2004 - يىلى مەملىكەتلىك ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپ ئوقۇتۇش ماتېرىياللىرىنى
تەكشۈرۈپ بېكىتىش كومىتېتىنىڭ دەسلەپكى تەكشۈرۈشىدىن ئۆتكەن

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا 4

زۆرۈر دەرسلىك

شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

تەرجىمانى: رەمىلە ئابدۇرېشىت
مۇھەررىرى: ھەمىت راخمان
مەسئۇل مۇھەررىرى: ئۆركەش ئابدۇرېھىم
مەسئۇل كوررېكتورى: ئارزۇگۇل ھېيتەم

译　　者：热米拉·阿布都热西提
复　　审：依米提·热合曼
责任编辑：吾尔卡西·阿布都热依木
责任校对：阿孜古丽·艾塔木

普通高中课程标准实验教科书

数 学 4

必修

A 版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

(维吾尔文)

*

شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى تەرجىمە ۋە نەشر قىلدى
شىنجاڭ شىنخۇا كىتابخانىسى تارقاتتى
http://www.xjjycbs.com
شىنجاڭ شىنبوۋېن باسما چەكلىك مەسئۇلىيەت شىركىتى باستى
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى كومپيۇتېر مەركىزى تىزدى

*

فورماتى: 1240 × 890، 1/16؛ باسما تاۋىقى:
2008 - يىل 6 - ئاي 1 - نەشرى
2009 - يىل 6 - ئاي 2 - بېسىلىشى
تىراژى: 1 — 10 000
ISBN 978 — 7 — 5370 — 6734 — 8

باھاسى: 9.56 يۈەن

ئادرېس: ئۈرۈمچى شەھىرى غالىبىيەت يولى 187 - نومۇر
پوچتا نومۇرى: 830049؛ تېلېفون نومۇرى: 2863761, 2870654 (0991)

باش تونۇشتۇرۇش

ساۋاقداشلار، بۇ بىر يۈرۈش ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسلىكىنى ئىشلەتكە-
نىڭلارنى قىزغىن قارشى ئالىمىز ھەم بۇ دەرسلىكلەرنىڭ ماتېماتىكا ئۆگىنىشتىكى ياخشى دوستۇڭلار
بولۇپ قېلىشىنى ئۈمىد قىلىمىز.

سىلەر بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتىن پايدىلىنىپ ماتېماتىكا ئۆگىنىشنى باشلاشتىن ئىلگىرى، نېمە
ئۈچۈن ماتېماتىكا ئۆگىنىش كېرەك؟ قانداق قىلغاندا ماتېماتىكىنى ياخشى ئۆگەنگىلى بولىدۇ؟ دېگەندەك
مەسىلىلەر ئۈستىدە بەزى ئوي - پىكىرلىرىمىزنى ئوتتۇرىغا قويماقچىمىز.

نېمە ئۈچۈن ماتېماتىكا ئۆگىنىش كېرەك؟ بۇ مەسىلە ئۈستىدىكى قاراشلىرىمىزنى ئىككى تەرەپتىن
چىقىپ بايان قىلىمىز.

ماتېماتىكا بىزگە ئەسقاتىدۇ. تۇرمۇش، ئىشلەپچىقىرىش، ئىلىم - پەن ۋە تېخنىكا، شۇنداقلا مۇ-
شۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتىن ماتېماتىكىنىڭ نۇرغۇن قوللىنىشلىرىنى كۆرگىلى بولىدۇ. «سانلىق مۇنا-
سىۋەت ۋە ئۇنىڭ بوشلۇقتىكى شەكلى» ئەمەلىيەت، نەزەرىيە، ماددىي دۇنيا ۋە روھىي دۇنيانىڭ ھەممىلا
يېرىدە مەۋجۇت بولغانلىقتىن، ئاشۇ «سانلىق مۇناسىۋەت ۋە ئۇنىڭ بوشلۇقتىكى شەكلى» نى تەتقىق قىد-
لىدىغان ماتېماتىكىمۇ ئەلۋەتتە ھەممىلا يەردە ئىشلىنىدۇ. ماتېماتىكا ھەممەيلەننىڭ ئەتراپىدا مەۋجۇت
بولۇپ، ئۇ ئىلىم - پەننىڭ تىلى، بارلىق ئىلىم - پەن ۋە تېخنىكىنىڭ ئاساسى، شۇنداقلا تەپەككۇر قىد-
لىشىمىز ۋە مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشىمىزدا كەم بولسا بولمايدىغان قورال ھېسابلىنىدۇ.

ماتېماتىكا ئۆگىنىش ئارقىلىق قابىلىيەتنى ئۆستۈرگىلى بولىدۇ. ھەممەيلەندە شۇنداق بىر تۇيغۇ
باركى، ماتېماتىكىنى ياخشى ئۆگەنگەن ئادەم باشقا نەزەرىيىلەرنىمۇ ئاسان ئۆگىنىۋالالايدۇ. ئەمەلىيەتتە،
نەزەرىيىلەر ئارىسىدا ئۆزئارا تۇتىشىدىغان ۋە ئورتاق تەرەپلەر بولىدۇ، «سانلىق مۇناسىۋەت ۋە ئۇنىڭ
بوشلۇقتىكى شەكلى»، لوگىكىلىق قۇرۇلما ۋە ئىزدىنىپ تەپەككۇر قىلىش قاتارلىقلار بۇ نەزەرىيىلەر-
نىڭ ئىرىكى ياكى تومۇرى بولۇپ، ماتېماتىكا دەل ئۇلارنىڭ يادروسى بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ماتېماتىكا
ئۆگىنىش داۋامىدىكى مەشغۇلات ۋە تەربىيىلىنىشلەر بىزنىڭ باشقا نەزەرىيىلەرنى ئۆگىنىشىمىزگە ناھا-
يىتى ياخشى ياردەم بېرىدۇ، ماتېماتىكا ساپاسىنىڭ يۇقىرى كۆتۈرۈلۈشى شەخس قابىلىيىتىنىڭ تەرەق-
قىي قىلىشىدا ئىنتايىن مۇھىم رول ئوينايدۇ.

ئۇنداق بولسا، قانداق قىلغاندا ماتېماتىكىنى ياخشى ئۆگەنگىلى بولىدۇ؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، ئالدى بىلەن
ماتېماتىكىغا نىسبەتەن توغرا تونۇشنى تىكلىۋېلىش كېرەك.

ماتېماتىكا تەبىئىي يوسۇندا ۋۇجۇدقا چىققان پەندۇر. بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتىكى ماتېماتىكا
مەزمۇنلىرى ئىنسانلارنىڭ ئۇزاق مۇددەتلىك ئەمەلىيىتى جەريانىدا تاۋلىنىپ چىققان ماتېماتىكا جەۋ-
ھەرلىرى ۋە ماتېماتىكا ئاساسلىرى بولۇپ، ئۇنىڭدىكى ماتېماتىكىلىق ئۇقۇم، ماتېماتىكىلىق ئۇسۇل ۋە
ماتېماتىكىلىق ئىدىيىلەرنىڭ ھەممىسى تەبىئىي يوسۇندا مەيدانغا چىققان ھەم تەرەققىي قىلغان. ئەگەر
سىز بۇ ماتېماتىكا مەزمۇنلىرى ئىچىدىكى مەلۇم بىر ئۇقۇمنى تەبىئىي ئەمەس، زورمۇزور كەلتۈرۈپ
چىقىرىلغان دەپ قارىسىڭىز، ئۇ ھالدا شۇ ئۇقۇمنىڭ ئارقا كۆرۈنۈشى، شەكىللىنىش جەريانى، قوللىنى-
لىشى ۋە ئۇنىڭ بىلەن باشقا ئۇقۇملار ئارىسىدىكى باغلىنىش ئۈستىدە ئويلىنىپ كۆرسىڭىزلا، ئۇنىڭ
پىششىپ يېتىلگەن شارائىتتا تەبىئىي ھالدا بارلىققا كەلگەن ئەقلىگە مۇۋاپىق ھاسىلات بولۇپ، ھەتتا
ئىنسانىي پۇراقىمۇ ئىگە ئىكەنلىكىنى بايقىيالايسىز. بۇنداق تەپەككۇر قىلىش ھەممەيلەننىڭ ماتېماتىكا

ئۆگىنىشىگە ياردەم بېرىدۇ.

ماتېماتىكا ئېنىق پەندۇر. ئېنىق ئالدىنقى شەرت ۋە ئېنىق ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشتىن ئېنىق يەكۈن كېلىپ چىقىدۇ، ماتېماتىكىدىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرىسى توغرا، خاتاسى خاتا بولۇپ، ئۇنىڭدا ھېچقانداق مۈجمەللىك مەۋجۇت بولمايدۇ. ماتېماتىكا ئېنىق پەن بولغانلىقى ئۈچۈن، بىز ئۇنى ئۆگىنىش ئاسان دەپ ئېيتالايمىز، ھەممەيلەن ماتېماتىكا قائىدىلىرى ئاساسىدا تەرتىپ بويىچە ئۆگىنىپ، قەدەممۇ-قەدەم پىكىر يۈرگۈزسەك، ئۇنى چوقۇم چۈشەنگەن ھالدا ئۆگىنىپ كېتەلەيمىز؛ ماتېماتىكا ئېنىق پەن بولغانلىقى ئۈچۈن، بىز يەنە ئۇنى ئۆگىنىش تەس دەپمۇ ئېيتالايمىز. بۇنىڭ سەۋەبى شۇكى، ئەگەر بەزىلەر ماتېماتىكا قائىدىلىرى بويىچە ئۆگەنمەي ۋە پىكىر يۈرگۈزمەي، ھە دېسىلا ئۆزىنىڭ «شۇنداق بولۇشى كېرەك» دەپ ئويلىغانلىرىنى ماتېماتىكىغا زورمۇزور تېڭىپ، قوشۇشنى ئۆگەنمەي تۇرۇپلا كۆپەيتىشنى ئۆگىنىمەن دېسە، ئۇ ھالدا ھەربىر قەدەمدە توسالغۇغا ئۇچراپ، ئۆگىنىشنى داۋاملاشتۇرالماي قالىدۇ.

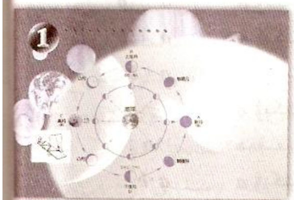
ماتېماتىكىغا نىسبەتەن توغرا تونۇش تىكلىۋالغاندىن كېيىن، يەنە ئۆگىنىش ئۇسۇلىغىمۇ ئەھمىيەت بېرىش لازىم.

ماتېماتىكىنى ئۆگىنىشتە ھەربىر ئادەم ئۆزىگە خاس ئۆگىنىش ئۇسۇلىنى شەكىللەندۈرۈۋېلىشى كېرەك. ماتېماتىكا بىلىملىرىنى ئۆگىنىش، ئىگىلەش ۋە ئۇنىڭدىن جانلىق پايدىلىنىشنىڭ يوللىرى ناھايىتى كۆپ، ھەربىر ئادەمنىڭ باشقىلارنىڭكىگە ئوخشىمايدىغان ماتېماتىكا ئۆگىنىش ئۇسۇلى بولىدۇ. كۆنۈكمىلەرنى ئىشلەش، ماتېماتىكىدىن پايدىلىنىپ ھەر خىل مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش، ئۇقۇملارنى چۈشىنىش، ئىسپاتلاشنى ئۆگىنىۋېلىش، ماتېماتىكىلىق ئىدىيىلەرنى ئۆزلەشتۈرۈۋېلىش، ماتېماتىكىلىق ئۇسۇللارنى ئىگىلەش قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى ناھايىتى مۇھىم، لېكىن سوئالنىڭ رولىنى جارى قىلدۇرۇشقىمۇ سەل قارىماسلىق كېرەك، چۈنكى سوئاللار بىزنىڭ تەشەببۇسكارلىق بىلەن جانلىق ئۆگىنىشىمىزگە تۈرتكە بولۇپ، ئۆگىنىشتىكى ئىزدىنىشچانلىقىمىزنى كۈچەيتىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئورۇنلۇق سوئاللارنى دەل ۋاقتىدا ئوتتۇرىغا قويۇشنى ئۆگىنىۋېلىپ، ئۆزىمىز ۋە باشقىلار ئوتتۇرىغا قويغان سوئاللارنى ئۆگىنىشنى قانات يايدۇرۇش كېرەك. بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكتە بىز ئىمكانىيەت بارلىكى يەردە سوئاللارنى ئوتتۇرىغا قويدۇق، بۇنداق قىلغاندا سېلىشتۇرمىلىقى ۋە باغلىنىشلىقى بولغان ھالدا ئۆگەنگىلى بولىدۇ ـ دە، بىر تەرەپتىن، ئومۇمىي ئۇقۇملاردىن ئۇنىڭ ئارقا كۆرۈنۈشىنى كۆرۈۋالغىلى، ئۇقۇملارنىڭ «پۇچەك» بولۇپ قېلىشىدىن ساقلانغىلى بولىدۇ، يەنە بىر تەرەپتىن، كونكرېت مىساللاردىن ئۇ ئۆز ئىچىگە ئالغان ئادەتتىكى ئۇقۇملارنى تەسەۋۋۇر قىلىپ، شەيئىلەرنى «روھىي» مەنىگە ئىگە قىلغىلى بولىدۇ.

ساۋاقداشلار، **ياش چېغىڭلاردا پۇرسەتنى قولدىن بەرمەي ماتېماتىكا ئۆگىنىڭلار.** ھازىر ئۆمرۈڭلاردىكى ماتېماتىكا مەشغۇلاتلىرىنى قوبۇل قىلىش، ماتېماتىكا ئاساسىنى پۇختا ھازىرلاشنىڭ ئەڭ ياخشى مەزگىلى، بۇ مەزگىلدە كۈچ سەرپ قىلىپ ماتېماتىكا ئۆگىنىۋالساڭلار، ئۇنىڭدىن بىر ئۆمۈر مەنپەئەت ئالىسىلەر. بىز سىلەر ئۈچۈن مانا بۇ ماتېماتىكا دۇنياسىنى بەرپا قىلدۇق، ئۇنىڭ ھەممىڭلارنىڭ ئۆسۈپ يېتىلىشىڭلارغا پايدىلىق بولۇشىنى ئۈمىد قىلىمىز. سىلەر مانا مۇشۇ ماتېماتىكا دۇنياسىنىڭ خوجايىنى، ئۆگىنىش داۋامىدا ئۇنىڭغا قارىتا قىممەتلىك پىكىرلەرنى بېرىشىڭلارنى، بۇ ماتېماتىكا دۇنياسىدا كۆڭۈللۈك ياشىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز.

بۇ كىتابتىكى قىسمەن ماتېماتىكىلىق بەلگىلەر

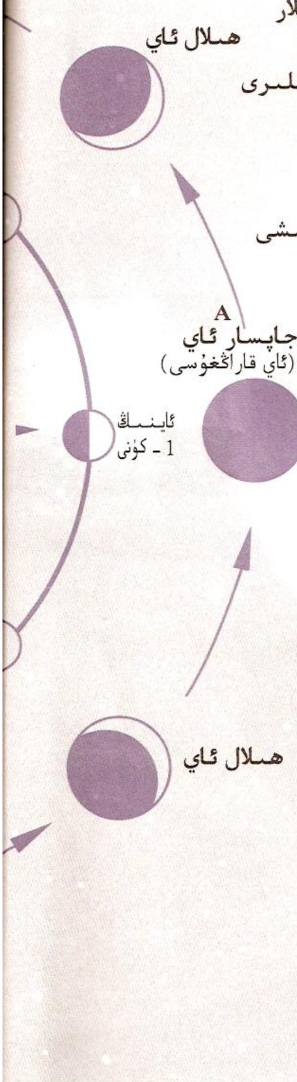
$\sin x$	x نىڭ سىنۇسى
$\cos x$	x نىڭ كوسىنۇسى
$\tan x$	x نىڭ تانگېنسى
$\sin^2 x$	$\sin x$ نىڭ كۋادراتى
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$ ۋېكتور
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$ ۋېكتور
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	$\boldsymbol{a}$ۋېكتورنىڭ مودېلى (ياكى ئۇزۇنلۇقى)
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	$\overrightarrow{AB}$ ۋېكتورنىڭ مودېلى (ياكى ئۇزۇنلۇقى)
0	نۆل ۋېكتور
$\boldsymbol{e}$	بىرلىك ۋېكتور
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$	تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى x، y ئوق يۆنىلىشىدىكى بىرلىك ۋېكتورلار
$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ ۋېكتور بىلەن $\boldsymbol{b}$ ۋېكتور پاراللېل (سىزىقداش)
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ ۋېكتور بىلەن $\boldsymbol{b}$ ۋېكتور ئۆزئارا تىك
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ ۋېكتور بىلەن $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورنىڭ يىغىندىسى
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	a ۋېكتور بىلەن $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورنىڭ ئايرىمىسى
$\lambda\boldsymbol{a}$	ھەقىقىي سان λ بىلەن $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنىڭ كۆپەيتمىسى
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ ۋېكتور بىلەن $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورنىڭ سكاليار كۆپەيتمىسى



مۇندەرىجە

1 ـ باب

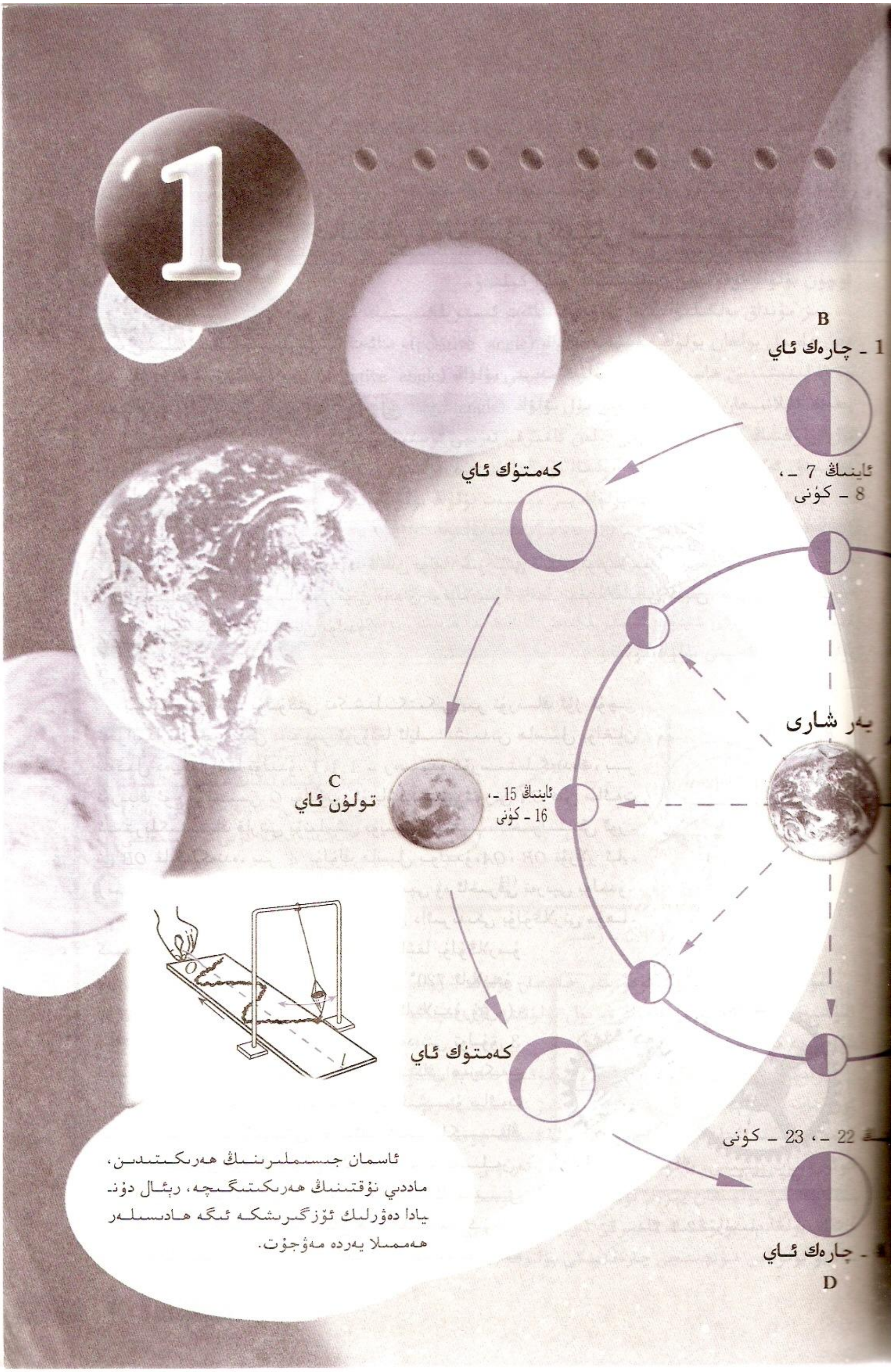
تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەر



رېئال دۇنيادىكى نۇرغۇنلىغان ھەرىكەت، ئۆزگىرىشلەردە تەكرار ئايلىنىش، قايتا ـ قايتا دەۋرلىنىش ھادىسىلىرى مەۋجۇت، بۇ خىل ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى دەۋرىيلىك دېيىلىدۇ. مەسىلەن، يەر شارىنىڭ ئۆز ئوقى ئەتراپىدا ئايلىنىشىدىن كېلىپ چىققان كېچە بىلەن كۈندۈزنىڭ ئالمىشىش ئۆزگىرىشى ۋە يەر شارىنىڭ قۇياش ئەتراپىدا ئايلىنىشىدىن كېلىپ چىققان تۆت پەسىلنىڭ ئالمىشىش ئۆزگىرىشى؛ ئاينىڭ تولۇن ـ كەمتۈك بولۇپ ئۆزگىرىش دەۋرىيلىكى، يەنى جاپسار ئاي — 1 ـ چارەك ئاي — تولۇن ئاي — 4 ـ چارەك ئاي — جاپسار ئاي؛ تاشقىن ئۆزگىرىشىنىڭ دەۋرىيلىكى، يەنى ئاي شارى بىلەن قۇياشنىڭ تارتىش كۈچىنىڭ تەسىرىدە، دېڭىز سۈيىدە يۈز بېرىدىغان دەۋرلىك كۆتۈرۈلۈش ـ پەسىيىش ھادىسىسى؛ جىسىم تەكشى تېزلىك بىلەن ئايلانما ھەرىكەت قىلغان چاغدىكى ئورۇن ئۆزگىرىشىنىڭ دەۋرىيلىكى؛ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتتىكى جىسىمنىڭ ئورۇن يۆتكىلىش ئۆزگىرىشىنىڭ دەۋرىيلىكى؛ ئۆزگىرىشچان توكنىڭ ئۆزگىرىش دەۋرىيلىكى قاتارلىقلار. بۇ خىل ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى ماتېماتىكىلىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ قانداق تەسۋىرلەش كېرەك؟

بىزگە مەلۇم، فۇنكسىيە ئوبيېكتىپ دۇنيانىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى تەسۋىرلەيدىغان ماتېماتىكىلىق مودېل. ماتېماتىكا 1 دە، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفملىق فۇنكسىيە قاتارلىقلارنى ئۆگىنىپ، بۇ فۇنكسىيىلەردىن پايدىلىنىپ ئەمەلىي مەسىلىلەردىكى مەلۇم تىپنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى تەسۋىرلەشكە بولىدىغانلىقىنى بىلىۋالدۇق. ئۇنداقتا، ماتېماتىكىدا ئوبيېكتىپ دۇنيادىكى دەۋرىيلىك ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرى يەنە قانداق تەسۋىرلىنىدۇ؟ بۇ بابتا ئۆگىنىدىغان تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە دەل مۇشۇنداق ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى تەسۋىرلەيدىغان ماتېماتىكىلىق مودېلدۇر.

تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە زادى قانداق فۇنكسىيە؟ ئۇ قانداق ئالاھىدە خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە؟ دەۋرىيلىك ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىگە ئىگە مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا قانداق رول ئوينايدۇ؟ تۆۋەندە بىز بۇ مەسىلىلەر ئۈستىدە مۇھاكىمە ئېلىپ بارىمىز.


1
B
1 - چارەك ئاي
ئاينىڭ 7 -،
8 - كۈنى
كەمتۈك ئاي
يەر شارى
C
تولۇن ئاي
ئاينىڭ 15 -،
16 - كۈنى
كەمتۈك ئاي
22 -، 23 - كۈنى
- چارەك ئاي
D
ئاسمان جىسىملىرىنىڭ ھەرىكىتىدىن، ماددىي نۇقتىنىڭ ھەرىكىتىگىچە، رېئال دۇنيادا دەۋرىلىك ئۆزگىرىشكە ئىگە ھادىسىلەر ھەممىلا يەردە مەۋجۇت.

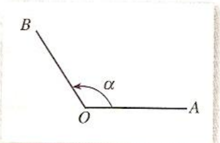
CHAPTER 1

1-1 خالىغان بۇلۇڭ ۋە رادىئان سىستېمىسى

1-1-1 خالىغان بۇلۇڭ

مۇلاھىزە؟

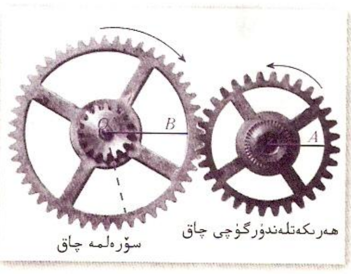
قول سائىتىڭىز 5 مىنۇت كەينىدە قالغان بولسا، سىز ئۇنى قانداق توغرىلايسىز؟ ئەگەر قول سائىتىڭىز 1.25 سائەت ئالدىدا بولسا، سىز ئۇنى قانداق توغرىلايسىز؟ ۋاقىت توغرىلانغاندىن كېيىن، مىنۇت ئىسترېلكىسى قانچە گرادۇس ئايلانغان بولىدۇ؟



1.1.1 – رەسىم

بىزگە مەلۇمكى، بۇلۇڭنى تەكشىلىكتىكى بىر نۇرنىڭ ئۆز ئۇچى ئەتراپىدا بىر ئورۇندىن يەنە بىر ئورۇنغا ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان شەكىل دەپ قاراشقا بولىدۇ. 1.1.1 – رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، بىر نۇرنىڭ ئۇچ نۇقتىسى O بولۇپ، ئۇ باشلىنىش ئورنى OA دىن سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە ئايلىنىپ، ئاخىرلىشىش ئورنى OB غا كەلگەندە، بىر α بۇلۇڭ ھاسىل بولىدۇ، OA، OB نۇرلار ئايرىم – ئايرىم α بۇلۇڭنىڭ باشلىنىش تەرىپى ۋە ئاخىرقى تەرىپى بولىدۇ.

بىز ئىلگىرى $0^\circ \sim 360^\circ$ قىچە بولغان دائىرىدىكى بۇلۇڭلارنى مۇھاكىمە قىلغانىدۇق، ئەمما رېئاللىقتا يەنە باشقا بۇلۇڭلارمۇ بار. مەسىلەن، گىمناستىكىدا «بەدەننى 720° ئايلاندۇرۇش» (يەنى «بەدەننى تولۇق 2 قېتىم ئايلاندۇرۇش»)، «بەدەننى $1\,080^\circ$ ئايلاندۇرۇش» (يەنى «بەدەننى تولۇق 3 قېتىم ئايلاندۇرۇش») قاتارلىقلارغا ئوخشاش ھەرىكەت ناملىرى بار، ئەمما ئايلىنىشنىڭ يۆنىلىشىمۇ سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ يۆنىلىشى ۋە سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى دەپ ئوخشاش بولمايدۇ؛ يەنە مەسىلەن، 2.1.1 – رەسىم ئىككى چىشلىق چاقنىڭ ئايلىنىش سخېمىسى بولۇپ، سۆرەلمە چاق ھەرىكەتلەندۈرگۈچى چاقنىڭ ئايلىنىشىغا ئەگىشىپ ئايلىنىدۇ ھەمدە سۆرەلمە



2.1.1 – رەسىم

1 - باب

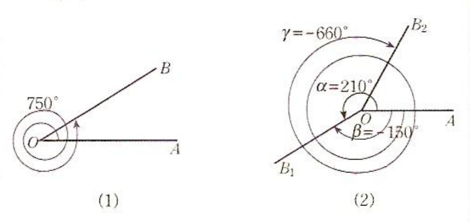
چاق بىلەن ھەرىكەتلەندۇرگۈچى چاق قارىمۇقارشى ئايلىنىش يۆنىلىشىگە ئىگە. شۇنداق قىلىپ، OA نىڭ O ئەتراپىدا ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ بىلەن $O'B$ نىڭ O' ئەتراپىدا ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ ئوخشاش بولمىغان يۆنىلىشكە ئىگە بولىدۇ. شۇڭا، مۇشۇنداق ھادىسىلەرنى توغرا تەسۋىرلەش ئۈچۈن، بۇلۇڭنىڭ ھاسىل بولۇش نەتىجىسىنى بىلىپلا قالماي، يەنە بۇلۇڭنىڭ ھاسىل بولۇش جەريانىنىمۇ بىلىشىمىز، يەنى ھەم ئايلىنىش سانىنى، ھەم ئايلىنىش يۆنىلىشىنى بىلىشىمىز كېرەك. بۇنىڭ ئۈچۈن بۇلۇڭ ئۇقۇمىنى كېڭەيتىشكە توغرا كېلىدۇ.

بىز مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز: نۇرنىڭ سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ **مۇسبەت بۇلۇڭ** (positive angle)، سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ يۆنىلىشى بويىچە ئايلىنىشىدىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ **مەنپىي بۇلۇڭ** (negative angle) دەپ ئاتىلىدۇ. ئەگەر بىر نۇر پەقەتلا ئايلانمىغان بولسا، بىز ئۇنى **نۆل بۇلۇڭ** (zero angle) ھاسىل قىلدى دەيمىز. مۇشۇنداق بولغاندا، نۆل بۇلۇڭنىڭ باشلىنىش تەرىپى بىلەن ئاخىرقى تەرىپى ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ. ئەگەر α [1] نۆل بۇلۇڭ بولسا، ئۇھالدا $\alpha = 0°$ بولىدۇ.

❶ ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، ئارىلاشتۇرۇۋېتەمەسلىك شەرتى ئاستىدا، «α بۇلۇڭ» ياكى «$\angle\alpha$» نى ئاددىيلاشتۇرۇپ «α» قىلىپ يېزىشقا بولىدۇ.

3.1.1 - رەسىم (1) دىكى بۇلۇڭ بىر مۇسبەت بۇلۇڭ بولۇپ، ئۇ $750°$ قا تەڭ؛ 3.1.1 - رەسىم (2) دە، مۇسبەت بۇلۇڭ $\alpha = 210°$، مەنپىي بۇلۇڭ $\beta = -150°$، $\gamma = -660°$؛ نورمال ئەھۋالدا، ئەگەر سائەت نۆلنى باشلىنىش ئورنى قىلساق، ئۇ ھالدا سائەتنىڭ سائەت ئىسترېلكىسى ياكى مىنۇت ئىسترېلكىسى ئايلانغاندا ھاسىل بولغان بۇلۇڭ ھامان مەنپىي بۇلۇڭ بولىدۇ.

قول سائىتى 1.25 سائەت ئالدىدا بولسا، پەقەت مىنۇت ئىسترېلكىسىنى $-3870°$ (ياكى $450°$) ئايلاندۇرساقلا ئۇنى توغرىلىغىلى بولىدۇ.



3.1.1 - رەسىم

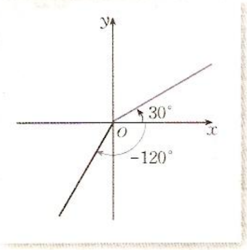
شۇنداق قىلىپ، بۇلۇڭ ئۇقۇمىنى **خالىغان بۇلۇڭ** (any angle) (مۇسبەت بۇلۇڭ، مەنپىي بۇلۇڭ ۋە نۆل بۇلۇڭنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) غىچە كېڭەيتتۇق.

بۇلۇڭنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا مۇھاكىمە قىلىشنىڭ پايدىلىق تەرىپىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

بۇنىڭدىن كېيىن بىز كۆپ ھاللاردا بۇلۇڭنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا مۇھاكىمە قىلىمىز. مەسىلىلەرنى مۇھاكىمە قىلىشقا ئاسان بولۇش ئۈچۈن، بۇلۇڭنىڭ چوققىسى بىلەن كوئوردىنات بېشىنى، بۇلۇڭنىڭ باشلىنىش تەرىپى بىلەن x ئوقنىڭ مەنپىي بولمىغان يېرىم ئوقىنى ئۈستمۇئۈست چۈشۈرىمىز. بۇنداق بولغاندا، بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى قانچىنچى چارەكتە بولسا، بۇ بۇلۇڭنى شۇنچىنچى **چارەكتىكى بۇلۇڭ** (quadrant angle)

CHAPTER

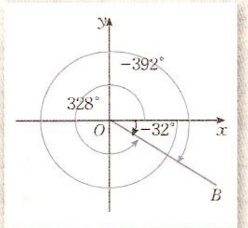
دەيمىز. مەسىلەن، 4.1.1 - رەسىمدىكى 30° لۇق، -120° لۇق بۇ-لۇڭلار ئايرىم - ئايرىم بىرىنچى ۋە ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولىدۇ. ئەگەر بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى كوئوردىنات ئوقى ئۈستىدە ياتسا، بۇ بۇلۇڭ ھېچقانداق چارەككە تەۋە ئەمەس دەپ قارىلىدۇ.



4.1.1 - رەسىم

ئىزدىنىش

بېرىلگەن بىر بۇلۇڭنى يۇقىرىدىكى ئۇسۇل بويىچە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىغا قويغاندىن كېيىن، بىردىنبىر بىر ئاخىرقى تەرەپ ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ. ئەكسىچە، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى خالىغان بىر OB نۇر (5.1.1 - رەسىمدىكىدەك) نى ئاخىرقى تەرەپ قىلغان بۇلۇڭ بىردىنبىر بولامدۇ؟ ئەگەر بىردىنبىر بولمىسا، ئۇ ھالدا ئاخىرقى تەرىپى ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلار قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟



5.1.1 - رەسىم

بايقاش تەس ئەمەسكى، 5.1.1 - رەسىمدە، ئەگەر -32° لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى OB بولسا، ئۇ ھالدا 328°، -392° ... لۇق بۇلۇڭلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئوخشاشلا OB بولىدۇ ھەمدە ئاخىرقى تەرىپى -32° لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇ بۇلۇڭلارنى -32° لۇق بۇلۇڭ بىلەن k دانە $(k \in \mathbf{Z})$ تولۇق بۇلۇڭنىڭ يىغىندىسى قىلىپ ئىپادىلەشكە بولىدۇ، مەسىلەن،

$$328^\circ = -32^\circ + 360^\circ \quad (k = \underline{\ 1\ }\ \text{بۇ يەردە}),$$
$$-392^\circ = -32^\circ - 360^\circ \quad (k = \underline{\ -1\ }\ \text{بۇ يەردە}).$$

$S = \{\beta \mid \beta = -32^\circ + k\cdot 360^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا 328°، -392° لۇق بۇلۇڭلار S نىڭ ئېلېمېنتى، -32° لۇق بۇلۇڭمۇ S نىڭ ئېلېمېنتى (بۇ چاغدا $k = \underline{\ 0\ }$)بولىدۇ. شۇڭا، ئاخىرقى تەرىپى -32° لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بارلىق بۇلۇڭلار (-32° لۇق بۇلۇڭنىمۇ ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) S توپلامنىڭ ئېلېمېنتى بولىدۇ؛ ئەكسىچە، S توپلامدىكى خالىغان بىر بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى -32° لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولىدۇ.

ئومۇمەن:

ئاخىرقى تەرىپى α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بارلىق بۇلۇڭلار (α بۇلۇڭنىمۇ ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) تۆۋەندىكى توپلامنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k\cdot 360^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

يەنى ئاخىرقى تەرىپى α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان خالىغان بىر بۇلۇڭنى α بۇلۇڭ بىلەن پۈتۈن سان دانە تولۇق بۇلۇڭنىڭ يىغىندىسى قىلىپ ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپىنى كوئوردىنات بېشى ئەتراپىدا 360° ئايلاندۇرساق، ئەسلىدىكى ئورنىغا قايتىپ كېلىدۇ. شۇڭا، بۇلۇڭنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا مۇھاكىمە قىلغاندا ئۇنىڭ «ئايلىنىپ ئەسلىگە كېلىش»تىن ئىبارەت ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى ناھايىتى ياخشى ئەكس ئەتتۈرۈپ بەرگىلى بولىدۇ.

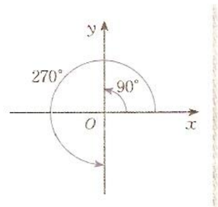
1 ـ مىسال. $0^\circ \sim 360^\circ$❶ قىچە بولغان دائىرە ئىچىدە، ئاخىرقى تەرىپى $-950^\circ 12'$ لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇلۇڭنى تاپايلى ھەمدە ئۇنىڭ قانچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكىگە ھۆكۈم قىلايلى.

يېشىش:

$$-950^\circ 12' = 129^\circ 48' - 3 \times 360^\circ,$$

شۇنىڭ ئۈچۈن $0^\circ \sim 360^\circ$ قىچە بولغان دائىرە ئىچىدە ئاخىرقى تەرىپى $-950^\circ 12'$ لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇلۇڭ $129^\circ 48'$ لۇق بۇلۇڭ بولۇپ، ئۇ ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭدۇر.

2 ـ مىسال. ئاخىرقى تەرىپى y ئوقىنىڭ ئۈستىدە ياتقان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمىنى يازايلى.



6.1.1 ـ رەسىم

يېشىش: $0^\circ \sim 360^\circ$ قىچە بولغان دائىرە ئىچىدە، ئاخىرقى تەرىپى y ئوقىنىڭ ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭدىن ئىككىسى بار، يەنى 90° لۇق، 270° لۇق بۇلۇڭ (6.1.1 ـ رەسىم). شۇڭا، ئاخىرقى تەرىپى 90° لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بارلىق بۇلۇڭلار تۆۋەندىكى توپلامنى ھاسىل قىلىدۇ:

$$S_1 = \{\beta \mid \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

ئاخىرقى تەرىپى 270° لۇق بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بارلىق بۇلۇڭلار تۆۋەندىكى توپلامنى ھاسىل قىلىدۇ:

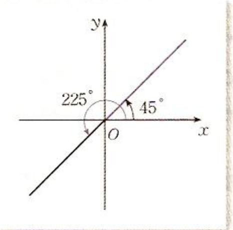
$$S_2 = \{\beta \mid \beta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

شۇڭا ئاخىرقى تەرىپى y ئوقىنىڭ ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمى مۇنداق بولىدۇ:

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\} \\ &\quad \cup \{\beta \mid \beta = 90^\circ + 180^\circ + 2k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\} \\ &\quad \cup \{\beta \mid \beta = 90^\circ + (2k+1)180^\circ,\ k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

❶ $0^\circ \sim 360^\circ$ بولسا $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ نى كۆرسىتىدۇ.

3 ـ مىسال. ئاخىرقى تەرىپى تۈز سىزىق $y=x$ نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمى S نى ھەمدە S تىكى تەڭسىزلىك $-360^\circ \leqslant \beta < 720^\circ$ قا ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېلېمېنت β نى يازايلى.



7.1.1 ـ رەسىم

يېشىش: 7.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا تۈز سىزىق $y=x$ نى سىزساق، ئۇنىڭ بىلەن x ئوق ئاـ رىسىدىكى بۇلۇڭنىڭ 45° ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز، $0^\circ \sim 360^\circ$ قىچە بولغان دائىرە ئىچىدە، ئاخىرقى تەرىپى تۈز سىزىق $y=x$ نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭدىن ئىككىسى بار: 45°، 225°. شۇڭا، ئاخىرقى تەرىپى تۈز سىزىق $y=x$ نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمى مۇنداق بولىدۇ:

$$S=\{\beta \mid \beta=45^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\} \cup \{\beta \mid \beta=225^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$$
$$=\{\beta \mid \beta=45^\circ+k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

S تىكى $-360^\circ \leqslant \beta < 720^\circ$ قا ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېلېمېنتلار:

$45^\circ-2\times180^\circ=-315^\circ$,

$45^\circ-1\times180^\circ=-135^\circ$,

$45^\circ+0\times180^\circ=45^\circ$,

$45^\circ+1\times180^\circ=225^\circ$,

$45^\circ+2\times180^\circ=405^\circ$,

$45^\circ+3\times180^\circ=585^\circ$.

مەشىق

1. (ئېغىزچە) تار بۇلۇڭ قانچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ؟ بىرىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ چوقۇم تار بۇلۇڭ بولامدۇ؟ ئاندىن ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا تىك بۇلۇڭ، كەڭ بۇلۇڭغا نىسبەتەن بۇ ئىككى سوئالغا جاۋاب بېرىڭ.

2. (ئېغىزچە) بۈگۈن ھەپتىنىڭ ئۈچى بولسا، ئۇ ھالدا $7k$ $(k\in\mathbf{Z})$ كۈندىن كېيىنكى بىر كۈن ھەپتىنىڭ قانچىسى بولىدۇ؟ $7k$ $(k\in\mathbf{Z})$ كۈننىڭ ئالدىدىكى بىر كۈن ھەپتىنىڭ قانچىسى بولىدۇ؟ 100 كۈندىن كېيىنكى بىر كۈن ھەپتىنىڭ قانچىسى بولىدۇ؟

3. بۇلۇڭنىڭ چوققىسى بىلەن تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىنىڭ كوئوردېنات بېشى ئۈستمۇئۈست چۈشىدىغانلىقى، باشلىنىش تەرىپى بىلەن x ئوقنىڭ مەنپىي بولمىغان يېرىم ئوقىنىڭ ئۈستمۇئۈست چۈشىدىغانـ لىقى بېرىلگەن بولسا، تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنى سىزىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ قانچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىڭ:

(1) 420°; (2) -75°; (3) 855°; (4) -510°.

4. $0^\circ \sim 360^\circ$ قىچە بولغان دائىرىدە، ئاخىرقى تەرىپى تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلارنى تېپىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ قانچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىڭ:

(1) $-54^\circ18'$; (2) $395^\circ8'$; (3) $-1\,190^\circ30'$.

5. ئاخىرقى تەرىپى تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمىنى يېزىڭ ھەمدە توپلامدىكى تەڭسىزلىك $-720^\circ \leqslant \beta < 360^\circ$ قا ئۇيغۇن كېلىدىغان β ئېلېمېنتنى يېزىڭ:

(1) $1\,303^\circ18'$; (2) -225°.

1 ـ باب

2-1-1 رادىئان سىستېمىسى

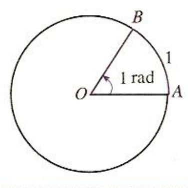
ئۇزۇنلۇقنى ئۆلچەشتە مېتىر، فۇت (ئىنگلىزچىسى)، يارد قاتارلىق ئوخشاش بولمىغان بىرلىكلەر سىستېمىسىنى، ئېغىرلىقنى ئۆلچەشتە كىلوگرام، قاداق قاتارلىق ئوخشاش بولمىغان بىرلىكلەر سىستېمىسىنى ئىشلىتىشكە بولىدۇ. ئوخشاش بولمىغان بىرلىكلەر سىستېمىسى مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا قۇلايلىقلارنى ئېلىپ كېلىدۇ. بۇلۇڭلارنى ئۆلچەشتىمۇ ئوخشاش بولمىغان بىرلىكلەر سىستېمىسىنى ئىشلىتىشكە بولامدۇ؟

بىزگە مەلۇم، بۇلۇڭلارنى ئۆلچەشتە گرادۇسنى بىرلىك قىلىشقا بولىدۇ، 1 گرادۇسلۇق بۇلۇڭ تولۇق بۇلۇڭنىڭ $\frac{1}{360}$ نىگە تەڭ. بۇلۇڭلارنى ئۆلچەشتە گرادۇس بىرلىك قىلىنىدىغان بۇ خىل سىستېما بۇلۇڭنىڭ **گرادۇس سىستېمىسى** (degree measure) دەپ ئاتىلىدۇ. ئىشلىتىشكە قۇلايلىق بولۇش ئۈچۈن، ماتېماتىكىدا يەنە ئىككىنچى بىر خىل بۇلۇڭ ئۆلچەش سىستېمىسى ــ **رادىئان سىستېمىسى** (radian measure) قوللىنىلىدۇ:

ئۇزۇنلۇقى رادىئۇسقا تەڭ بولغان يايىنىڭ قارشىسىدىكى مەركىزىي بۇلۇڭ 1 **رادىئان** (radian) لىق بۇلۇڭ دەپ ئاتىلىدۇ، ئۇ rad بەلگىسى ئارقىلىق ئىپادىلىنىپ، رادىئان دەپ ئوقۇلىدۇ.

8.1.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، O چەمبەرنىڭ رادىئۇسى 1، $\overset{\frown}{AB}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقى 1 گە تەڭ بولۇپ، $\angle AOB$ دەل 1 رادىئانلىق بۇلۇڭدۇر.

ئىسپاتلاشقا بولىدۇكى، چوڭ ـ كىچىكلىكى بەلگىلىك بولغان مەركىزىي بۇلۇڭ α نىڭ قارشىسىدىكى يايىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن رادىئۇسىنىڭ نىسبەت قىممىتى بىردىنبىر ئېنىقلانغان بولۇپ، ئۇ رادىئۇسنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى بىلەن مۇناسىۋەتسىز بولىدۇ.



