (010) 58758318

E-mail: yuqs@pep.com.cn

خەلق مائارىپ نەشرىياتى دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ئورنى

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ـ ئېچىش مەركىزى



ISBN978-7-5370-6735-5

باھاسى: 7.32 يۈەن