8.1.1 ـ رەسىم

ئىزدىنىش

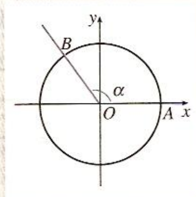
9.1.1 - رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، رادىئۇسى r بولغان چەمبەرنىڭ مەركىزى بىلەن كوئوردېنات بېشى ئۈستمۇئۈست چۈشكەن بولۇپ، α بۇلۇڭنىڭ باشلىنىش تەرىپى x ئوقنىڭ مەنپىي بولمىغان يېرىم ئوقى بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشۈپ، چەمبەر بىلەن A نۇقتىدا كېسىشكەن، ئاخىرقى تەرىپى بولسا چەمبەر بىلەن B نۇقتىدا كېسىشكەن. تۆۋەندە بېرىلگەن جەدۋەلدىكى بوش ئورۇنلارنى تولدۇرۇڭ ھەمدە مۇلاھىزە قىلىڭ: ئەگەر رادىئۇسى r بولغان بىر چەمبەرنىڭ مەركىزىي بۇلۇڭى α نىڭ قارشىسىدىكى يايىنىڭ ئۇزۇنلۇقى l بولسا، ئۇ ھالدا α نىڭ رادىئان سانى قانچە بولىدۇ؟

CHAPTER

بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سىستېمىسى بىلەن رادىئان سىستېمىسى ئوخشاشلا بۇلۇڭلارنى ئۆلچەش سىستېمىسى بولـ-غان ئىكەن، ئۇنداقتا، ئۇلارنىڭ ئارىسىدىكى سۇندۇرۇپ ھېسابلاش قانداق بولىدۇ؟

1.1 ـ جەدۋەل

∠AOB نىڭ گرادۇس سانى	∠AOB نىڭ رادىئان سانى	OB نىڭ ئايلىنىش يۆنىلىشى	$\widehat{AB}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقى
180°	π	سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى	πr
360°	2π	سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى	$2\pi r$
	1		r
	-2		$2r$
	$-\pi$		
	0		
180°	π		π
360°	2π		2π



9.1.1 ـ رەسىم

ئومۇمەن، مۇسبەت بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانى مۇسبەت سان، مەنپىي بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانى مەنپىي سان، نۆل بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانى 0 بولىدۇ. ئەگەر رادىئۇسى r بولغان چەمبەرنىڭ مەركىزىي بۇلۇڭى α نىڭ قارشىسىدىكى يايىنىڭ ئۇزۇنلۇقى l بولسا، ئۇ ھالدا α بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانىنىڭ مۇتلەق قىممىتى مۇنداق بولىدۇ:

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

بۇ يەردە، α نىڭ مۇسبەت ياكى مەنپىي بولۇشى α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپىنىڭ ئايلىنىش يۆنىلىشى تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ.

بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سىستېمىسى بىلەن رادىئان سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ نۆل بۇلۇڭنى ئۆلچىگەندە، بىرلىكى ئوخشاش بولمىسىمۇ، لېكىن مىقدارى ئوخشاش بولىدۇ (ھەر ئىككىسى 0)؛ بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سىستېمىسى بىلەن رادىئان سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ خالىغان بىر نۆل بولمىغان بۇلۇڭنى ئۆلچىگەندە، بىرلىكى ئوخشاش بولمىغانلىقتىن، مىقدارىمۇ ئوخشاش بولمايدۇ. چۈنكى تولۇق بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانى 2π بولۇپ، بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سىستېمىسىدىكى گرادۇس سانى $360°$ بولىدۇ، شۇڭا

$$360° = 2\pi \text{ rad},$$

$$180° = \pi \text{ rad},$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}.$$

6 ـ ئەسىردە، ھىندىستانلىقلار سىنۇس جەدۋىلىنى تۈزگەندە، رادىئۇس بىلەن چەمبەر ئايلانمىسىنى ئوخشاش بىر بىرلىك ئارقىلىق ئۆلچەپ، ئەڭ دەسلەپكى رادىئان سىستېمىسى ئۇقۇمىنى پەيدا قىلغان. ئەيلېر رادىئان سىستېمىسىغا دائىر ئىدىيىنى ئېنىق ئوتتۇرىغا قويغان ماتېماتىك. 1748 ـ يىلى، ئۇ ئۆزىنىڭ دەۋر بۆلگۈچ ئەسىرى «چەكسىز كىچىك تەھلىلى ھەققىدە ئومۇمىي بايان» دا، چەمبەر رادىئۇسىنى ياي ئۇزۇنلۇقىنى ئۆلچەشنىڭ بىرلىكى قىلغاندا، بىر تولۇق بۇلۇڭنىڭ 2π رادىئانغا، 1 رادىئاننىڭ تولۇق بۇلۇڭنىڭ $\frac{1}{2\pi}$ گە تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئوتتۇرىغا قويغان. بۇ ئىدىيە كېيىنكى بىلەن يايىنى ئۆلچەشنى بىرلىككە كەلتۈرۈپ، تىرىگونومېترىيىلىك فورمۇلىلار ۋە ھېسابلاشلارنى زور دەرىجىدە ئاددىيلاشتۇردى.

1 ـ باب

ئەكسىچە مۇنداق بولىدۇ:

$$1\,\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30^{\circ}=57^{\circ}18'.$$

ئومۇمەن، بىز پەقەت

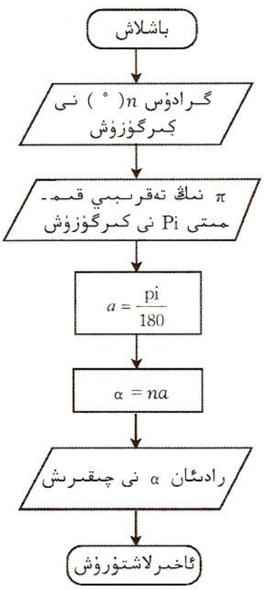
$$180^{\circ}=\pi\ \text{rad}$$

$$1^{\circ}=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.01745\ \text{rad}$$

$$1\,\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30^{\circ}$$

نى ئاساسلىنىپ رادىئان بىلەن گرادۇسنى سۇندۇرۇپ ھېسابلىيالايمىز.

تۆۋەندىكى ئالگورىزمدىن پايدىلىنىپ گرادۇسنى رادىئانغا سۇندۇرۇپ ھېسابلىغىلى بولىدۇ، سىز كومپيۇتېردا ئەمەلگە ئاشۇرالامسىز؟



1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى تەلەپ بويىچە $67^{\circ}30'$ نى رادىئانغا ئايلاندۇرايلى:

(1) ئېنىق قىممىتىنى؛ (2) 0.001 گىچە ئېنىقلىقتا ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتىنى.

يېشىش: (1) $67^{\circ}30'=\left(\frac{135}{2}\right)^{\circ}$ بولغانلىقتىن،

$$67^{\circ}30'=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\times\frac{135}{2}=\frac{3}{8}\pi\ \text{rad}.$$

(2) ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانساق مۇنداق بولىدۇ:

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ 2$

$67\ \boxed{\circ\ ,\ ,,}\ 30\ \boxed{\circ\ ,\ ,,}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}}\ 1\ \boxed{=}\ 1.178097245.$

شۇڭا، $67^{\circ}30'\approx 1.178\ \text{rad}$.

2 ـ مىسال. $3.14\,\text{rad}$ نى گرادۇسقا سۇندۇرۇپ ھېسابلايلى (گرادۇس ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، 0.001 گىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش: ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانساق:

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ 1$

$3.14\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}}\ 2\ \boxed{=}\ 179.9087477.$

شۇڭا، $3.14\,\text{rad}\approx 179.909^{\circ}$.

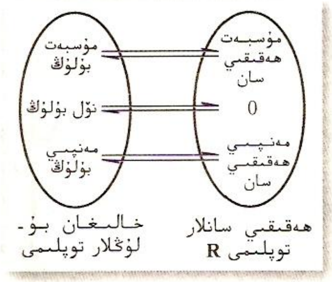
بۇنىڭدىن كېيىن بۇلۇڭنى رادىئان سىستېمىسى ئارقىلىق ئىپادىلىگەندە، «رادىئان» دېگەن سۆزنى ياكى «rad» نى يازماي، پەقەت شۇ بۇلۇڭغا ماس بولغان رادىئان سانىنىلا يازىمىز. مەسىلەن، $\alpha=2$ دەپ يېزىلسا، بۇ، α نىڭ 2 rad لىق بۇلۇڭ ئىكەنلىكىنى ئىپادىلەيدۇ، $\sin\frac{\pi}{3}$ بولسا $\frac{\pi}{3}$ rad لىق بۇلۇڭنىڭ سىنۇسىنى، يەنى $\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ نى ئىپادىلەيدۇ.

CHAPTER 1

تۆۋەندىكى ئالاھىدە بۇلۇڭلارنىڭ گرادۇس سانى بىلەن رادىئان سانىنىڭ سېلىشتۇرما جەدۋىلىنى تولدۇرۇڭ:

گرادۇس	0°	30°	45°			120°	135°	150°			360°
رادىئان				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				π	$\frac{3\pi}{2}$	

بۇلۇڭ ئۇقۇمى كېڭەيتىلگەندىن كېيىن، رادىئان سىستېمىسى ئاستىدا، بۇلۇڭلار توپلىمى بىلەن ھەقىقىي سانلار توپلىمى **R** ئارىسىدا بىرگە بىر ماسلىق مۇناسىۋەت تۇرغۇزۇلغان بولىدۇ: ھەربىر بۇلۇڭغا بىردىنبىر ھەقىقىي سان (يەنى شۇ بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانى) ماس كېلىدۇ؛ ئەكسىچە، ھەربىر ھەقىقىي سانغىمۇ بىردىنبىر بۇلۇڭ (يەنى رادىئان سانى ئاشۇ ھەقىقىي سانغا تەڭ بولغان بۇلۇڭ) ماس كېلىدۇ (10.1.1 ـ رەسىم).



10.1.1 ـ رەسىم

3 ـ مىسال. تۆۋەندىكى سېكتورغا دائىر فورمۇلىلارنى رادىئان سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايلى:

$$(1)\ l=\alpha R;\qquad (2)\ S=\frac{1}{2}\alpha R^2;\qquad (3)\ S=\frac{1}{2}lR.$$

بۇنىڭدا R رادىئۇس، l ياي ئۇزۇنلۇقى، α $(0<\alpha<2\pi)$ مەركىزىي بۇلۇڭ، S سېكتورنىڭ يۈزى.

ئىسپات: فورمۇلا $|\alpha|=\frac{l}{r}$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$l=\alpha R.$$

تۆۋەندە، (2)، (3) لەرنى ئىسپاتلايمىز. رادىئۇسى R، مەركىزىي بۇلۇڭى n° بولغان سېكتورنىڭ ياي ئۇزۇنلۇقى فورمۇلىسى بىلەن يۈز فورمۇلىسى ئايرىم ـ ئايرىم:

$$l=\frac{n\pi R}{180},\quad S=\frac{n\pi R^2}{360}$$

بولغانلىقتىن، n° نى رادىئانغا ئايلاندۇرساق مۇنداق بولىدۇ:

$$\alpha=\frac{n\pi}{180},$$

شۇڭا

$$S=\frac{1}{2}\alpha R^2.$$

$l=\alpha R$ نى يۇقىرىقى ئىپادىدىكى ئورنىغا قويساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$S=\frac{1}{2}lR.$$

3 ـ مىسالدىن كۆرۈشكە بولىدۇكى، رادىئان سىستېمىسىنى قوللانغاندا، ياي ئۇزۇنلۇقى فورمۇلىسى بىلەن سېكتورنىڭ يۈز فورمۇلىسى ئاددىيلىشىدۇ. بۇ دەل رادىئان سىستېمىسىنى كىرگۈزۈشنىڭ سەۋەبلىرىدىن بىرىدۇر.

1 ـ باب

4 ـ مىسال. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ $\sin 1.5$ بىلەن $\sin 85°$ نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرايلى.

يېشىش: ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانساق

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ 2$

$\boxed{\sin}\ 1.5\ \boxed{=}\ 0.997494986.$

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ 1$

$\boxed{\sin}\ 85\ \boxed{\circ\ ,\ ,,}\ \boxed{=}\ 0.996194698.$

شۇڭا

$$\sin 1.5 > \sin 85°.$$

مەشىق

1. تۆۋەندىكى گرادۇسلارنى رادىئانغا ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $22°30'$;　　(2) $-210°$;　　(3) $1\,200°$.

2. تۆۋەندىكى رادىئانلارنى گرادۇسقا ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $\frac{\pi}{12}$;　　(2) $-\frac{4\pi}{3}$;　　(3) $\frac{3\pi}{10}$.

3. تۆۋەندىكىلەرنى رادىئان ئارقىلىق ئىپادىلەڭ:

(1) ئاخىرقى تەرىپى x ئوق ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمى؛

(2) ئاخىرقى تەرىپى y ئوق ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمى.

4. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى ھەربىر جۈپ قىممەتنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ (0.001 گىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ).

(1) $\cos 0.75°$ بىلەن $\cos 0.75$;　　(2) $\tan 1.2°$ بىلەن $\tan 1.2$.

5. بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سىستېمىسى ۋە رادىئان سىستېمىسى ئاستىدىكى ياي ئۇزۇنلۇقى فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ، ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا رادىئۇسى 1 m بولغان چەمبەردىكى $60°$ لۇق مەركىزىي بۇلۇڭنىڭ قارشىسىدىكى يايىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ھېسابلاڭ (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ).

6. رادىئۇسى 120 mm بولغان چەمبەر ئۈستىدىكى بىر يايىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 144 mm ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ يايىنىڭ قارشىسىدىكى مەركىزىي بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانىنى تېپىڭ.

1.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $0^\circ \sim 360^\circ$ قىچە بولغان دائىرىدە، ئاخىرقى تەرىپى تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلارنى تېپىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ قايسى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىڭ:

(1) -265°;　(2) $-1\,000^\circ$;　(3) $-843^\circ 10'$;　(4) $3\,900^\circ$.

2. ئاخىرقى تەرىپى x ئوق ئۈستىدە ياتىدىغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمىنى يېزىڭ.

3. ئاخىرقى تەرىپى تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمىنى يېزىڭ ھەمدە توپلامدىكى تەڭسىزلىك $-360^\circ \leqslant \beta < 360^\circ$ قا ئۇيغۇن كېلىدىغان β ئېلېمېنتنى يېزىڭ:

(1) 60°;　(2) -75°;　(3) $-824^\circ 30'$;　(4) 475°;

(5) 90°;　(6) 270°;　(7) 180°;　(8) 0°.

4. گرادۇس ۋە رادىئاندىن پايدىلىنىپ ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا بىرىنچى، ئىككىنچى، ئۈچىنچى، تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمىنى يېزىڭ.

5. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

(1) ئەگەر α تار بۇلۇڭ بولسا، ئۇ ھالدا 2α (　) بولىدۇ.

(A) بىرىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ

(B) ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ

(C) 180° تىن كىچىك مۇسبەت بۇلۇڭ

(D) بىرىنچى ياكى ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ

(2) ئەگەر α بىرىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولسا، ئۇ ھالدا $\frac{\alpha}{2}$ (　) بولىدۇ.

(A) بىرىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ

(B) ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ

(C) بىرىنچى ياكى ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ

(D) بىرىنچى ياكى ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ

6. بىر خوردىنىڭ ئۇزۇنلۇقى رادىئۇسقا تەڭ بولسا، بۇ خوردىنىڭ قارشىسىدىكى مەركىزىي بۇلۇڭ 1 رادىئانغا تەڭ بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

7. تۆۋەندىكى گرادۇسلارنى رادىئانغا ئايلاندۇرۇڭ:

(1) 36°;　(2) -150°;　(3) $1\,095^\circ$;　(4) $1\,440^\circ$.

8. تۆۋەندىكى رادىئانلارنى گرادۇسقا ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $-\frac{7}{6}\pi$;　(2) $-\frac{10}{3}\pi$;　(3) 1.4;　(4) $\frac{2}{3}$.

9. رادىئۇسى $OA=100\,\mathrm{cm}$ بولغان چەمبەر شەكىللىك مېتال تاختىدىن AB يايىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $112\,\mathrm{cm}$ بولغان سېكتور شەكىللىك بىر پارچە تاختا كېسىۋېلىش ئۈچۈن، مەركىزىي بۇلۇڭ $\angle AOB$ قانچە گرادۇس بولۇشى كېرەك (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ، $1°$ قىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ).

10. ئۇزۇنلۇقى $50\,\mathrm{cm}$ بولغان يايىنىڭ قارشىسىدىكى مەركىزىي بۇلۇڭ $200°$ ئىكەنلىكى بېرىلـگەن، بۇ يايى ياتقان چەمبەرنىڭ رادىئۇسىنى تېپىڭ (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ، $1\,\mathrm{cm}$ غىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ).

B گۇرۇپپا

1. ھەربىر ساۋاقداش بىردىن يەلپۈگۈچ تەييارلاپ، ئۇنى ئېچىپ گۇرۇپپىڭىزدىكى باشقا ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن سېلىشتۇرۇڭ، ئاندىن ئۇلارنىڭ ئىچىدىن كۆرۈنۈشى چىرايلىق بىر يەلپۈگۈچنى تاللاڭ ھەمدە ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ئۇنىڭ يۈزى S_1 نى ھېسابلاڭ.

(1) بۇ يەلپۈگۈچ چەمبەر يۈزىدىن كېسىۋېلىنغان ھەمدە ئۇنىڭ ئېشىپ قالغان قىسمىنىڭ يۈزى S_2 دەپ پەرەز قىلىپ، S_1 بىلەن S_2 نىڭ نىسبەت قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) S_1 بىلەن S_2 نىڭ نىسبەت قىممىتى 0.618 بولۇش ئۈچۈن، يەلپۈگۈچنىڭ مەركىزىي بۇلۇڭى قانچە گرادۇس بولۇشى كېرەك ($10°$ قىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ)؟

2. (1) 4h (سائەت) ۋاقىت ئۆتكىچە، سائەتنىڭ سائەت، مىنۇت ئىسترېلكىلىرىنىڭ ھەرقايسىسى قانچە گرادۇس ئايلىنىدۇ؟ ئۇلار ئايرىم ـ ئايرىم قانچە رادىئانغا تەڭ بولىدۇ؟

(2) مەلۇم بىر ئادەم، سائەتنىڭ سائەت ئىسترېلكىسى بىلەن مىنۇت ئىسترېلكىسى بىر كۈندە 24 قېتىم ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ دېگەن. سىزچە بۇ خىل ئېيتىش توغرىمۇ؟ سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

(كۆرسەتمە: كېچە سائەت نۆلدىن باشلاپ ھېسابلاپ، سائەتنىڭ مىنۇت ئىسترېلكىسى $t\,\mathrm{min}$ ماڭغاندا، ئۇ سائەت ئىسترېلكىسى بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، بىر كۈندە سائەتنىڭ مىنۇت ئىسترېلكىسى بىلەن سائەت ئىسترېلكىسى n قېتىم ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ. t نىڭ n گە دائىر فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى تۈزۈپ، ئۇنىڭ گرافىكىنى سىزىڭىز، ئاندىن ھەر قېتىم ئۈستمۇئۈست چۈشكەندىكى ۋاقىتنى تاپىمىز.)

3. ئۆزئارا چىشلىشىدىغان ئىككى چىشلىق چاق بېرىلگەن بولۇپ، چوڭ چاقنىڭ 48 چىشى، كىچىك چاقنىڭ 20 چىشى بار. چوڭ چاق تولۇق بىر قېتىم ئايلانغاندا، كىچىك چاقنىڭ ئايلىنىش بۇلۇڭى ______ گرادۇس، يەنى ______ rad بولىدۇ. ئەگەر چوڭ چاقنىڭ ئايلىنىش تېزلىكى $180\,r/\mathrm{min}$ (مىنۇت / ئايلىنىش قېتىمى)، كىچىك چاقنىڭ رادىئۇسى $10.5\,\mathrm{cm}$ بولسا، ئۇ ھالدا كىچىك چاقنىڭ ئايلانمىسىدىكى بىر نۇقتىنىڭ ھەر $1\,\mathrm{s}$ تا ئايلانغان ياي ئۇزۇنلۇقى ______ بولىدۇ.

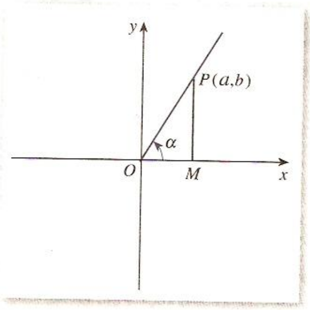
CHAPTER 1

2-1 خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى

1-2-1 خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى

مۇلاھىزە ؟

بىز تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنى ئۆگىنىپ ئۆتكەنىدۇق، ئۇلارنىڭ تار بۇلۇڭنى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، نىسبەت قىممىتىنى فۇنكسىيە قىممىتى قىلىدىغانلىقىنى بىلىمىز. سىز تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈستىدە ياتقان نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ئارقىلىق ئىپادىلىيەلەمسىز؟



1.2.1 ـ رەسىم

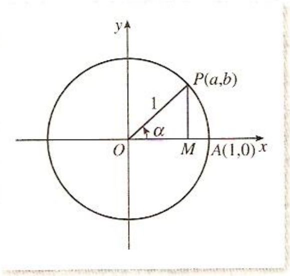
1.2.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، تار بۇلۇڭ α نىڭ چوققىسى بىلەن كوئوردىنات بېشى O ئۇستمۇئۇست چۈشىدۇ، باشلىنىش تەرىپى بىلەن x ئوقنىڭ مەنپىي بولمىغان يېرىم ئوقى ئۇستمۇئۇست چۈشىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىرىنچى چارەكتە ياتىدۇ. α نىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈستىدىن خالىغان بىر $P(a, b)$ نۇقتىنى ئالساق، ئۇنىڭ كوئوردىنات بېشى بىلەن بولغان ئارىلىقى $r=\sqrt{a^2+b^2}>0$ بولىدۇ. P نۇقتا ئارقىلىق x ئوققا تىك يۈرگۈزسەك (تىك ئاساسى M)، ئۇ ھالدا OM كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقى a، MP كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقى b بولىدۇ.

تولۇقسىز ئوتتۇرىدا ئۆگەنگەن ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن مۇنداق بولىدۇ:

$$\sin\ \alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{b}{r},\quad \cos\ \alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{a}{r},\quad \tan\ \alpha=\frac{MP}{OM}=\frac{b}{a}.$$

ئوخشاش ئۇچبۇلۇڭلارغا دائىر بىلىملەرگە ئاساسلانغاندا، ئېنىق بۇلۇڭ α گە نىسبەتەن، بۇ ئۈچ نىسبەت قىممىتى P نۇقتىنىڭ α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈستىدىكى ئورنىنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگەرمەيدۇ، شۇڭا بىز P نۇقتىنى OP كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقى $r=1$ بولىدىغان ئالاھىدە

1 - باب



2.2.1 - رەسىم

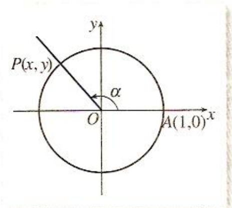
ئورۇندىن ئالىمىز (2.2.1 - رەسىمدىكىدەك). شۇنداق قىلىپ، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ئارقىلىق ئىپادىلەنگەن تار بۇلۇڭنىڭ تىرىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيىلىرىگە ئېرىشەلەيمىز:

$$\sin\ \alpha = \frac{MP}{OP} = b, \qquad \cos\ \alpha = \frac{OM}{OP} = a,$$

$$\tan\ \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{a}.$$

رادىئان سىستېمىسىنى كىرگۈزگەندە، بىز رادىئۇسى بىرلىك ئۇزۇنلۇققا تەڭ بولغان چەمبەردە، α بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانىنىڭ مۇتلەق قىممىتى مەركىزىي بۇلۇڭ α نىڭ قارشىسىدىكى يايىنىڭ ئۇزۇنلۇقىغا تەڭ (ئالامىتى α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپىنىڭ ئايلىنىش يۆنىلىشى تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ) ئىكەنلىكىنى كۆرگەن. تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، كوئوردىنات بېشى O نى چەمبەر مەركىزى، بىرلىك ئۇزۇنلۇقنى رادىئۇس قىلغان چەمبەرنى **بىرلىك چەمبەر** (unit circle) دەپ ئاتايمىز. شۇنىڭ بىلەن، يۇقىرىدا ئېيتىلغان P نۇقتا دەل α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بولىدۇ. تار بۇلۇڭنىڭ تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنى بىرلىك چەمبەر ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ئارقىلىق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ.

ئوخشاشلا، بىرلىك چەمبەردىن پايدىلىنىپ خالىغان بۇلۇڭنىڭ تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىگە ئېنىقلىما بېرەلەيمىز.



3.2.1 - رەسىم

3.2.1 - رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، α نى خالىغان بىر بۇلۇڭ، ئۇنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىرلىك چەمبەر بىلەن $P(x,\ y)$ نۇقتىدا كېسىشىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ هالدا:

(1) y بولسا α نىڭ **سىنۇسى** (sine) دەپ ئاتىلىپ، $\sin\ \alpha$ قىلىپ يېزىلىدۇ، يەنى

$$\sin\ \alpha = y;$$

(2) x بولسا α نىڭ **كوسىنۇسى** (cosine) دەپ ئاتىلىپ، $\cos\ \alpha$ قىلىپ يېزىلىدۇ، يەنى

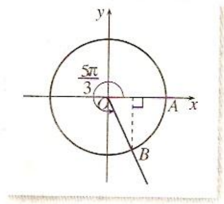
$$\cos\ \alpha = x;$$

(3) $\frac{y}{x}$ بولسا α نىڭ **تانگېنسى** (tangent) دەپ ئاتىلىپ، $\tan\ \alpha$ قىلىپ يېزىلىدۇ، يەنى

$$\tan\ \alpha = \frac{y}{x}\ (x \neq 0).$$

بۇنىڭدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ بولغاندا، α نىڭ ئاخىرقى تەرىپى y ئوق ئۈستىدە بولۇپ، بۇ چاغدا P نۇقتىنىڭ ئابسېسساسى x هامان 0 گە تەڭ بولىدۇ، شۇڭا $\tan\ \alpha = \frac{y}{x}$ مەنىگە ئىگە بولمايدۇ. ئۇنىڭدىن باشقا، ئېنىق بۇلۇڭ α گە نىسبەتەن، يۇقىرىدا ئېيتىلغان ئۈچ قىممەت

بىردىنبىر ئېنىقلانغان بولىدۇ. شۇڭا، سىنۇس، كوسىنۇس، تانگېنسلارنىڭ ھەممىسى بۇلۇڭنى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، بىرلىك چەمبەر ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى ياكى كوئوردېناتىنىڭ نىسبەت قىممىتىنى فۇنكسىيە قىممىتى قىلغان فۇنكسىيىلەردۇر، ئۇلارنى ئومۇملاشتۇرۇپ **ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەر** (trigonometric function) دەپ ئاتايمىز. بۇلۇڭلار تولىمى بىلەن ھەقىقىي سانلار توپلىمى ئارىسىدا بىرگە بىر ماسلىق مۇناسىۋىتى تۇرغۇزۇشقا بولىدىغانلىقتىن، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنى ھەقىقىي سانىنى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار قىلغان فۇنكسىيە دەپ قاراشقا بولىدۇ.



4.2.1 – رەسىم

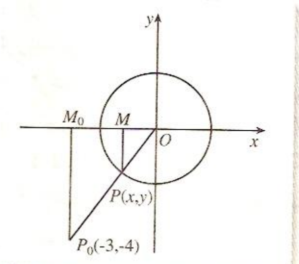
1 ـ مىسال. $\frac{5\pi}{3}$ نىڭ سىنۇس، كوسىنۇس ۋە تانگېنس قىممىتىنى تاپايلى.

يېشىش: تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، $\angle AOB = \frac{5\pi}{3}$ (4.2.1 – رەسىمدىكىدەك) نى سىزىمىز. بىلىشكە بولىدۇكى، $\angle AOB$ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردېناتى $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ بولىدۇ. شۇڭا،

$$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$



5.2.1 – رەسىم

2 ـ مىسال. α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى $P_0(-3, -4)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن، α بۇلۇڭنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس ۋە تانگېنس قىممىتىنى تاپايلى.

تەھلىل: 5.2.1 – رەسىمدىكىدەك، $\triangle OMP \backsim \triangle OM_0P_0$ گە ئاساسەن، ماس ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممەتلىرىنى تاپقىلى بولىدۇ.

يېشىش: بېرىلگىنىدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$|OP_0| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5.$$

5.2.1 – رەسىمدىكىدەك، α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىرلىك چەمبەر بىلەن $P(x, y)$ نۇقتىدا كېسىشىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، ئايرىم – ئايرىم ھالدا P، P_0 نۇقتىلار ئارقىلىق x ئوققا MP، M_0P_0 تىكلەرنى يۈرگۈزسەك، ئۇ ھالدا:

$$|M_0P_0| = 4,\ |MP| = -y,$$

ئومۇمەن، α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y)، ئۇنىڭدىن كوئوردېنات بېشىغىچە بولغان ئارىلىقنى r دېسەك، ئۇ ھالدا:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

ئۆزىڭىز ئىسپاتلاپ بېرەلەمسىز؟

$$|OM_0| = 3,\ |OM| = -x,$$
$$\triangle OMP \backsim \triangle OM_0P_0,$$

شۇڭا

$$\sin\ \alpha = y = \frac{y}{1} = \frac{-|MP|}{|OP|} = -\frac{|M_0P_0|}{|OP_0|} = -\frac{4}{5};$$

$$\cos\ \alpha = x = \frac{x}{1} = \frac{-|OM|}{|OP|} = -\frac{|OM_0|}{|OP_0|} = -\frac{3}{5};$$

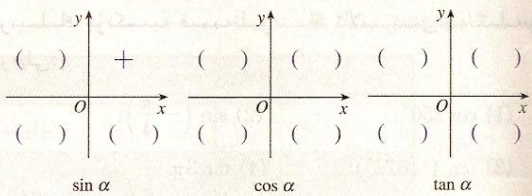
$$\tan\ \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}.$$

ئىزدىنىش

يۇقىرىدا بايان قىلىنغان خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، ئالدى بىلەن سىنۇس، كوسىنۇس، تانگېنس فۇنكسىيىلىرىنىڭ رادئان سىستېمىسى ئاستىدىكى ئېنىقلىنىش ساھەسىنى 1.2.1 ـ جەدۋەلگە تولدۇرۇڭ، ئاندىن بۇ ئۈچ خىل فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ ھەرقايسى چارەكلەردىكى ئالامىتىنى 6.2.1 ـ رەسىمدىكى تىرناقلارنىڭ ئىچىگە تولدۇرۇڭ.

1.2.1 ـ جەدۋەل

ترىگونومېترىيەلىك فۇنكسىيىلەر	ئېنىقلىنىش ساھەسى
$\sin\ \alpha$	
$\cos\ \alpha$	
$\tan\ \alpha$	



6.2.1 ـ رەسىم

3 ـ مىسال. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەر سىستېمىسى كۆچكە ئىگە بولغاندا، θ بۇلۇڭنىڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى، ئەكسىچە بولغاندىمۇ توغرا بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى:

$$\begin{cases} \sin\ \theta < 0, & \text{①} \\ \tan\ \theta > 0. & \text{②} \end{cases}$$

ئىسپات: ئەگەر ①، ② ئىپادىلەر كۆچكە ئىگە بولسا، ئۇ ھالدا θ نىڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايمىز.

① ئىپادە $\sin\ \theta < 0$ كۆچكە ئىگە بولغانلىقتىن، θ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈچىنچى ياكى تۆتىنچى چارەكتە بولۇشى ھەم y ئوقىنىڭ مۇسبەت بولمىغان يېرىم ئوقى بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشۈشىمۇ مۇمكىن؛

يەنە ② ئىپادە $\tan\ \theta > 0$ كۆچكە ئىگە بولغانلىقتىن، θ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىرىنچى ياكى ئۈچىنچى چارەكتە بولۇشى مۇمكىن.

①، ② ئىپادىلەر كۆچكە ئىگە بولغانلىقتىن، θ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى پەقەت ئۈچىنچى چارەك-تىلا بولىدۇ. شۇڭا، θ بۇلۇڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولىدۇ.

ئەكسىنى ئوقۇغۇچىلار ئۆزلىرى ئىسپاتلىسا بولىدۇ.

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى: **ئاخىرقى تەرىپى ئوخ-شاش بولغان بۇلۇڭلارنىڭ ئوخشاش بىر ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىنىڭ قىممەتلىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ.** بۇنىڭدىن تۆۋەندىكىدەك بىر گۇرۇپپا فورمۇلا (**1 - فورمۇلا**) غا ئېرىشىمىز:

$$\sin(\alpha + k\cdot 2\pi) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + k\cdot 2\pi) = \cos\alpha,$$
$$\tan(\alpha + k\cdot 2\pi) = \tan\alpha,$$
بۇنىڭدا $k \in \mathbf{Z}$.

> 1 - فورمۇلىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ قىممىتى «قايتا - قايتا دەۋرلىنىش» تىن ئىبارەت ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىگە ئىگە، يەنى α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى كوئوردىنات بېشى ئەتراپىدا ھەربىر قېتىم تولۇق ئايلانغاندا، فۇنكسىيە قىممىتى تەكرار كۆرۈلىدۇ.

1 - فورمۇلىدىن پايدىلىنىپ، خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى تېپىشنى، 0 دىن 2π گىچە (ياكى $0° \sim 360°$ قىچە) بولغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى تېپىشقا ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ.

4 - مىسال. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ ئالامىتىنى بەلگىلەپ، ئاندىن ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تەكشۈرەيلى:

(1) $\cos 250°$; (2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\tan(-672°)$; (4) $\tan 3\pi$.

يېشىش: (1) چۈنكى $250°$ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ، شۇڭا

$$\cos 250° < 0;$$

(2) چۈنكى $-\frac{\pi}{4}$ تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ، شۇڭا

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0;$$

(3) چۈنكى

$$\tan(-672°) = \tan(48° - 2\times 360°) = \tan 48°$$

ھەمدە $48°$ بىرىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ، شۇڭا

$$\tan(-672°) > 0;$$

(4) چۈنكى

$$\tan 3\pi = \tan(\pi + 2\pi) = \tan\pi$$

ھەمدە π نىڭ ئاخىرقى تەرىپى x ئوقىنىڭ ئۈستىدە، شۇڭا

$$\tan\pi = 0.$$

ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تەكشۈرۈشنى ساۋاقداشلار ئۆزلىرى ئورۇندىسا بولىدۇ.

1 ـ باب

5 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى:

$$(1)\ \sin 1480^\circ 10';\quad (2)\ \cos\frac{9\pi}{4};\quad (3)\ \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right).$$

يېشىش:

$$(1)\ \sin 1480^\circ 10' = \sin(40^\circ 10' + 4\times 360^\circ)$$
$$= \sin 40^\circ 10' \approx 0.645;$$

$$(2)\ \cos\frac{9\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(3)\ \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ بىۋاستە تېپىشقا بولىدۇ. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ قىممىتىنى تېپىشتا، بۇلۇڭلارنى ئۆلچەش سىستېمىسى مەسىلىسىگە دىققەت قىلىش كېرەك.

مەشىق

1. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن پايدىلىنىپ $\frac{7\pi}{6}$ نىڭ ئۈچ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى تېپىڭ.

2. θ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى $P(-12, 5)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن، θ بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. جەدۋەلنى تولدۇرۇڭ:

α بۇلۇڭ	0°	90°	180°	270°	360°
α بۇلۇڭنىڭ رادىئان سانى					
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

4. (ئېغىزچە) α نى ئۈچىبۇلۇڭنىڭ بىر ئىچكى بۇلۇڭى دېسەك، $\sin\alpha$، $\cos\alpha$، $\tan\alpha$، $\tan\frac{\alpha}{2}$ لەرنىڭ قايسىلىرى مەنپىي قىممەت ئېلىشى مۇمكىن؟

5. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ ئالامىتىنى بەلگىلەڭ:

$(1)\ \sin 156^\circ;$ $\quad(2)\ \cos\frac{16}{5}\pi;$ $\quad(3)\ \cos(-450^\circ);$

$(4)\ \tan\left(-\frac{17}{8}\pi\right);$ $\quad(5)\ \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right);$ $\quad(6)\ \tan 556^\circ.$

6. ① $\sin\theta > 0$، ② $\sin\theta < 0$، ③ $\cos\theta > 0$، ④ $\cos\theta < 0$، ⑤ $\tan\theta > 0$ ۋە ⑥ $\tan\theta < 0$ لەرنىڭ ئىچىدىن مۇۋاپىق مۇناسىۋەت ئىپادىسىنىڭ تەرتىپ نومۇرىنى تاللاپ بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) θ بۇلۇڭ بىرىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا ①③، ①⑤، ③⑤، ئەكسىچە بولغاندىمۇ توغرا بولىدۇ؛

(2) θ بۇلۇڭ ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا ①④، ①⑥، ④⑥، ئەكسىچە بولغاندىمۇ توغرا بولىدۇ؛

CHAPTER

(3) θ بۇلۇڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا، ئەكسىچە بولغاندىمۇ توغرا بولىدۇ؛

(4) θ بۇلۇڭ تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا، ئەكسىچە بولغاندىمۇ توغرا بولىدۇ.

7. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ):

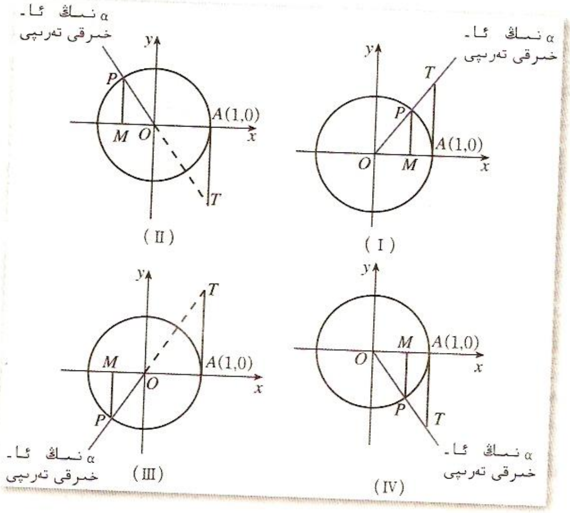
(1) $\cos 1109°$; 0.8746 (2) $\tan \dfrac{19\pi}{3}$; $=\sqrt{3}$

(3) $\sin(-1050°)$; $=0.5$ (4) $\tan\left(-\dfrac{31\pi}{4}\right)$. $=1$

ئەمدى، شەكىل نۇقتىسىدىن ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە بىلەن تونۇشۇپ ئۆتەيلى.

7.2.1 - رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىرلىك چەمبەر بىلەن P نۇقتىدا كېسىشىدۇ. P نۇقتا ئارقىلىق x ئوققا تىك يۈرگۈزسەك، تىك ئاساسى M بولىدۇ. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$|MP| = |y| = |\sin\alpha|;\quad |OM| = |x| = |\cos\alpha|.$$



7.2.1 - رەسىم

مۇلاھىزە؟

(1) يۇقىرىقى تەڭلىكتىكى مۇتلەق قىممەت بەلگىسىنى ئېلىۋېتىش ئۈچۈن، OM ،MP كېسىكلەرگە مۇۋاپىق بىر يۆنىلىش بەلگىلەپ، ئۇلارنىڭ ئالدىغان قىممىتىنى P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى بىلەن بىردەك قىلغىلى بولامدۇ؟

(2) بىرلىك چەمبەردىن پايدىلىنىپ، OM ،MP لەرگە ئوخشاش كېسىكتىن بىرنى تېپىش ئارقىلىق α بۇلۇڭنىڭ تانگېنسىنى ئىپادىلىيەلەمسىز؟

بىزگە مەلۇمكى، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى كوئوردىنات ئوقلىرىنىڭ يۆنىلىشى بىلەن مۇناسىۋەتلىك. شۇڭا، بىز تەبىئىي هالدا كوئوردىنات ئوقلىرىنىڭ يۆنىلىشىنى OM ، MP كېسىكلەرنىڭ يۆنىلىشى دەپ بەلگىلىۋېلىپ، ئۇلارنىڭ ئالىدىغان قىممىتىنى P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى بىلەن باغلاشنى ئويلايمىز.

α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى كوئوردىنات ئوقى ئۈستىدە ياتمىغاندا، O نى باشلىنىش نۇقتىسى، M نى ئاخىرقى نۇقتىسى قىلىپ، تۆۋەندىكىلەرنى بەلگىلەيمىز:

OM كېسىك x ئوق بىلەن ئوخشاش يۆنىلىشلىك بولغاندا، OM ئوڭ يۆنىلىشلىك بولۇپ، مۇسبەت قىممەت x كە ئىگە بولىدۇ؛ OM كېسىك x ئوق بىلەن قارىمۇقارشى يۆنىلىشلىك بولغاندا، OM تەتۈر يۆنىلىشلىك بولۇپ، مەنپىي قىممەت x كە ئىگە بولىدۇ. بۇنىڭدىكى x بولسا P نۇقتىنىڭ ئابسىسسىسى. شۇنداق قىلىپ، قايسى خىل ئەھۋال بولۇشتىن قەتئىينەزەر، هامان مۇنداق بولىدۇ:

$$OM = x = \cos\ \alpha .$$

ئوخشاش قائىدە بويىچە، α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى كوئوردىنات ئوقى ئۈستىدە ياتمىغاندا، M نى باشلىنىش نۇقتىسى، P نى ئاخىرقى نۇقتىسى قىلىپ، تۆۋەندىكىلەرنى بەلگىلەيمىز:

MP كېسىك y ئوق بىلەن ئوخشاش يۆنىلىشلىك بولغاندا، MP ئوڭ يۆنىلىشلىك بولۇپ، مۇسبەت قىممەت y كە ئىگە بولىدۇ؛ MP كېسىك y ئوق بىلەن قارىمۇقارشى يۆنىلىشلىك بولغاندا، MP تەتۈر يۆنىلىشلىك بولۇپ، مەنپىي قىممەت y كە ئىگە بولىدۇ. بۇنىڭدىكى y بولسا P نۇقتىنىڭ ئوردىناتى. شۇنداق قىلىپ، قايسى خىل ئەھۋال بولۇشتىن قەتئىينەزەر هامان مۇنداق بولىدۇ:

$$MP = y = \sin\ \alpha .$$

OM ، MP لارغا ئوخشاش يۆنىلىشكە ئىگە دەپ قارالغان بۇ خىل كېسىكلەر **يۆنىلىشلىك كېسىك** (directed line segment)دەپ ئاتىلىدۇ.

ئۇنداقتا، α بۇلۇڭنىڭ تانگېنسىنى يۆنىلىشلىك كېسىكتىن پايدىلىنىپ قانداق ئىپادىلەيمىز؟

7.2.1 - رەسىمدىكىدەك، $A(1, 0)$ نۇقتا ئارقىلىق بىرلىك چەمبەرگە ئۇرۇنما يۈرگۈزسەك، بۇ ئۇرۇنما چوقۇم y ئوققا پاراللېل بولىدۇ (نېمە ئۈچۈن؟)، ئۇ α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى (α بىرىنچى، تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا) ياكى ئاخىرقى تەرىپىنىڭ قارشى يۆنىلىشتىكى داۋامى (α ئىككىنچى، ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا) بىلەن T نۇقتىدا كېسىشىدۇ دەپ پەرەز قىلايلى. تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ ئېنىقلىمىسى ۋە ئوخشاش ئۈچبۇلۇڭلارغا دائىر بىلىملەرگە ئاساسەن، يۆنىلىشلىك كېسىك OA ، AT لاردىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\tan\ \alpha = AT = \frac{y}{x}\ ❶ .$$

❶ بۇ تەڭلىكنى ئۆزىڭىز ئىسپاتلىيالامسىز؟

بىرلىك چەمبەردىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرى سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرىدىغان ئۇنۇملۇك قورال بولۇپ، ئۇنىڭ ياردىمىدە ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى توغرا سىزغىلى بولۇپلا قالماستىن، بەلكى يەنە ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنىمۇ مۇھاكىمە قىلغىلى بولىدۇ.

بىز بىرلىك چەمبەر بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولغان بۇ ئۈچ يۆنىلىشلىك كېسىك MP ، OM ۋە AT نى ئايرىم - ئايرىم هالدا α بۇلۇڭنىڭ **سىنۇس سىزىقى، كوسىنۇس سىزىقى ۋە تانگېنس سىزىقى** دەپ ئاتايمىز، بۇلار ئومۇملاشتۇرۇلۇپ **ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرى** دېيىلىدۇ.

α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى x ئوق بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشكەندە، سىنۇس، تانگېنس سىزىقلىرى ئايرىم - ئايرىم ھالدا بىر نۇقتىغا ئايلىنىدۇ، بۇ چاغدا α بۇلۇڭنىڭ سىنۇس قىممىتى بىلەن تانگېنس قىممىتى ئوخشاشلا 0 بولىدۇ؛ α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى y ئوق بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشكەندە، كوسىنۇس سىزىقى بىر نۇقتىغا ئايلىنىپ، تانگېنس سىزىقى مەۋجۇت بولمايدۇ، بۇ چاغدا α بۇلۇڭنىڭ تانگېنس قىممىتى مەۋجۇت بولمايدۇ.

مەشىق

1. بىرلىك چەمبەردىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرىدىن چىقىپ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ قايسى خۇسۇسىيەتلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايسىز؟

2. تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ سىنۇس سىزىقى، كوسىنۇس سىزىقى ۋە تانگېنس سىزىقىنى سىزىڭ:

(1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{5\pi}{6}$; (3) $-\frac{2\pi}{3}$; (4) $-\frac{13\pi}{6}$.

3. 5 cm نى بىرلىك ئۇزۇنلۇق قىلغان بىر چەمبەر سىزىڭ، ئاندىن ئايرىم - ئايرىم ھالدا $225°$، $330°$ لۇق بۇلۇڭلارنىڭ سىنۇس سىزىقى، كوسىنۇس سىزىقى ۋە تانگېنس سىزىقىنى سىزىپ ئۇلارنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۆلچەڭ ھەمدە شۇ ئارقىلىق بۇ بۇلۇڭلارنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس ۋە تانگېنس قىممىتىنى يېزىڭ.

4. سىز ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرىنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئۇقۇمىنى تونۇشقا نىسبەتەن قانداق رولى بار دەپ قارايسىز؟

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

ترىگونومېترىيە ۋە ئاسترونومىيە

ترىگونومېترىيىنىڭ كېلىپ چىقىشى ۋە تەرەققىي قىلىشىنى ئاسترونومىيىدىن ئايرىپ قاراشقا بولمايدۇ، ئۇ ئاسترونومىيە كۆزىتىش نەتىجىلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىدىغان بىر خىل ئۇسۇل ھېسابلىنىدۇ. 1450 - يىلىدىن ئىلگىرىكى ترىگونومېترىيە ئاساسلىقى سفېرالىق ترىگونومېترىيىدىن ئىبارەت بولۇپ، بۇ، ئىنسانلارنىڭ دېڭىز قاتنىشى، ۋاقىت ھېسابلاش ۋە ئاسمان جىسىملىرىنى كۆزىتىش قاتارلىق ئەمەلىي پائالىيەتلىرىنىڭ ئېھتىياجى ئۈچۈنلا ئەمەس، بەلكى يەنە ئالەم سىرلىرىنىڭ ئىنسانلارغا بولغان غايەت زور جەلپ قىلىش كۈچى ئۈچۈنمۇ زۆرۈر ئىدى. بۇ خىل «ئاسمان جىسىملىرىنى ئۆلچەش ئىلمى» ھەقىقەتەن كىشىنى قىزىقتۇرىدۇ. كېيىن، ۋاستىلىك ئۆلچەش ۋە ئۆلچەش - سىزىش (گېئودېزىيە) خىزمىتىنىڭ ئېھتىياجى تۈپەيلىدىن تەكشىلىكتىكى ترىگونومېترىيە بارلىققا كەلدى.

ياۋروپادا، ترىگونومېترىيىنى ئەڭ دەسلەپ ئاسترونومىيىدىن ئايرىپ چىققان ماتېماتىك گېرمانىيىلىك رېگيومونتانۇس (J. Regiomontanus، 1436 ~ 1476) بولۇپ، ئۇنىڭ 1464 - يىلى تاماملىغان «ھەر خىل ئۈچبۇلۇڭلار ھەققىدە مۇلاھىزە» دېگەن 5 توملۇق ئەسىرى ياۋروپادىكى ئاسترونومىيىدىن ئايرىلىپ چىققان ترىگونومېترىيىگە دائىر تۇنجى ئەسەر ھېسابلىنىدۇ، بۇ ئەسەردە ترىگونومېترىيىگە قارىتا مۇكەممەل، مۇستەقىل بولغان بايانلار تۇنجى قېتىم ئوتتۇرىغا قويۇلغان. ئالدىنقى 2 تومدا تەكشىلىكتىكى ترىگونومېترىيە سۆزلەنگەن، كېيىنكى

1 ـ باب

ئۈچ تومدا سفېرالىق ترىگونومېترىيە مۇھاكىمە قىلىنغان. ئۇ، بۇ ئەسىرنىڭ ئالدىنقى ئىككى تومدا، ھىندىستانلىقلار قوللانغان سىنۇستىن، يەنى يايىنىڭ يېرىم خوردىسىدىن پايدىلىنىپ، سىنۇس فۇنكسىيىسىنى ئېنىق ئىشلەتكەن، ئادەتتىكى ئۈچبۇلۇڭلارغا دائىر سىنۇس تېئورېمىسىنى مۇھاكىمە قىلىپ، ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىشنىڭ ئالگېبرالىق يېشىش ئۇسۇلىنى ئوتتۇرىغا قويغان؛ كېيىنكى ئۈچ تومدا، سفېرالىق ترىگونومېترىيىنىڭ سىنۇس تېئورېمىسى بىلەن تەرەپكە دائىر كوسىنۇس تېئورېمىسىنى ئوتتۇرىغا قويغان. ئۇنىڭ بۇ خىزمىتى ترىگونومېترىيىنىڭ تەكشىلىك ۋە سفېرالىق گېئومېترىيىدە قوللىنىلىشىغا مۇستەھكەم ئاساس سېلىپ، 16 ـ ئەسىردىكى ماتېماتىكلارغا ئىنتايىن چوڭ تەسىر كۆرسەتكەن، شۇنداقلا كوپېرنىك قاتارلىق بىر تۈركۈم ئاسترونومىيە ئالىملىرىغىمۇ ئىنتايىن چوڭ تەسىر كۆرسەتكەن.

رېگيومونتانۇس پەقەت سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىلا قوللانغانلىقى، ئۇنىڭ ئۈستىگە فۇنكسىيە قىممىتىنى مۇسبەت سانلار دائىرىسىدىلا چەكلەپ قويغانلىقى ئۈچۈن، زۆرۈر بولغان ترىگونومېترىيىلىك فورمۇلىلارنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا ئامال بولماي، ھېسابلاشتىكى قىيىنچىلىقلارنى كەلتۈرۈپ چىقارغان. كېيىن كوپېرنىكنىڭ ئوقۇغۇچىسى رېتىكۇس (G.J.Rhaeticus، 1514 ~ 1576) ئەنئەنىۋى ياي ـ خوردا مۇناسىۋىتىنى بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە مۇناسىۋىتىگە ئۆزگەرتىپ، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىنىڭ ئېنىقلىمىسىنى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقلىرىنىڭ نىسبىتى بىلەن ئىپادىلىگەن ھەمدە شۇ ئارقىلىق تەكشىلىك ترىگونومېترىيىسىنى سفېرالىق ترىگونومېترىيىدىن ئايرىپ چىققان. ئۇ يەنە ئالتە فۇنكسىيە (سىنۇس، كوسىنۇس، تانگېنس، كوتانگېنس، سېكانس، كوسېكانس)نى قوللىنىپ، ئېنىقلىق دەرىجىسى تېخىمۇ يۇقىرى بولغان سىنۇس، تانگېنس، سېكانس جەدۋىلىنى تۈزۈپ چىققان. بۇ خىزمەتلەر ترىگونومېترىيىنىڭ تەرەققىياتىنى زور دەرىجىدە ئىلگىرى سۈرگەن. ئەمەلىيەتتە، ئاسترونومىيە تەتقىقاتىنىڭ ئېھتىياجى تۈپەيلىدىن، ئېنىقلىق دەرىجىسى تېخىمۇ يۇقىرى بولغان ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلى تۈزۈش ئىزچىل تۈردە ماتېماتىكلارنىڭ كۈرەش نىشانى بولۇپ كەلگەن ئىدى، بۇ، ترىگونومېترىيىنىڭ تەرەققىياتىنى زور دەرىجىدە ئىلگىرى سۈرۈپلا قالماستىن، بەلكى يەنە لوگارىفمىنىڭ كەشىپ قىلىنىشىغىمۇ مەلۇم دەرىجىدە تۈرتكە بولدى.

فرانسىيە ماتېماتىكى ۋېتا (F.Vieta، 1540 ~ 1603) نىڭ تەكشىلىكتىكى ترىگونومېترىيە بىلەن سفېرالىق ترىگونومېترىيىنى سىستېمىلاشتۇرۇش ئۈستىدە ئىشلىگەن خىزمىتى ترىگونومېترىيىنى يەنىمۇ تەرەققىي قىلدۇردى. ئۇ ئىلگىرىكىلەرنىڭ ترىگونومېترىيە ئۈستىدە ئېلىپ بارغان تەتقىقات نەتىجىلىرىنى خۇلاسىلەپ، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ ۋە يانتۇ ئۈچبۇلۇڭلارنى يېشىش فورمۇلىلىرىنى يىغىنچاقلىدى ھەمدە ئۆزى بايقىغان يېڭى فورمۇلىلارنى تولۇقلىدى. مەسىلەن، تانگېنس فورمۇلىسى، يىغىندى ۋە ئايرىمىنى كۆپەيتمىگە ئايلاندۇرۇش فورمۇلىسى قاتارلىقلار. ئۇ يانتۇ ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش مەسىلىسىنى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش مەسىلىسىگە ئايلاندۇرۇپ، سفېرالىق تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنى يېشىشكە دائىر ھېسابلاش ئۇسۇللىرى بىلەن بىر يۈرۈش مۇكەممەل فورمۇلىنى ۋە ئۇنى ئەستە ساقلاش قائىدىسىنى ئوتتۇرىغا قويدى ھەمدە بۇ فورمۇلىلارنى ئالگېبرالىق شەكىلدە ئىپادىلىدى، بۇ ناھايىتى مۇھىم خىزمەت ئىدى.

16 ـ ئەسىرگە كەلگەندە، ترىگونومېترىيە ئاسترونومىيىدىن ئايرىلىپ چىقىپ، ماتېماتىكىنىڭ مۇستەقىل بىر تارمىقىغا ئايلاندى. كېيىن، دىففېرېنسىئال ۋە ئىنتېگرال، فىزىكا تەتقىقاتى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى (مەسىلەن، تەۋرىنىش، ئاۋازنىڭ تارقىلىشى قاتارلىقلارنى تەتقىق قىلىش) دىمۇ ئۆز رولىنى جارى قىلدۇردى.

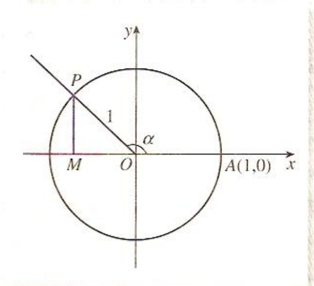
CHAPTER

2-2-1 ئوخشاش بىر بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ ئاساسىي مۇناسىۋىتى

同角三角函数的基本关系

ئىزدىنىش

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە بىرلىك چەمبەر ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردىنا-تى ئارقىلىق ئېنىقلىنىدۇ. سىز چەمبەرنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىدىن چىقىپ، ئوخشاش بىر بۇلۇڭنىڭ ئوخشاش بولمىغان ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتلەر ئۈستىدە مۇھاكىمە ئېلىپ بارالامسىز؟



8.2.1 ـ رەسىم

8.2.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، سىنۇس سىزىقى MP، كوسىنۇس سىزىقى OM ۋە رادىئۇس OP لارنىڭ ئۇزۇنلۇقىدىن بىر تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ ھاسىل قىلىنغان ھەمدە $OP=1$. گوگۇ تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$OM^2+MP^2=1,$$

شۇڭا $x^2+y^2=1$، يەنى

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

روشەنكى، بۇ فورمۇلا α نىڭ ئاخىرقى تەرىپى كوئوردىنات ئوقى بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشكەندىمۇ كۈچكە ئىگە بولىدۇ.

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ بولغاندا، مۇنداق بولىدۇ:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\text{❶}.$$

دېمەك، ئوخشاش بىر α بۇلۇڭنىڭ سىنۇس، كوسىنۇسلىرىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى 1 گە تەڭ، بۆلۈنمىسى α بۇلۇڭنىڭ تانگېنسىغا تەڭ بولىدۇ.

6 ـ مىسال. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\alpha$، $\tan\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

يېشىش: $\sin\alpha<0$، $\sin\alpha\neq-1$ بولغانلىقتىن، α ئۈچىنچى ياكى تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولىدۇ. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

---

❶ بۇنىڭدىن كېيىن، ئالاھىدە ئەسكەرتىش بېرىلگەنلىرىدىن سىرت، ترىگونومېترىيىلىك تەڭپۇڭلۇقنى ھەر ئىككى تەرىپى مەنىگە ئىگە بولغان ئەھۋالدىكى تەڭپۇڭلۇق دەپ قارايمىز.

ئەگەر α ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولسا، ئۇ ھالدا $\cos\alpha < 0$ بولىدۇ. شۇڭا،

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

شۇنىڭ بىلەن

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

ئەگەر α تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولسا، ئۇ ھالدا

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \tan\alpha = -\frac{3}{4}.$$

7 - مىسال. $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ نى ئىسپاتلايلى.

1 - خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلى: $\cos x \neq 0$ دىن $\sin x \neq -1$ ئىكەنلىكىنى بىلىشكە بولىدۇ، شۇڭا $1+\sin x \neq 0$، شۇنىڭ بىلەن

$$\text{سول تەرەپ} = \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x} = \text{ئوڭ تەرەپ}.$$

شۇڭا ئەسلىدىكى ئىپادە كۈچكە ئىگە.

2 - خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلى: چۈنكى

$$(1-\sin x)(1+\sin x)$$
$$= 1-\sin^2 x = \cos^2 x$$
$$= \cos x \cos x$$

ھەمدە $1-\sin x \neq 0$، $\cos x \neq 0$، شۇڭا

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

7 - مىسالدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بىر ترىگونومېترىيىلىك تەپمۇتەڭلىكنى ئىسپاتلاش ئۇسۇلى كۆپ خىل بولىدۇ. سىز بۇنىڭدىن خۇلاسە چىقىرالامسىز؟

مەشىق

1. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ ھەمدە α نىڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\alpha$، $\tan\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

2. $\tan\varphi = -\sqrt{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\varphi$، $\cos\varphi$ لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. $\sin\theta = 0.35$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\theta$، $\tan\theta$ لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ (نەتىجىنى ئىككى ئىناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېلىڭ).

4. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\cos\theta\tan\theta$;　　(2) $\frac{2\cos^2\alpha - 1}{1 - 2\sin^2\alpha}$.

5. ئىسپاتلاڭ:

(1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

(2) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2.1 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ئېنىقلىما ئۇسۇلى، 1 - فورمۇلا ۋە ھېسابلىغۇچ قاتارلىقلاردىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ ئۈچ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $-\frac{17\pi}{3}$;　(2) $\frac{21\pi}{4}$;　(3) $-\frac{23\pi}{6}$;　(4) $1\,500°$.

2. α بۇلۇڭىنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈستىدىكى بىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $P(3a, 4a)$، بۇنىڭدا $a \neq 0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\alpha$، $\cos\alpha$، $\tan\alpha$ لەرنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى تېپىڭ.

3. ھېسابلاڭ:

(1) $6\sin(-90°) + 3\sin 0° - 8\sin 270° + 12\cos 180°$;　-10

(2) $10\cos 270° + 4\sin 0° + 9\tan 0° + 15\cos 360°$;　15

(3) $2\cos\frac{\pi}{2} - \tan\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin\frac{3\pi}{2}$;　$(-\frac{3}{2})$

(4) $\sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^4\frac{3\pi}{2} - \tan^2\frac{\pi}{3}$.　$(-\frac{9}{4})$

4. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $a\sin 0° + b\cos 90° + c\tan 180°$;　0

(2) $-p^2\cos 180° + q^2\sin 90° - 2pq\cos 0°$;　$(p-q)^2$

(3) $a^2\cos 2\pi - b^2\sin \dfrac{3\pi}{2} + ab\cos\pi - ab\sin\dfrac{\pi}{2}$; $(a-b)^2$

(4) $m\tan 0 + n\cos\dfrac{1}{2}\pi - p\sin\pi - q\cos\dfrac{3}{2}\pi - r\sin 2\pi$. 0

5. تۆۋەندە بېرىلگەن شەرتلەرگە ئاساسەن فۇنكسىيە

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-4\cos 2x+3\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $x=\dfrac{\pi}{4}$; (2) $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

6. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ ئالامىتىنى بەلگىلەڭ:

(1) $\sin 186°$; (2) $\tan 505°$; (3) $\sin 7.6\pi$;

(4) $\tan\left(-\dfrac{23}{4}\pi\right)$; (5) $\cos 940°$; (6) $\cos\left(-\dfrac{59}{17}\pi\right)$.

7. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ ئالامىتىنى بەلگىلەڭ:

(1) $\tan 125°\cdot\sin 273°$; (2) $\dfrac{\tan 108°}{\cos 305°}$;

(3) $\sin\dfrac{5}{4}\pi\cdot\cos\dfrac{4}{5}\pi\cdot\tan\dfrac{11}{6}\pi$; (4) $\dfrac{\cos\dfrac{5}{6}\pi\cdot\tan\dfrac{11}{6}\pi}{\sin\dfrac{2}{3}\pi}$.

8. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ):

(1) $\sin\left(-\dfrac{67}{12}\pi\right)$; (2) $\tan\left(-\dfrac{15}{4}\pi\right)$;

(3) $\cos 398°13'$; (4) $\tan 766°15'$.

9. ئىسپاتلاڭ:

(1) θ بۇلۇڭ ئىككىنچى ياكى ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا ھەمدە پەقەت شۇنداق بولغاندىلا $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$ بولىدۇ؛

(2) θ بۇلۇڭ ئۈچىنچى ياكى تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا ھەمدە پەقەت شۇنداق بولغاندىلا $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$ بولىدۇ؛

(3) θ بۇلۇڭ بىرىنچى ياكى تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا ھەمدە پەقەت شۇنداق بولغاندىلا $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$ بولىدۇ؛

(4) θ بۇلۇڭ بىرىنچى ياكى ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ بولغاندا ھەمدە پەقەت شۇنداق بولغاندىلا $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$ بولىدۇ.

10. (1) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ھەمدە α نىڭ تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\alpha$، $\tan\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ ھەمدە α نىڭ ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\alpha$ ، $\tan\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(3) $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(4) $\cos\alpha = 0.68$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\alpha$ ، $\tan\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ (نەتىجىنى ئىككى ئناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېلىڭ).

11. $\sin x = -\frac{1}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos x$ ، $\tan x$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

12. $\tan\alpha = \sqrt{3}$ ، $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\alpha - \sin\alpha$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

13. ئىسپاتلاڭ:

(1) $\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$;

(2) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;

(3) $(\cos\beta - 1)^2 + \sin^2\beta = 2 - 2\cos\beta$;

(4) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$.

B گۇرۇپپا

1. $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$ نى ئاددىيلاشتۇرۇڭ.

2. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ نى ئاددىيلاشتۇرۇڭ، بۇنىڭدىكى α ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ.

3. $\tan\alpha = 2$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. مۇشۇ پاراگرافتىكى 7 ـ مىسالدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ دەل $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نىڭ بىر ئۆزگەرگەن شەكلىدىن ئىبارەت. سىز ئوخشاش بىر بۇلۇڭنىڭ تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ ئاساسىي مۇناسىۋەتتىدىن پايدىلىنىپ تېخىمۇ كۆپ مۇناسىۋەت ئىپادىلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

تىرىگونومېتىرىيىلىك فۇنكسىيىگە دائىر ھاسىلىۋى فورمۇلىلار

3-1

مۇلاھىزە؟

بىز بىرلىك چەمبەردىن پايدىلىنىپ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىگە ئېنىقلىما بەردۇق، ئۇنىڭ ئۇستىگە
چەمبەر ناھايىتى ياخشى سىممېترىكلىككە ئىگە. چەمبەرنىڭ بۇ خىل سىممېترىكلىكىدىن پايدىلىنىپ ترىگونو-
مېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىشقا بولامدۇ؟ مەسىلەن، بىرلىك چەمبەرنىڭ x
ئوق، y ئوق ۋە تۈز سىزىق $y=x$ لەرگە نىسبەتەن سىممېترىكلىكى ھەمدە كوئوردىنات بېشى O غا نىسبە-
تەن سىممېترىكلىكى قاتارلىقلاردىن چىقىپ، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ بەزىبىر خۇسۇسىيەتلىرىگە ئې-
رىشكىلى بولامدۇ؟

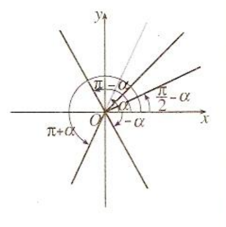
ئىزدىنىش

بىر α بۇلۇڭ بېرىلگەن.

(1) بۇلۇڭ $\pi+\alpha$ ، $\pi-\alpha$ لارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئا-
خىرقى تەرىپى قانداق مۇناسىۋەتكە ئىگە؟ ئۇلارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى ئارىسىدا قانداق مۇ-
ناسىۋەت بار؟

(2) $-\alpha$ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى قانداق مۇناسىۋەتكە ئىگە؟
ئۇلارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

(3) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى قانداق مۇناسىۋەتكە ئى-
گە؟ ئۇلارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟



1.3.1 - رەسىم

1.3.1 - رەسىمدىن بايقاشقا بولىدۇكى:

(1) $\pi+\alpha$ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى
تەرىپى كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك؛

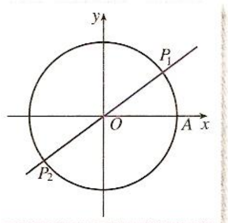
$\pi-\alpha$ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرى-
پى y ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك؛

(2) $-\alpha$ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تە-
رىپى x ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك؛

CHAPTER 1

(3) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى تۈز سىزىق $y=x$ كە نىسبەتەن سىممېترىك.

تۆۋەندە، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا بىرلەشتۈرۈپ، يۇقىرىدىكى سىممېترىكلىككە ئاساسەن بۇ بۇلۇڭلارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ مۇناسىۋىتىنى مۇزاكىرە قىلىمىز.



2.3.1 ـ رەسىم

2.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك، خالىغان α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى $P_1(x, y)$ دەپ پەرەز قىلايلى. $\pi+\alpha$ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك، $\pi+\alpha$ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى P_2 بولسا P_1 نۇقتا بىلەن كوئوردىنات بېشى O غا نىسبەتەن سىممېترىك، شۇڭا P_2 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(-x, -y)$ بولىدۇ. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\sin\alpha = y, \qquad \cos\alpha = x, \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x};$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -y, \quad \cos(\pi+\alpha) = -x, \quad \tan(\pi+\alpha) = \frac{y}{x}.$$

شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكى فورمۇلىلارغا ئېرىشىمىز:

2 ـ فورمۇلا

$$\begin{aligned}&\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha,\\&\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,\\&\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha.\end{aligned}$$

ئوخشاش يول بىلەن تۆۋەندىكى فورمۇلىلارغا ئېرىشىمىز:

3 ـ فورمۇلا:

$$\begin{aligned}&\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\\&\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\\&\tan(-\alpha) = -\tan\alpha.\end{aligned}$$

3 ـ ۋە 4 ـ فورمۇلىنى ساۋاقداشلار ئۆزلىرى كەلتۈرۈپ چىقارسا بولىدۇ.

4 ـ فورمۇلا

$$\begin{aligned}&\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha,\\&\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha,\\&\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha.\end{aligned}$$

1 - باب

مۇلاھىزە؟

سىز 1 ~ 4 - گىچە بولغان فورمۇلىلارنى ئىخچام تىل بىلەن يىغىنچاقلاپ بېرەلەمسىز؟ ئۇلارنىڭ رولى نېمە؟

بىز 1 ~ 4 - گىچە بولغان فورمۇلىلارنى تۆۋەندىكى بىر بۆلەك سۆز ئارقىلىق يىغىنچاقلايمىز:

$$\alpha + k\cdot 2\pi\ (k \in \mathbf{Z}),\ -\alpha,\ \pi \pm \alpha$$

لارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ قىممىتى α نىڭ ئوخشاش ناملىق فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ ئالدىغا ئايرىم - ئايرىم ھالدا α نى تار بۇلۇڭ دەپ قارىغاندىكى ئەسلىي فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ ئالامىتىنى قويغانغا تەڭ بولىدۇ.

1 - مىسال. فورمۇلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى:

(1) $\cos 225^\circ$;　　(2) $\sin \dfrac{11\pi}{3}$;

(3) $\sin\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$;　　(4) $\cos(-2\,040^\circ)$.

يېشىش:

(1) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ)$

$= -\cos 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(2) $\sin \dfrac{11\pi}{3} = \sin\left(4\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\sin\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{16\pi}{3}$

$= -\sin\left(5\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= -\left(-\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) $\cos(-2\,040^\circ) = \cos 2\,040^\circ$

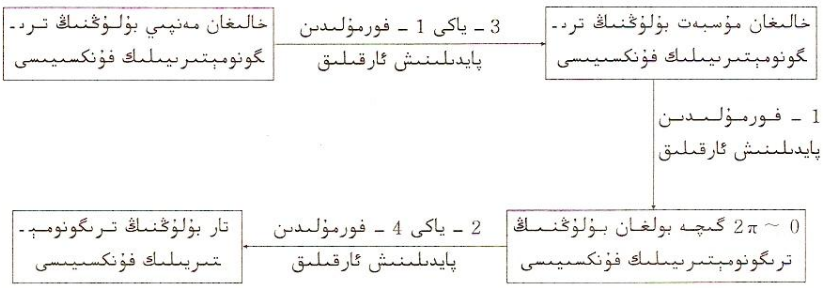
$= \cos(6 \times 360^\circ - 120^\circ)$

$= \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ)$

$= -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

1 - مىسالنى يەشكەندىن كېيىن، 1 ~ 4 - گىچە بولغان فورمۇلىلارنىڭ رولىغا قارىتا يەنىمۇ ئىلگىرىلىگەن ھالدا قانداق تونۇشقا ئىگە بولدىڭىز؟ خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىنى تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىگە ئايلاندۇرۇشنىڭ باسقۇچلىرىنى ئۆزىڭىز يىغىنچاقلىيالامسىز؟

ئومۇمەن، خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىنى 1 ~ 4 - گىچە بولغان فورمۇلىلاردىن پايدىلىنىپ تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىگە ئايلاندۇرۇش تۆۋەندىكى باسقۇچلار بويىچە ئېلىپ بېرىلىدۇ:



ئەمەلىيەتتە، يۇقىرىقى قەدەم باسقۇچلار نامەلۇمنى مەلۇمغا ئايلاندۇرۇشتىن ئىبارەت يىغىنچاقلاش ئىدىيىسىنى گەۋدىلەندۈرگەن.

2 ـ مىسال. $\frac{\cos(180^\circ+\alpha)\cdot\sin(\alpha+360^\circ)}{\sin(-\alpha-180^\circ)\cdot\cos(-180^\circ-\alpha)}$ نى ئاددىيلاشتۇرايلى.

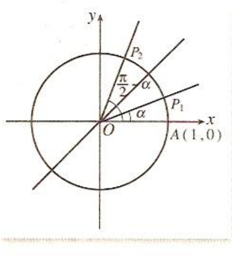
يېشىش:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha-180^\circ)&=\sin[-(180^\circ+\alpha)]\\&=-\sin(180^\circ+\alpha)\\&=-(-\sin\alpha)\\&=\sin\alpha,\\ \cos(-180^\circ-\alpha)&=\cos[-(180^\circ+\alpha)]\\&=\cos(180^\circ+\alpha)\\&=-\cos\alpha,\end{aligned}$$

شۇڭا

$$\text{ئەسلى ئىپادە}=\frac{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)}=1.$$

3.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك، خالىغان α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى P_1 نىڭ كوئوردىناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلايلى. $\frac{\pi}{2}-\alpha$ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى تۈز سىزىق $y=x$ كە نىسبەتەن سىممېترىك، $\frac{\pi}{2}-\alpha$ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى P_2 بولسا P_1 نۇقتا بىلەن تۈز سىزىق $y=x$ كە نىسبەتەن سىممېترىك بولغانلىقتىن، P_2 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (y, x) بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن:



3.3.1 ـ رەسىم

$$\cos\alpha=x,\qquad \sin\alpha=y;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=y,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x.$$

1 ـ باب

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكى فورمۇلىلارغا ئېرىشىمىز:

5 ـ فورمۇلا

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

$\frac{\pi}{2}+\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ بولغانلىقتىن، 4 ـ ۋە 5 ـ فورمۇلىدىن تۆۋەندىكى فورمۇلىلارغا ئېرىشىمىز:

6 ـ فورمۇلا

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

5 ـ ۋە 6 ـ فورمۇلىنى تۆۋەندىكىدەك يىغىنچاقلاشقا بولىدۇ:

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ **نىڭ سىنۇس** (كوسىنۇس) **فۇنكسىيە قىممىتى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا** α **نىڭ كوسىنۇس** (سىنۇس) **فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ ئالدىغا** α **نى تار بۇلۇڭ دەپ قارىغاندىكى ئەسلي فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ ئالامىتىنى قويغانغا تەڭ بولىدۇ.**

5 ـ ياكى 6 ـ فورمۇلىدىن پايدىلىنىپ، سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنى بىر ـ بىرىگە ئايلاندۇرۇشقا بولىدۇ.

1 ~ 6 ـ گىچە بولغان فورمۇلىلار **ھاسىلىۋى فورمۇلىلار** (induction formula) دېيىلىدۇ.

3 ـ مىسال. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلايلى:

(1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$;   (2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$.

ئىسپات:

(1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$;

(2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=-\sin\alpha$.

4 ـ مىسال. $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\sin\left(\dfrac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$ نى ئاددىيلاشتۇرايلى.

يېشىش:

$$\text{ئەسلىي ئىپادە}=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)\cos\left[5\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos\alpha)\sin(\pi-\alpha)\left[-\sin(\pi+\alpha)\right]\sin\left[4\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}$$

$$=\frac{-\sin^2\alpha\cos\alpha\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos\alpha)\sin\alpha\left[-(-\sin\alpha)\right]\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha\,.$$

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنى تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىگە ئايلاندۇرۇڭ ھەمدە مىسالدىكى توغرا سىزىق ئۈستىگە تولدۇرۇڭ:

(1) $\cos\dfrac{13}{9}\pi=$ _______; (2) $\sin(1+\pi)=$ _______;

(3) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)=$ _______; (4) $\cos(-70°6')=$ _______.

2. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ قىممىتىنى فورمۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ:

(1) $\cos(-420°)$; (2) $\sin\left(-\dfrac{7}{6}\pi\right)$;

(3) $\sin(-1\,300°)$; (4) $\cos\left(-\dfrac{79}{6}\pi\right)$.

3. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\sin(\alpha+180°)\cos(-\alpha)\sin(-\alpha-180°)$;

(2) $\sin^3(-\alpha)\cos(2\pi+\alpha)\tan(-\alpha-\pi)$.

4. جەدۋەلنى تولدۇرۇڭ:

α	$-\dfrac{4\pi}{3}$	$-\dfrac{5\pi}{4}$	$-\dfrac{5\pi}{3}$	$-\dfrac{7\pi}{4}$	$-\dfrac{8\pi}{3}$	$-\dfrac{11\pi}{4}$
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\tan\alpha$						

5. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنى تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىگە ئايلاندۇرۇڭ ھەمدە مىسالدىكى توغرا سىزىق ئۈستىگە تولدۇرۇڭ:

(1) $\tan\frac{3}{5}\pi=$ ______; (2) $\tan 100°21'=$ ______;

(3) $\tan\frac{31}{36}\pi=$ ______; (4) $\tan 324°32'=$ ______.

6. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ قىممىتىنى ھاسىلىۋى فورمۇلىلاردىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ):

(1) $\cos\frac{65}{6}\pi$; (2) $\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)$; (3) $\cos(-1\,182°13')$;

(4) $\sin 670°39'$; (5) $\tan\left(-\frac{26\pi}{3}\right)$; (6) $\tan 580°21'$.

7. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos(2\pi-\alpha)$;

(2) $\cos^2(-\alpha)-\frac{\tan(360°+\alpha)}{\sin(-\alpha)}$.

3.1 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنى تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسىگە ئايلاندۇرۇڭ ھەمدە مىسالدىكى توغرا سىزىقنىڭ ئۈستىگە تولدۇرۇڭ:

(1) $\cos 210°=$ ______; (2) $\sin 263°42'=$ ______;

(3) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$ ______; (4) $\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right)=$ ______;

(5) $\cos\left(-\frac{11}{9}\pi\right)=$ ______; (6) $\cos(-104°26')=$ ______;

(7) $\tan 632°24'=$ ______; (8) $\tan\frac{17\pi}{6}=$ ______.

2. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيەلەرنىڭ قىممىتىنى ھاسىلۇۋى فورمۇلىلاردىن پايدىلىنىپ تېپىڭ:

(1) $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$; (2) $\sin(-1574°)$;

(3) $\sin(-2160°52')$; (4) $\cos(-1751°36')$;

(5) $\cos 1615°8'$; (6) $\sin\left(-\frac{26}{3}\pi\right)$.

3. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\sin(-1071°)\cdot\sin99° + \sin(-171°)\cdot\sin(-261°)$;

(2) $1 + \sin(\alpha - 2\pi)\cdot\sin(\pi + \alpha) - 2\cos^2(-\alpha)$.

4. ئىسپاتلاڭ:

(1) $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$; (2) $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$;

(3) $\tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$.

B گۇرۇپپا

1. ھېسابلاڭ:

(1) $\sin 420°\cdot\cos 750° + \sin(-330°)\cdot\cos(-660°)$;

(2) $\tan 675° + \tan 765° - \tan(-330°) + \tan(-690°)$;

(3) $\sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

2. $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ھېسابلاڭ:

(1) $\sin(5\pi - \alpha)$; (2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

(3) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; (4) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

CHAPTER 4-1

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيەتلىرى

1-4-1 سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكى

بىزگە مەلۇمكى، ھەقىقىي سانلار توپلىمى بىلەن بۇلۇڭلار توپلىمى ئارىسىدا بىرگە بىر ماسلىق مۇناسىۋىتى ئورنىتىشقا بولىدۇ، ھالبۇكى، ئېنىق بىر بۇلۇڭغا يەنە بىردىنبىر ئېنىق سىنۇس (ياكى كوسىنۇس) قىممىتى ماس كېلىدۇ. شۇنداق قىلىپ، خالىغان بىر ھەقىقىي سان x بېرىلسە، بىردىنبىر ئېنىق قىممەت $\sin x$ (ياكى $\cos x$) ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ. بۇ ماسلىق قائىدىسى ئارقىلىق ئېنىقلانغان فۇنكسىيە $y=\sin x$ (ياكى $y=\cos x$) سىنۇس فۇنكسىيىسى (ياكى كوسىنۇس فۇنكسىيىسى)دەپ ئاتىلىدۇ، ئۇنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\mathbf{R}$ بولىدۇ.

بىر يېڭى فۇنكسىيىگە يولۇققاندا، تەبىئىي ھالدا ئۇنىڭ گرافىكىنى سىزىپ، گرافىكىنىڭ شەكلىنى كۆزىتىمىز، ئۇنىڭ قانداق ئالاھىدە نۇقتىلارغا ئىگە ئىكەنلىكىگە قارايمىز ھەمدە گرافىكىنىڭ ياردىمىدە ئۇنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇھاكىمە قىلىمىز، مەسىلەن، قىممەت ساھەسى، مونوتونلۇقى، تاق ـ جۈپلۈكى، ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتى قاتارلىقلار. بۇنىڭدىن باشقا، ئالدىدىكى ئۆگىنىشلەردىن ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ «قايتا ـ قايتا دەۋرلىنىش» تىن ئىبارەت ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىگە ئىگە ئىكەنلىكىنى كۆرگەنىدۇق. تۆۋەندە سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

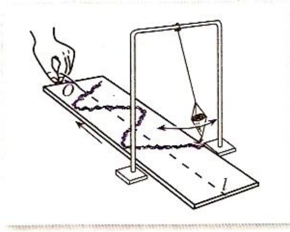
ئالدى بىلەن باب بېشىدىكى رەسىمدە ئىپادىلەنگەن «ئاددىي گارمونىك ھەرىكەت» تەجرىبىسىنى كۆرۈپ باقايلى.

بۇ تەجرىبىنى ساۋاقداشلار ئۆزلىرى قول سېلىپ ئىشلەپ باقسا بولىدۇ.

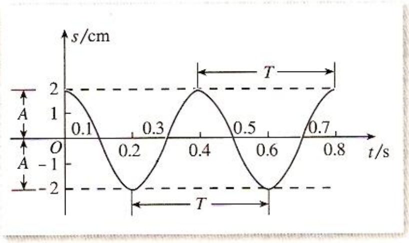
سۇلياۋ بوتۇلكىنىڭ ئاستىدىن بىر كىچىك تۆشۈك ئېچىپ بىر ۋارونكا ياساپ، ئاندىن ئۇنى جازىغا ئاساق بىر ئاددىي ماياتنىك ھاسىل بولىدۇ (1.4.1 ـ رەسىم). ۋارونكىنىڭ ئاستى تەرىپىگە بىر پارچە قەغەز تاختا قويۇپ، ئۇنىڭ ئوتتۇرىسىغا بىر تۈز سىزىق سىزىمىز ھەمدە ئۇنى كوئوردېنات سىستېمىسىنىڭ ئابسېسسا ئوقى قىلىمىز. ۋارونكىغا قۇم قۇيۇپ، ئاندىن ئۇنى تەڭپۇڭلۇق ئورنىدىن يىراقلاشتۇرۇپ قويۇپ بەرسەك ھەرىكەتلىنىدۇ، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، قەغەز تاختىنى تەكشى تېزلىك بىلەن تارتساق، قەغەز تاختىدا بىر ئەگرى سىزىق ھاسىل بولىدۇ، بۇ دەل ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ گرافىكىدىن ئىبارەت. فىزىكىدا ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ گرافىكى «سىنۇس ئەگرى سىزىقى» ياكى «كوسىنۇس ئەگرى سىزىقى» دېيىلىدۇ. ئۇ، ۋارونكىنىڭ تەڭپۇڭلۇق ئورنىدىن يۆتكىلىشى s (ئوردىناتى) نىڭ ۋاقىت t (ئابسېسسا) غا ئە-

CHAPTER

گىشىپ ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى ئىپادىلەپ بېرىدۇ. 2.4.1 - رەسىم مەلۇم ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ گرافىكىدۇر.



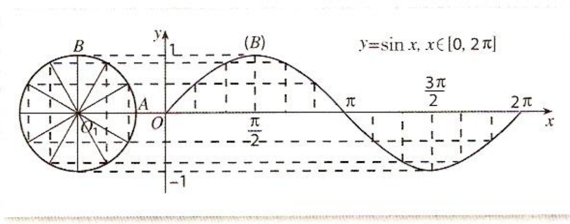
1.4.1 - رەسىم



2.4.1 - رەسىم

يۇقىرىقى تەجرىبىدىن سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىغا قارىتا بىۋاستە تەسىراتقا ئىگە بولدىڭىزمۇ؟ ئەمدى سىنۇس سىزىقىدىن پايدىلىنىپ سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ بىرقەدەر ئېنىق بولغان گرافىكىنى سىزايلى.

3.4.1 - رەسىمدىكىدەك، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى x ئوق ئۈستىدىن بىر O_1 نۇقتىنى ئېلىپ، O_1 نى چەمبەر مەركىزى، بىرلىك ئۇزۇنلۇقنى رادىئۇس قىلىپ چەمبەر سىزىمىز، $\odot O_1$ بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى A دىن باشلاپ $\odot O_1$ نى تەڭ 12 بۆلەككە بۆلۈپ، $\odot O_1$ نىڭ ئۈستىدىكى ھەرقايسى بۆلۈنۈش نۇقتىلىرى ئارقىلىق x ئوققا تىك چۈشەرسەك، 0، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{\pi}{2}$، …، 2π قاتارلىق بۇلۇڭلارغا ماس بولغان سىنۇس سىزىقلىرىغا ئېرىشىمىز. بۇنىڭغا ماس ھالدا، يەنە x ئوق ئۈستىدىكى 0 دىن 2π غىچە بولغان ئارىلىقنى تەڭ 12 بۆلەككە بۆلىمىز. x بۇلۇڭنىڭ سىنۇس سىزىقلىرىنى ئوڭ تەرەپكە پاراللېل يۆتكەپ، ئۇنىڭ باشلىنىش نۇقتىسىنى x ئوق ئۈستىدىكى x نۇقتا بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشۈرىمىز، ئۇنىڭدىن كېيىن بۇ سىنۇس سىزىقلىرىنىڭ ئاخىرقى نۇقتىلىرىنى سىلىق ئەگرى سىزىق ئارقىلىق تۇتاشتۇرساق، فۇنكسىيە $y=\sin x$، $x\in[0,2\pi]$ نىڭ گرافىكىغا ئېرىشىمىز.



3.4.1 - رەسىم

ئاخىرقى تەرەپى ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممەتلىرى ئوخشاش بولىدىغانلىقتىن، فۇنكسىيە

$$y=\sin x,\quad x\in[2k\pi,\ 2(k+1)\pi),\quad k\in\mathbf{Z},\quad k\neq 0$$

نىڭ گرافىكى بىلەن فۇنكسىيە

$$y=\sin x,\quad x\in[0,\ 2\pi)$$

1 - باب

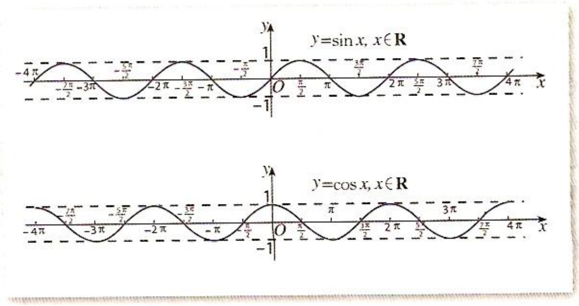
نىڭ گرافىكىنىڭ شەكلى پۈتۈنلەي ئوخشاش بولىدۇ، شۇڭا بىز پەقەت فۇنكسىيە

$$y=\sin x,\ \ x\in[0,\ 2\pi)$$

نىڭ گرافىكىنى ئوڭغا ياكى سولغا پاراللېل يۆتكىسەك (ھەر قېتىمدا π 2 بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا)لا سىـ-
نۇس فۇنكسىيىسى

$$y=\sin x,\ \ x\in\mathbf{R}$$

نىڭ گرافىكىغا ئېرىشىمىز (4.4.1 - رەسىم).



4.4.1 - رەسىم

ئىزدىنىش

ھاسىلىۋى فورمۇلىلارغا ئاساسەن، سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىنى ئاساس قىلىپ، مۇۋاپىق شەكىل ئالماشتۇرۇش ئارقىلىق كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىـ-
كىغا ئېرىشەلەمسىز؟

6 - ھاسىلىۋى فورمۇلىدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

ھالبۇكى فۇنكسىيە

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),\ x\in\mathbf{R}$$

نىڭ گرافىكىغا سىنۇس فۇنكسىيىسى

$$y=\sin x,\ x\in\mathbf{R}$$

نىڭ گرافىكىنى سولغا $\frac{\pi}{2}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش ئارقىلىق ئېرىشكىلى بولىدۇ (4.4.1 -
رەسىم).

سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكى ئايرىم - ئايرىم ھالدا **سىنۇس ئەگرى سىزىقى** (sine curve) ۋە **كوسىنۇس ئەگرى سىزىقى** (cosine curve) دېيىلىدۇ.

مۇلاھىزە؟

سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىنى سىزغاندا، قايسى ئاچقۇچلۇق نۇقتىلارنى چىڭ تۇتۇش كېرەك؟

3.4.1 ـ رەسىمنى كۆزەتسەك، فۇنكسىيە $y=\sin x$ ، $x \in [0,\ 2\pi]$ نىڭ گرافىكىدا، تۆۋەندىكى بەش نۇقتا ئاچقۇچلۇق رول ئوينايدۇ:

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0).$$

ئەمەلىيەتتە، بۇ بەش نۇقتا بەلگىلەنگەندىن كېيىن، فۇنكسىيە $y=\sin x$ ، $x \in [0,\ 2\pi]$ نىڭ گرافىكىنىڭ شەكلى ئاساسىي جەھەتتىن ئېنىقلانغان بولىدۇ. شۇڭا، توغرىلىق دەرىجىسىگە قويۇلىدىغان تەلەپ ئانچە يۇقىرى بولمىغاندا، بىز كۆپ ھاللاردا ئالدى بىلەن مۇشۇ بەش ئاچقۇچلۇق نۇقتىنى تېپىۋېلىپ، ئاندىن ئۇلارنى سىلىق ئەگرى سىزىق بىلەن تۇتاشتۇرۇش ئارقىلىق فۇنكسىيىنىڭ ئاددىي گرافىكىغا ئېرىشىمىز. بۇ خىل تەقرىبىي «بەش نۇقتا (بويىچە گرافىك سىزىش) ئۇسۇلى» ناھايىتى ئەسقاتىدۇ.

ئىزدىنىش

سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىدىكى بەش ئاچقۇچلۇق نۇقتىغا ئوخشاش، كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىدىكى بەش ئاچقۇچلۇق نۇقتىنى تاپالامسىز؟ ئۇلارنىڭ كوئوردىناتلىرىنى تۆۋەندىكى جەدۋەلگە تولدۇرۇپ، ئاندىن $y=\cos x$ ، $x \in [0,\ 2\pi]$ نىڭ ئاددىي گرافىكىنى سىزىڭ.

x					
$\cos x$					

1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئاددىي گرافىكىنى سىزايلى:

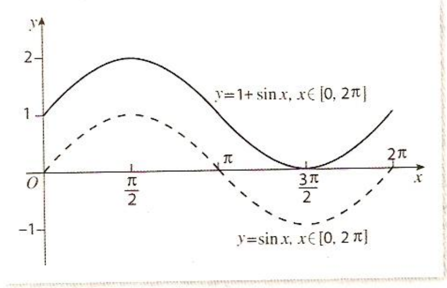
(1) $y=1+\sin x,\ x \in [0,\ 2\pi]$;

(2) $y=-\cos x,\ x \in [0,\ 2\pi]$.

يېشىش: (1) بەش ئاچقۇچلۇق نۇقتىغا ئاساسەن جەدۋەل تۈزىمىز:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

نۇقتىلارنى تەسۋىرلەيمىز ھەمدە ئۇلارنى سىلىق ئەگرى سىزىق ئارقىلىق تۇتاشتۇرىمىز (5.4.1 ـ رەسىم):

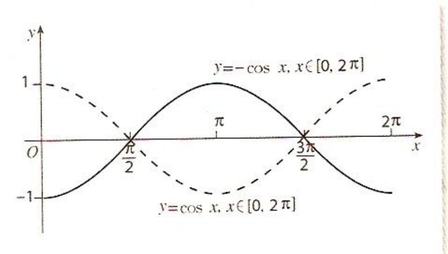


5.4.1 ـ رەسىم

(2) بەش ئاچقۇچلۇق نۇقتىغا ئاساسەن جەدۋەل تۈزىمىز:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

نۇقتىلارنى تەسۋىرلەيمىز ھەمدە ئۇلارنى سىلىق ئەگرى سىزىق ئارقىلىق تۇتاشتۇرىمىز (6.4.1 ـ رەسىم):



6.4.1 ـ رەسىم

مۇلاھىزە؟

سىز فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى ئالماشتۇرۇش نۇقتىسىدىن چىقىپ، فۇنكسىيە $y=\sin x$، $x\in[0,\ 2\pi]$ نىڭ گرافىكىدىن پايدىلىنىپ $y=1+\sin x$، $x\in[0,\ 2\pi]$ نىڭ گرافىكىغا ئېرىشەلەمسىز؟ ئوخشاشلا، فۇنكسىيە $y=\cos x$، $x\in[0,\ 2\pi]$ نىڭ گرافىكىدىن فۇنكسىيە $y=-\cos x$، $x\in[0,\ 2\pi]$ نىڭ گرافىكىغا ئېرىشەلەمسىز؟

مەشىق

1. ئوخشاش بىر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، فۇنكسىيە

$y=\sin x,\ x\in[0,\ 2\pi]$,

$y=\cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$

لارنىڭ گرافىكىنى كۆپ خىل ئۇسۇلدا سىزىڭ ھەمدە ئىككى ئەگرى سىزىقنى كۆزىتىش ئارقىلىق ئۇلارنىڭ پەرقى ۋە ئوخشاشلىقىنى ئېيتىپ بېرىڭ.

2. فۇنكسىيە $y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ بىلەن $y=\cos x$ نىڭ گرافىكىنى ئويلاپ بېقىڭ ھەمدە ئوخشاش بىر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا ئۇلارنىڭ سخېمىسىنى سىزىڭ.

2-4-1 سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى

ئىزدىنىش

سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىغا ئاساسەن، ئۇلارنىڭ قايسى خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە ئىكەنلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

تۆۋەندە بىز سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

(1) دەۋرىيلىكى

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەكشۈرۈش، مۇشۇ تۈردىكى فۇنكسىيىلەر ئىگە بولغان ئورتاق ئالاھىدىلىكنى مۇھاكىمە قىلىش دېمەكتۇر.

ئالدىدىكى ئۆگىنىشلەردىن سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ قىممىتى «قايتا ــ قايتا دەۋرلىنىش» تىن ئىبارەت ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىگە ئىگە ئىكەنلىكىنى كۆرگەندۇق، بۇ نۇقتىنى سىنۇس سىزىقىنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ، ئۇ يەنە ھاسىلىۋى فورمۇلا

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in\mathbf{Z})$$

دىمۇ ئەكس ئېتىدۇ، يەنى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ قىممىتى 2π نىڭ پۈتۈن سان ھەسسىسى ئاشقاندا، فۇنكسىيىنىڭ قىممىتى تەكرار كۆرۈلىدۇ. ماتېماتىكىدا، «قايتا ــ قايتا دەۋرلىنىش» تىن ئىبارەت بۇ خىل ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى دەۋرىيلىك ئۇقۇمى ئارقىلىق مىقدارلىق ھالدا تەسۋىرلىنىدۇ.

1 ـ باب

$f(x)$ فۇنكسىيىگە نىسبەتەن، ئەگەر نۆل بولمىغان بىر تۇراقلىق سان T مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە x ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى ھەربىر قىممەتنى ئالغاندا،

$$f(x+T)=f(x)$$

ھامان كۈچكە ئىگە بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ فۇنكسىيە **دەۋرىي فۇنكسىيە** (periodic function) ، نۆل بولمىغان تۇراقلىق سان T بۇ فۇنكسىيىنىڭ **دەۋرى** (period) دېيىلىدۇ.

دەۋرىي فۇنكسىيىنىڭ دەۋرى بىرلا بولمايدۇ. مەسىلەن، 2π، 4π، 6π، ⋯ ۋە -2π، -4π، -6π، ⋯ لارنىڭ ھەممىسى سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرى بولىدۇ. ئەمەلىيەتتە، ھەرقانداق بىر تۇراقلىق سان $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$ ھەمدە $k \neq 0$) ئۇنىڭ دەۋرى بولىدۇ.

ئەگەر دەۋرىي فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ بارلىق دەۋرلىرى ئىچىدە ئەڭ كىچىك بىر مۇسبەت سان مەۋجۇت بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئەڭ كىچىك مۇسبەت سان $f(x)$ نىڭ **ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرى** (minimal positive period) دېيىلىدۇ. مەسىلەن، سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرى 2π[1] بولىدۇ.

> [1] بۇ كىتابتا ئىسپاتلاش قالدۇرۇلدى. ئوقۇغۇچىلار بۇ يەكۈننى گرافىكتىن كۆزەتسە بولىدۇ. ئەگەر ئالاھىدە ئەسكەرتىش بېرىلمىسە، بۇنىڭدىن كېيىن بۇ كىتابتا ئۇچرىغان دەۋرلەر ئومۇمەن فۇنكسىيىنىڭ ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرىنى كۆرسىتىدۇ.

يۇقىرىدىكى ئېنىقلىمىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

سىنۇس فۇنكسىيىسى دەۋرىي فۇنكسىيە بولۇپ، ئۇنىڭ دەۋرى $2k\pi$ ($k \neq 0$ ھەمدە $k \in \mathbf{Z}$)، **ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرى** 2π بولىدۇ.

ئوخشاشلا، كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرىيلىكى ئۈستىدە ساۋاقداشلار ئۆزلىرى ئىزدىنىپ، ئېرىشكەن نەتىجىلىرىنى توغرا سىزىق ئۈستىگە يازسا بولىدۇ:

---

2 ـ مىسال. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ دەۋرىنى تاپايلى:

(1) $y=3\cos x,\ x \in \mathbf{R}$;

(2) $y=\sin 2x,\ x \in \mathbf{R}$;

(3) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right),\ x \in \mathbf{R}$.

يېشىش: (1) چۈنكى

$$3\cos(x+2\pi)=3\cos x,$$

شۇڭا دەۋرىي فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەسلىي فۇنكسىيىنىڭ دەۋرى 2π بولىدۇ.

(2) چۈنكى

$$\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x,$$

شۇڭا دەۋرىي فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەسلىي فۇنكسىيىنىڭ دەۋرى π بولىدۇ.

(3) چۈنكى

$$2\sin\left[\frac{1}{2}(x+4\pi)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi\right]$$

$$=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right),$$

شۇڭا دەۋرىي فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەسلىي فۇنكسىيىنىڭ دەۋرى 4π بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

سىز 2 - مىسالنى يېشىش جەريانىدىن بۇ فۇنكسىيىلەرنىڭ دەۋرى ئانالىتىك ئىپادىدىكى قايسى مىقدارلار بىلەن مۇناسىۋەتلىك ئىكەنلىكىنى يىغىنچاقلاپ بېرەلەمسىز؟

مەشىق

1. تەڭلىك $\sin(30^\circ+120^\circ)=\sin 30^\circ$ كۆچكە ئىگىمۇ؟ ئەگەر بۇ تەڭلىك كۆچكە ئىگە بولسا، 120° نى سىنۇس فۇنكسىيىسى $y=\sin x$، $x\in\mathbf{R}$ نىڭ بىر دەۋرى دېيىشكە بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟
2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ دەۋرىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sin\frac{3}{4}x$, $x\in\mathbf{R}$;

(2) $y=\cos 4x$, $x\in\mathbf{R}$;

(3) $y=\frac{1}{2}\cos x$, $x\in\mathbf{R}$;

(4) $y=\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

3. سىزچە فۇنكسىيىنىڭ دەۋرىيلىكىدىن پايدىلىنىپ دەۋرىي فۇنكسىيىنىڭ باشقا خۇسۇسىيەتلىرىنى قانداق چۈشىنىشىمىز كېرەك؟

1 - باب

فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ۋە فۇنكسىيە $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ نىڭ دەۋرى

ئالدىدىكى مىسالدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، فۇنكسىيە

$$y=A\sin(\omega x+\varphi),\quad x\in \mathbf{R}$$

ۋە فۇنكسىيە

$$y=A\cos(\omega x+\varphi),\quad x\in \mathbf{R}$$

(بۇنىڭدىكى A ، ω ، φ لار تۇراقلىق سان ھەمدە $A\neq 0$ ، $\omega>0$) نىڭ دەۋرى پەقەت ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كوئېففىتسېنتى بىلەنلا مۇناسىۋەتلىك بولىدۇ. ئۇنداقتا، يۇقىرىقى فۇنكسىيەلەرنىڭ دەۋرىنى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كوئېففىتسېنتى ئارقىلىق قانداق ئىپادىلەيمىز؟

ئەمەلىيەتتە، $z=\omega x+\varphi$ دېسەك، ئۇ ھالدا $x\in \mathbf{R}$ بولۇش ئۇچۇن چوقۇم $z\in \mathbf{R}$ بولۇشى كېرەك، ئۇنىڭ ئۇستىگە فۇنكسىيە $y=A\sin z$ ، $z\in \mathbf{R}$ ۋە فۇنكسىيە $y=A\cos z$ ، $z\in \mathbf{R}$ نىڭ دەۋرى ئوخشاشلا 2π.

$$z+2\pi=(\omega x+\varphi)+2\pi=\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi$$

بولغانلىقتىن، ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x پەقەت كەم دېگەندە $x+\frac{2\pi}{\omega}$ غا يەتكەندىلا، فۇنكسىيىنىڭ قىممىتى تەكرار كۆرۈلىدۇ، يەنى

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

تەڭلىك

$$A\sin[\omega(x+T)+\varphi]=A\sin(\omega x+\varphi),$$

$$A\cos[\omega(x+T)+\varphi]=A\cos(\omega x+\varphi)$$

لارنى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان ئەڭ كىچىك مۇسبەت سان بولىدۇ. شۇڭا، فۇنكسىيە

$$y=A\sin(\omega x+\varphi),\quad x\in \mathbf{R}$$

ۋە فۇنكسىيە

$$y=A\cos(\omega x+\varphi),\quad x\in \mathbf{R}$$

نىڭ دەۋرى $T=\frac{2\pi}{\omega}$ بولىدۇ.

بۇ يەكۈنگە ئاساسەن، بۇ تۈردىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىدىن فۇنكسىيىنىڭ دەۋرىنى بىۋاسىتە يېزىپ چىقالايمىز.

CHAPTER

مۇلاھىزە ؟

سىزچە يۇقىرىدىكى فۇنكسىيە $x \in \mathbf{R}$ ، $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ۋە فۇنكسىيە $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ ، $x \in \mathbf{R}$ نىڭ دەۋرىنى تېپىش ئۇسۇلىنى ئادەتتىكى دەۋرىي فۇنكسىيەلەرنىڭ دەۋرىنى تېپىشقا كېڭەيتىشكە بولامدۇ؟ يەنى تۆۋەندىكى خۇلاسىنى چىقىرىشقا بولامدۇ؟

«ئەگەر فۇنكسىيە $y = f(x)$ نىڭ دەۋرى T بولسا، ئۇ ھالدا فۇنكسىيە $y = f(\omega x)$ نىڭ دەۋرى $\frac{T}{\omega}$ بولىدۇ.»

(2) تاق - جۈپلۈكى

سىنۇس ئەگرى سىزىقى بىلەن كوسىنۇس ئەگرى سىزىقىنى كۆزەتسەك، سىنۇس ئەگرى سىزىقىنىڭ كوئوردىنات بېشى O غا نىسبەتەن سىممېترىك، كوسىنۇس ئەگرى سىزىقىنىڭ y ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋالالايمىز.

ھاسىلىغۇ فورمۇلا $\sin(-x) = -\sin x$ ، $\cos(-x) = \cos x$ لەردىن بىلىشكە بولىدۇكى:

سىنۇس فۇنكسىيىسى تاق فۇنكسىيە، كوسىنۇس فۇنكسىيىسى جۈپ فۇنكسىيە بولىدۇ.

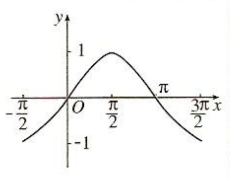
ئەگەر بىز دەۋرىي فۇنكسىيىنىڭ بىر دەۋرى ئىچىدىكى ئەھۋالىنى ئىگىلىۋالساق، ئۇ ھالدا پۈتۈن فۇنكسىيىنىڭ ئەھۋالىنى ئىگىلىگەن بولىمىز.

(3) مونوتونلۇقى

بىز ئالدى بىلەن سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ مونوتونلۇقىنى ئۇنىڭ بىر دەۋرلىك ئىنتېرۋالىدا (مەسىلەن، $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$) مۇزاكىرە قىلىپ، ئاندىن ئۇنىڭ دەۋرىيلىكىدىن پايدىلىنىپ مونوتونلۇقىنى پۈتۈن ئېنىقلىنىش ساھەسىگە كېڭەيتسەك بولىدۇ.

7.4.1 - رەسىمنى كۆزەتسەك، كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى:

x نىڭ قىممىتى $-\frac{\pi}{2}$ دىن $\frac{\pi}{2}$ گىچە چوڭايغاندا، ئەگرى سىزىق تەدرىجىي يۇقىرىغا ئۆرلەپ، $\sin x$ نىڭ قىممىتى -1 دىن 1 گىچە چوڭىيىدۇ؛ x نىڭ قىممىتى $\frac{\pi}{2}$ دىن $\frac{3\pi}{2}$ گىچە چوڭايغاندا، ئەگرى سىزىق تەدرىجىي تۆۋەنلەپ، $\sin x$ نىڭ قىممىتى 1 دىن -1 گىچە كىچىكلەيدۇ. بۇ ئۆزگىرىش ئەھۋالى تۆۋەندىكى جەدۋەلدە كۆرسىتىلگەندەك بولىدۇ:



7.4.1 - رەسىم

x	$-\frac{\pi}{2}$	⋯	0	⋯	$\frac{\pi}{2}$	⋯	π	⋯	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

1 ـ باب

دېمەك، سىنۇس فۇنكسىيىسى $y=\sin x$ ئىنتېرۋال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە، ئىنتېرۋال $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرىيلىكىدىن بىلىشكە بولىدۇكى:

سىنۇس فۇنكسىيىسى ھەربىر يېپىق ئىنتېرۋال $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ $(k\in \mathbf{Z})$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولۇپ، قىممىتى -1 دىن 1 گىچە چوڭىيىدۇ؛ ھەربىر يېپىق ئىنتېرۋال $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$ $(k\in \mathbf{Z})$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولۇپ، قىممىتى 1 دىن -1 گىچە كىچىكلەيدۇ.

ئوخشاشلا، كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ بىر دەۋرىدىكى (مەسىلەن، $[-\pi, \pi]$) ئەگرى سىزىقىنى كۆزىتىپ، ئۇنىڭ فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى تۆۋەندىكى جەدۋەلگە تولدۇرايلى:

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\cos x$									

كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرىيلىكىدىن بىلىشكە بولىدۇكى:

كوسىنۇس فۇنكسىيىسى ھەربىر يېپىق ئىنتېرۋال ____________ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولۇپ، قىممىتى -1 دىن 1 گىچە چوڭىيىدۇ؛ ھەربىر يېپىق ئىنتېرۋال ____________ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولۇپ، قىممىتى 1 دىن -1 گىچە كىچىكلەيدۇ.

(4) ئەڭ چوڭ قىممەت ۋە ئەڭ كىچىك قىممەت

يۇقىرىدىكى سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ مونوتونلۇقى ھەققىدىكى مۇزاكىرىدىن تۆۋەندىكىگە ئاسانلا ئىگە بولىمىز:

سىنۇس فۇنكسىيىسى پەقەت ۋە پەقەت ____________ $x=$ بولغاندىلا ئەڭ چوڭ قىممەت 1 نى ئالىدۇ، پەقەت ۋە پەقەت ____________ $x=$ بولغاندىلا ئەڭ كىچىك قىممەت -1 نى ئالىدۇ؛

كوسىنۇس فۇنكسىيىسى پەقەت ۋە پەقەت ____________ $x=$ بولغاندىلا ئەڭ چوڭ قىممەت 1 نى ئالىدۇ، پەقەت ۋە پەقەت ____________ $x=$ بولغاندىلا ئەڭ كىچىك قىممەت -1 نى ئالىدۇ.

3 ـ مىسال. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتى بارمۇ؟ ئەگەر بار بولسا، ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممەت ئالغاندىكى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ توپلىمىنى يازايلى ھەمدە ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنىڭ قانچە بولىدىغانلىقىنى ئېيتىپ بېرەيلى:

(1) $y=\cos x+1,\ x\in \mathbf{R}$;

(2) $y=-3\sin 2x,\ x\in \mathbf{R}$.

يېشىش: ئاسانلا بىلەلەيمىزكى، بۇ ئىككى فۇنكسىيە ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە.

(1) فۇنكسىيە $y=\cos x+1$، $x\in\mathbf{R}$ نى ئەڭ چوڭ قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمى دەل فۇنكسىيە $y=\cos x$، $x\in\mathbf{R}$ نى ئەڭ چوڭ قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمى

$$\{x|x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$$

تىن ئىبارەت.

فۇنكسىيە $y=\cos x+1$، $x\in\mathbf{R}$ نى ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمى دەل فۇنكسىيە $y=\cos x$، $x\in\mathbf{R}$ نى ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمى

$$\{x|x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$$

تىن ئىبارەت.

فۇنكسىيە $y=\cos x+1$، $x\in\mathbf{R}$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى $1+1=2$؛ ئەڭ كىچىك قىممىتى $-1+1=0$ بولىدۇ.

(2) $z=2x$ دېسەك، فۇنكسىيە $y=-3\sin z$، $z\in\mathbf{R}$ نى ئەڭ چوڭ قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان z نىڭ توپلىمى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\left\{z\left|z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right.\right\}.$$

$$2x=z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ .$$

شۇڭا فۇنكسىيە $y=-3\sin 2x$، $x\in\mathbf{R}$ نى ئەڭ چوڭ قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمى:

$$\left\{x\left|x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right.\right\}.$$

ئوخشاش يول بىلەن، فۇنكسىيە $y=-3\sin 2x$، $x\in\mathbf{R}$ نى ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمى:

$$\left\{x\left|x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right.\right\}.$$

فۇنكسىيە $y=-3\sin 2x$، $x\in\mathbf{R}$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى 3، ئەڭ كىچىك قىممىتى -3 بولىدۇ.

4 ـ مىسال. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى ساننىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرايلى:

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

(2) $\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$, $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$.

تەھلىل: ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ، ئوخشاش نامدىكى ئىككى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇشتا، ئالدى بىلەن بېرىلگەن بۇلۇڭلارنى ھاسىلقى فورمۇلىلاردىن پايدىلىنىپ ئوخشاش بىر مونوتونلۇق ئىنتېرۋال ـ دىكى بۇلۇڭغا ئايلاندۇرۇۋېلىپ، ئاندىن چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرىمىز.

1 ـ باب

يېشىش: (1) چۈنكى

$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<0$$

هەمدە سىنۇس فۇنكسىيىسى $y=\sin x$ ئىنتېرۋال $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ دە ئاشقۇچى فۇنكسىيە، شۇڭا

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

(2) $\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)=\cos\frac{23\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}$,

$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=\cos\frac{17\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$.

چۈنكى $0<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{5}<\pi$ هەمدە فۇنكسىيە $y=\cos x$، $x\in[0,\ \pi]$ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە، شۇڭا

$$\cos\frac{\pi}{4}>\cos\frac{3\pi}{5},$$

يەنى

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)>\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right).$$

5 ـ مىسال. فۇنكسىيە $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$، $x\in[-2\pi,2\pi]$ نىڭ مونوتون ئېشىش ئىنتېرۋالىنى تاپايلى.

تەھلىل: بېرىلگەن فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ تاپساق بولىدۇ.

سىز $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$، $x\in[-2\pi,\ 2\pi]$ نىڭ مونوتون ئېشىش ئىنتېرۋالىنى تاپالامسىز؟

يېشىش: $z=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}$ دېسەك، فۇنكسىيە $y=\sin z$ نىڭ مونوتون ئېشىش ئىنتېرۋالى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right].$$

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$-\frac{5\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

$A=[-2\pi,\ 2\pi]$,

$B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{5\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

دەپ پەرەز قىلساق، $A \cap B = \left[-\frac{5\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right]$ بولىدىغانلىقىنى ئاسانلا بىلەلەيمىز.

شۇنىڭ ئۈچۈن فۇنكسىيە $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$، $x\in[-2\pi,\ 2\pi]$ نىڭ مونوتون ئېشىش ئىنتېرۋالى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\left[-\frac{5\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right].$$

مەشىق

1. سىنۇس ئەگرى سىزىقى بىلەن كوسىنۇس ئەگرى سىزىقىنى كۆزىتىپ، تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان ئىنتېرۋالنى يېزىڭ:

(1) $\sin x>0$; (2) $\sin x<0$;

(3) $\cos x>0$; (4) $\cos x<0$.

2. تۆۋەندىكى تەڭلىكلەر كۆچكە ئىگە بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

(1) $2\cos x=3$; (2) $\sin^2 x=0.5$.

3. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنى ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ توپلىمىنى تېپىڭ ھەمدە ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنىڭ قانچە بولىدىغانلىقىنى يېزىڭ:

(1) $y=2\sin x,\ x\in\mathbf{R}$; (2) $y=2-\cos\frac{x}{3},\ x\in\mathbf{R}$.

4. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

فۇنكسىيە $y=4\sin x$، $x\in[-\pi,\ \pi]$ نىڭ مونوتونلۇقىغا دائىر تۆۋەندىكى بايانلارنىڭ توغرىسى ( ).

(A) $[-\pi,0]$ دە ئاشقۇچى فۇنكسىيە، $[0,\ \pi]$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە

(B) $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە، $\left[-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$ ۋە $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە

(C) $[0,\ \pi]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە، $[-\pi,0]$ دە كېمەيگۈچى فۇنكسىيە

(D) $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ ۋە $\left[-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە، $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە

5. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $\sin 250^\circ$, $\sin 260^\circ$;

(2) $\cos\frac{15}{8}\pi$, $\cos\frac{14}{9}\pi$;

(3) $\cos 515^\circ$, $\cos 530^\circ$;

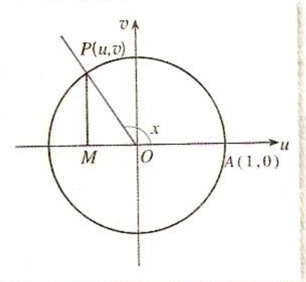
(4) $\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)$, $\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)$.

6. فۇنكسىيە $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$، $x\in[0,\ \pi]$ نىڭ مونوتون كېمىيىش ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ.

1 ـ باب

سىنۇس فۇنكسىيىسى ۋە كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ خۇسۇ-سىيەتلىرىنى بىرلىك چەمبەردىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرىدىن پايدىلىنىپ مۇھاكىمە قىلىش

بىرلىك چەمبەردىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىدىكى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن فۇنكسىيە قىممىتى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆرسەتمىلىك هالدا ئىپادىلەپ بېرىدۇ، ئۇ، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇهاكىمە قىلىشتىكى ياخشى قورال. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرىدىن پايدىلىنىپ مۇهاكىمە قىلىش سان بىلەن شەكىل بىرلەشتۈرۈلگەن پىكىر قىلىش ئۇسۇلىنى گەۋدىلەندۈرۈپ بېرىدۇ، بۇ، بىزنىڭ مۇناسىۋەتلىك خۇسۇسىيەتلەرنى ئومۇمىي جەھەتتىن ئىگىلىشىمىزگە پايدىلىق.



1 ـ رەسىم

1 ـ رەسىمدىكىدەك، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتلار سىستېمىسى uOv دا، x بۇلۇڭنىڭ چوققىسى كوئوردىنات بېشى بىلەن، باشلىنىش تەرىپى Ou ئوق بىلەن ئۈستمۇ-ئۈست چۈشىدۇ، ئاخىرقى تەرىپى بىرلىك چەمبەر بىلەن $P(u,v)$ نۇقتىدا كېسىشىدۇ. P ئارقىلىق Ou ئوققا تىك چۈشۈرسەك، Ou ئوق بىلەن Mدا كېسىشىپ، ئايرىم ـ ئايرىم سىنۇس سىزىقى MP ۋە كوسىنۇس سىزىقى OM نى هاسىل قىلىدۇ.

x بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى Ou ئوقنىڭ مۇسبەت يېرىم ئوقىدىن باشلاپ كوئوردىنات بېشى ئەتراپىدا سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە ئايلانغاندا، سىنۇس سىزىقى MP

$$0\rightarrow 1\rightarrow 0\rightarrow -1\rightarrow 0\cdots$$

قانۇنىيەت بويىچە قايتا ـ قايتا دەۋرلىنىپ ئۆزگىرىدۇ؛ شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، كوسىنۇس سىزىقى OM

$$1\rightarrow 0\rightarrow -1\rightarrow 0\rightarrow 1\cdots$$

قانۇنىيەت بويىچە قايتا ـ قايتا دەۋرلىنىپ ئۆزگىرىدۇ.

سىنۇس سىزىقى بىلەن كوسىنۇس سىزىقىنىڭ يۇقىرىدىكى ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىدىن سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ نۇرغۇن خۇسۇسىيەتلىرىگە ئېرىشكىلى بولىدۇ. مەسىلەن:

(1) دەۋرىيلىكى: ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار هەر 2π (x بۇلۇڭ تولۇق بىر قېتىم ئايلاندۇرۇلغاندا) چوڭايغاندا، سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ قىممىتى (MP) بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ قىممىتى (OM) تەكرار كۆرۈلىدۇ.

(2) تاق ـ جۈپلۈكى: x بۇلۇڭ بىلەن $x-$ بۇلۇڭنىڭ ماس سىنۇس سىزىقلىرى Ou ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ، كوسىنۇس سىزىقلىرى ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ، شۇڭا سىنۇس فۇنكسىيىسى تاق فۇنكسىيە، كوسىنۇس فۇنكسىيىسى جۈپ فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(3) مونوتونلۇقى:

بۇلۇڭ x	$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \to 2k\pi \to \frac{\pi}{2}+2k\pi$	$\frac{\pi}{2}+2k\pi \to \pi+2k\pi \to \frac{3\pi}{2}+2k\pi$
سىنۇس سىزىقى MP	$-1 \to 0 \to 1$	$1 \to 0 \to -1$
$\sin x$	ئاشقۇچى فۇنكسىيە	كېمەيگۈچى فۇنكسىيە

بۇلۇڭ x	$2k\pi \to \frac{\pi}{2}+2k\pi \to \pi+2k\pi$	$\pi+2k\pi \to \frac{3\pi}{2}+2k\pi \to 2\pi+2k\pi$
كوسىنۇس سىزىقى OM	$1 \to 0 \to -1$	$-1 \to 0 \to 1$
$\cos x$	كېمەيگۈچى فۇنكسىيە	ئاشقۇچى فۇنكسىيە

(4) ئەڭ چوڭ قىممەت، ئەڭ كىچىك قىممەت:

بۇلۇڭ x	$-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$\frac{\pi}{2}+2k\pi$	بۇلۇڭ x	$\pi+2k\pi$	$2k\pi$
سىنۇس سىزىقى MP	-1	1	كوسىنۇس سىزىقى OM	-1	1
$\sin x$	ئەڭ كىچىك قىممەت	ئەڭ چوڭ قىممەت	$\cos x$	ئەڭ كىچىك قىممەت	ئەڭ چوڭ قىممەت

بىرلىك چەمبەردىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرىدىن پايدىلىنىپ، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ھاسىلىۋى فورمۇلا قاتارلىق باشقا خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇھاكىمە قىلالامسىز؟

3-4-1 تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيىتى

ئىزدىنىش

سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇھاكىمە قىلغاندىكى تەجرىبىگە ئاساسەن، ئوخشاش ئۇسۇلنى قوللىنىپ تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلالامسىز؟

بىز ئالدىدا ئۆگەنگەن بىلىملەرگە ئاساسەن، تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى يېڭى بىر تۈرغۇدىن چىقىپ مۇھاكىمە قىلىمىز.

1 ـ باب

(1) دەۋرىيلىكى

هاسىلىۋى فورمۇلا

$$\tan(x+\pi)=\tan x,\quad x\in \mathbf{R},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in \mathbf{Z}$$

تىن بىلىشكە بولىدۇكى، تانگېنس فۇنكسىيىسى دەۋرىي فۇنكسىيە بولۇپ، ئۇنىڭ دەۋرى π ❶ بولىدۇ.

❶ بۇ كىتابتا ئىسپاتى قالدۇرۇلدى. ئوقۇغۇچىلار بۇ يەكۈننى گرافىكتىن كۆزەتسە بولىدۇ. يەنە بىرلىك چەمبەردىكى تانگېنس سىزىقىدىن پايدىلىنىپ، تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرىيلىكى، تاق ـ جۈپلۈكىنى مۇھاكىمە قىلسىمۇ بولىدۇ.

(2) تاق ـ جۈپلۈكى

هاسىلىۋى فورمۇلا

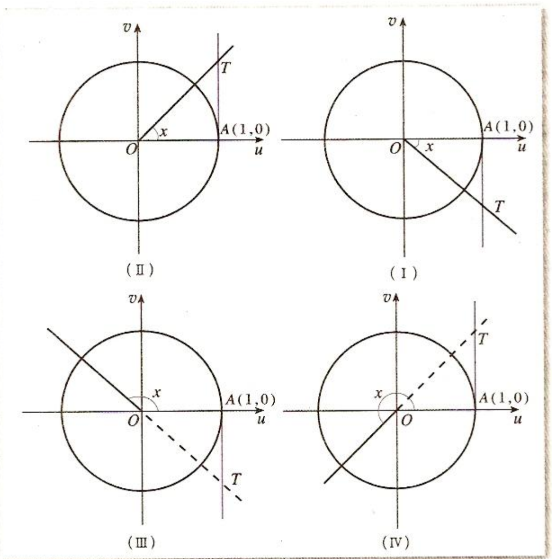
$$\tan(-x)=-\tan x,\quad x\in \mathbf{R},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in \mathbf{Z}$$

تىن بىلىشكە بولىدۇكى، تانگېنس فۇنكسىيىسى تاق فۇنكسىيە بولىدۇ.

(3) مونوتونلۇقى

8.4.1 ـ رەسىم (Ⅰ) (Ⅱ) دە كۆرسىتىلگەندەك، تانگېنس سىزىقىنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىدىن كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇكى، تانگېنس فۇنكسىيىسى $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

يەنە تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرىيلىكىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، **تانگېنس فۇنكسىيىسى ئوچۇق ئىنتېرۋال $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$، $k\in \mathbf{Z}$ تا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ.**



8.4.1 ـ رەسىم

CHAPTER 1

(4) قىممەت ساھەسى

8.4.1 - رەسىم (Ⅰ) دە كۆرسىتىلگەندەك، x نىڭ قىممىتى $-\frac{\pi}{2}$ دىن چوڭ ھەمدە $-\frac{\pi}{2}$ گە چەك
سىز يېقىنلاشقاندا، تانگېنس سىزىقى AT بولسا Oy ئوقىنىڭ تەتۈر يۆنىلىشىگە چەكسىز سوزۇلىدۇ؛
8.4.1 - رەسىم (Ⅱ) دە كۆرسىتىلگەندەك، x نىڭ قىممىتى $\frac{\pi}{2}$ دىن كىچىك ھەمدە $\frac{\pi}{2}$ گە چەكسىز
يېقىنلاشقاندا، تانگېنس سىزىقى AT بولسا Oy ئوقىنىڭ ئوڭ يۆنىلىشىگە چەكسىز سوزۇلىدۇ. شۇڭا
$\tan x$ بولسا $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ دا خالىغان ھەقىقىي سانلىق قىممەتنى ئالالايدۇ، لېكىن ئۇنىڭ ئەڭ چوڭ ۋە
ئەڭ كىچىك قىممىتى بولمايدۇ.

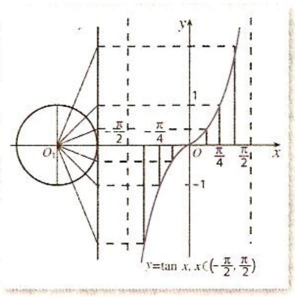
شۇنىڭ ئۈچۈن، **تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ قىممەت ساھەسى ھەقىقىي سانلار توپلىمى $\mathbf{R}$ بولىدۇ.**

تۆۋەندە، تانگېنس سىزىقىدىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيە

$$y=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

نىڭ گرافىكىنى سىزىمىز (9.4.1 - رەسىم).

> 9.4.1 - رەسىمنى سىزىش ئۇسۇلىنى سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىنى سىزىش ئۇسۇلىغا سېلىشتۇرۇپ ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

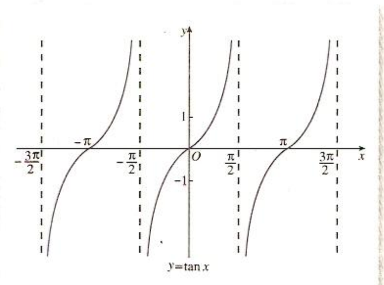


9.4.1 - رەسىم

تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرىيلىكىگە ئاساسەن، يۇقىرىدىكى گرافىكنى ئوڭ - سولغا كېڭەيتسەكلا،
تانگېنس فۇنكسىيىسى

$$y=\tan x, x\in\mathbf{R}, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$$

نىڭ گرافىكىغا ئېرىشكىلى بولىدۇ، بىز ئۇنى تانگېنس ئەگرى سىزىقى دەپ ئاتايمىز (10.4.1 -
رەسىم).



10.4.1 - رەسىم

1 - باب

10.4.1 - رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، تانگېنس ئەگرى سىزىقى ئۆز ئارا پاراللېل بولغان تۈز سىزىق $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbf{Z}$ لار ئارقىلىق ئايرىۋېتىلگەن چەكسىز كۆپ تارماق ئەگرى سىزىقلاردىن تەركىب تاپقان.

مۇلاھىزە ؟

تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىدىن چىقىپ، ئۇنىڭ خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلالامسىز؟

6 - مىسال. فۇنكسىيە $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى، دەۋرى ۋە مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تاپايلى.

يېشىش: فۇنكسىيىدىكى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x تۆۋەندىكىنى قانائەتلەندۇرۇشى كېرەك:

$$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z},$$

يەنى

$$x\neq 2k+\frac{1}{3},\ k\in\mathbf{Z}.$$

شۇڭا، فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\left\{x\,\middle|\,x\neq 2k+\frac{1}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$ بولىدۇ.

$$f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}+\pi\right)$$

$$=\tan\left[\frac{\pi}{2}(x+2)+\frac{\pi}{3}\right]=f(x+2)$$

بولغانلىقتىن، فۇنكسىيىنىڭ دەۋرى 2 بولىدۇ.

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

نى يەشسەك تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$-\frac{5}{3}+2k<x<\frac{1}{3}+2k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، فۇنكسىيىنىڭ مونوتون ئېشىش ئىنتېرۋالى:

$$\left(-\frac{5}{3}+2k,\ \frac{1}{3}+2k\right),\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

مەشىق

1. 9.4.1 ـ رەسىمگە ئاساسەن، تانگېنس سىزىقىدىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيە

$$y=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

نىڭ گرافىكىنى سىزىش ئۇسۇلىنى يېزىڭ.

2. تانگېنس ئەگرى سىزىقىنى كۆزىتىپ، تۆۋەندىكى شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان x نىڭ قىممەتلىرىنىڭ دائىرىسىنى يېزىڭ:

(1) $\tan x>0$; (2) $\tan x=0$; (3) $\tan x<0$.

3. فۇنكسىيە $y=\tan 3x$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ.

4. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ دەۋرىنى تېپىڭ:

(1) $y=\tan 2x,\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$;

(2) $y=5\tan\frac{x}{2},\ x\neq(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

5. (1) تانگېنس فۇنكسىيىسى پۈتكۈل ئېنىقلىنىش ساھەسىدە ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

(2) تانگېنس فۇنكسىيىسى مەلۇم بىر ئىنتېرۋالدا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

6. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى تانگېنس قىممىتىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $\tan 138^\circ,\ \tan 143^\circ$;

(2) $\tan\left(-\frac{13}{4}\pi\right),\ \tan\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$.

4.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئاددىي گرافىكىنى سىزىڭ:

(1) $y=1-\sin x,\ x\in[0,\ 2\pi]$;

(2) $y=3\cos x+1,\ x\in[0,\ 2\pi]$.

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنى ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ توپلىمىنى تېپىڭ ھەمدە ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنىڭ قانچە بولىدىغانلىقىنى ئايرىم ـ ئايرىم يېزىڭ:

(1) $y=1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}x,\ x\in\mathbf{R}$; (2) $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),\ x\in\mathbf{R}$;

(3) $y=-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right),\ x\in \mathbf{R}$;　　(4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right),\ x\in \mathbf{R}$.

3. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ دەۋرىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sin\frac{2}{3}x,\ x\in \mathbf{R}$;　　(2) $y=\frac{1}{2}\cos 4x,\ x\in \mathbf{R}$.

4. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $\sin 103°15'$, $\sin 164°30'$;　　(2) $\cos\left(-\frac{47}{10}\pi\right)$, $\cos\left(-\frac{44}{9}\pi\right)$;

(3) $\sin 508°$, $\sin 144°$;　　(4) $\cos 760°$, $\cos(-770°)$.

5. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ:

(1) $y=1+\sin x,\ x\in \mathbf{R}$;　　(2) $y=-\cos x,\ x\in \mathbf{R}$.

6. فۇنكسىيە $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ.

7. فۇنكسىيە $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$، $x\neq\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$، $(k\in \mathbf{Z})$نىڭ دەۋرىنى تېپىڭ.

8. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $\tan\left(-\frac{1}{5}\pi\right)$, $\tan\left(-\frac{3}{7}\pi\right)$;　　(2) $\tan 1519°$, $\tan 1493°$;

(3) $\tan 6\frac{9}{11}\pi$, $\tan\left(-5\frac{3}{11}\pi\right)$;　　(4) $\tan\frac{7\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{6}$.

9. تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەرنى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمىنى يېزىڭ:

(1) $1+\tan x\geqslant 0$;　　(2) $\tan x-\sqrt{3}\geqslant 0$.

10. فۇنكسىيە $f(x)$ $(x\in \mathbf{R})$ نى ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرى 2 بولغان دەۋرىي فۇنكسىيە ھەمدە $x\in[0,2]$ بولغاندا $f(x)=(x-1)^2$ بولىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، $f(3)$، $f\left(\frac{7}{2}\right)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

11. شۇنى ئاسانلا بىلىشكە بولىدۇكى، سىنۇس فۇنكسىيىسى $y=\sin x$ تاق فۇنكسىيە بولۇپ، سىنۇس ئەگرى سىزىقى كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك، يەنى كوئوردىنات بېشى سىنۇس ئەگرى سىزىقىنىڭ سىممېترىك مەركىزى بولىدۇ. سىنۇس ئەگرى سىزىقىنىڭ كوئوردىنات بېشىدىن سىرت، يەنە باشقا سىممېترىك مەركىزى بارمۇ؟ ئەگەر بار بولسا، سىممېترىك مەركىزىنىڭ كوئوردىناتى قانداق بولىدۇ؟ ئۇنىڭدىن باشقا، سىنۇس ئەگرى سىزىقى ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك شەكىل بولامدۇ؟ ئەگەر شۇنداق بولسا، سىممېترىك ئوقىنىڭ تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟

يۇقىرىقى ھادىسىلەرنى سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

كوسىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن تانگېنس فۇنكسىيىسىگە نىسبەتەن، يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش مەسىلىلەرنى مۇزاكىرە قىلىڭ.

B گۇرۇپپا

1. سىنۇس فۇنكسىيىسى ۋە كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەرنى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ قىممەت ئېلىش توپلىمىنى يېزىڭ:

(1) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$;

(2) $\sqrt{2} + 2\cos x \geqslant 0 \quad (x \in \mathbf{R})$.

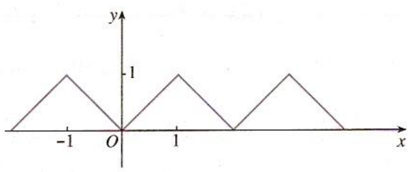
2. فۇنكسىيە $y = -\tan\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$ نىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ.

3. فۇنكسىيە $y = f(x)$ نىڭ گرافىكى رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى سوئاللارغا جاۋاب بېرىڭ:

(1) فۇنكسىيىنىڭ دەۋرىنى تېپىڭ؛

(2) فۇنكسىيە $y = f(x+1)$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ؛

(3) فۇنكسىيە $y = f(x)$ نىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى يازالامسىز؟



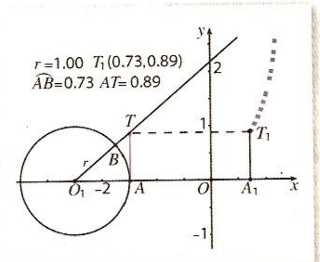
(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

1 ـ باب

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

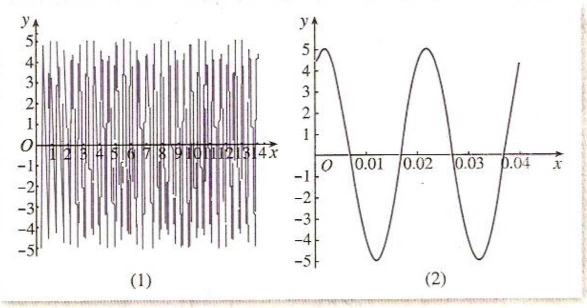
تانگېنس سىزىقىدىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيە $y=\tan x$، $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ نىڭ گرافىكىنى سىزىش

ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى x ئوقىنىڭ ئۈستىدىن خالىغان بىر O_1 نۇقتىنى ئېلىپ، O_1 نى چەمبەر مەركىزى قىلىپ بىرلىك چەمبەر سىزساق، ئۇ x ئوق بىلەن A نۇقتىدا كېسىشىدۇ. O_1 چەمبەرنىڭ ئۈستىدىن خالىغان بىر B نۇقتىنى ئېلىپ، $\angle AO_1B\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ نى سىزىپ، ئاندىن A نۇقتا ئارقىلىق O_1 چەمبەرگە ئۇرۇنما يۇرگۇزسەك، ئۇ O_1B ياكى O_1B نىڭ قارشى يۆنىلىشىدىكى داۋامى بىلەن T نۇقتىدا كېسىشىدۇ، بۇ چاغدا $\overset{\frown}{AB}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۆلچەيمىز. AT نى x ئوقنى بويلاپ A_1T_1 گە پاراللېل يۆتكەيمىز ھەمدە T_1 نۇقتىنىڭ ئابسېسساسى $\overset{\frown}{AB}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقىغا، ئوردىناتى تانگېنس سىزىقى AT نىڭ ئۇزۇنلۇقىغا تەڭ بولىدىغان قىلىمىز. ئۇنىڭدىن كېيىن B نۇقتىنى بىرلىك چەمبەر ئۈستىدە سۇرسەك، ھەرىكەتچان نۇقتا T_1 نىڭ ھەرىكەتچان نۇقتا B غا ماس بولغان ترايېكتورىيىسى دەل فۇنكسىيە $y=\tan x$، $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ نىڭ گرافىكى بولىدۇ.



5-1 فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكى

ئالدىدا بىز $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (بۇنىڭدا A، ω، φ لار تۇراقلىق سان) كۆرۈنۈشتىكى فۇنكسىيەلەر بىلەن ئۇچراشتۇق، ئۇنىڭ ئەمەلىيەت جەريانىدا ئىشلىنىدىغان ئورنى بەك كۆپ. مەسىلەن، فىزىكىدا، ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتتىكى ئاددىي ماياتنىكنىڭ تەڭپۇڭلۇق ئورنىدىن يۆتكىلىشى y بىلەن ۋاقىت x نىڭ مۇناسىۋىتى، ئۆزگىرىشچان توكتىكى توك y بىلەن ۋاقىت x نىڭ مۇناسىۋىتى قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ كۆرۈنۈشتىكى فۇنكسىيىلەردۇر. 1.5.1 ــ رەسىم (1) بولسا بىر قېتىملىق تەجرىبىدە ئۆلچەنگەن ئۆزگىرىشچان توكتىكى توك y نىڭ ۋاقىت x كە ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىنىڭ گرافىكىدۇر.



1.5.1 ــ رەسىم

ئۆلچەنگەن گرافىكنى چوڭايتساق (1.5.1 ــ رەسىم (2))، ئۇنىڭ سىنۇس سىزىقىغا بەك ئوخشايدىغانلىقىنى كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ. ئۇنداقتا فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ بىلەن فۇنكسىيە $y=\sin x$ قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟

ئانالىتىك ئىپادىدىن قارىغاندا، فۇنكسىيە $y=\sin x$ دەل فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ $A=1$، $\omega=1$، $\varphi=0$ بولغاندىكى ئەھۋالىدۇر. تۆۋەندە بىز A، ω، φ لارنىڭ $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىغا بولغان تەسىرى[1] ئۈستىدە ئىزدىنىمىز.

[1] «بەش نۇقتا ئۇسۇلى» دىن پايدىلىنىپ شەكىل سىزىشقا بولىدۇ، شارائىتى بارلار ھېسابلىغۇچتىن ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ شەكىل سىزسىمۇ بولىدۇ. A، ω، φ لارنىڭ فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىنىڭ ئۆزگىرىشىگە بولغان تەسىرىنى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ بىۋاسىتە ئەكس ئەتتۈرگىلى بولىدۇ.

1 - باب

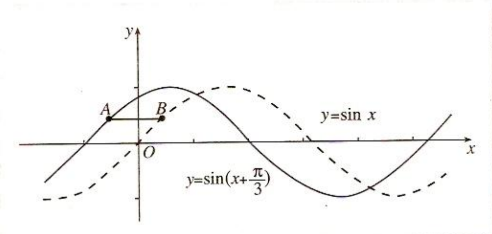
(I) φ نىڭ $y=\sin(x+\varphi)$، $x \in \mathbf{R}$ نىڭ گرافىكىغا بولغان تەسىرى ئۈستىدە ئىزدىنىش.

φ غا ئوخشاش بولمىغان خالىغان قىممەتلەرنى بېرىپ، بۇ فۇنكسىيەلەرنىڭ ئوخشاش بىر كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى گرافىكىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ سىزساق، ئۇلار بىلەن فۇنكسىيە $y=\sin x$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆزىتىشكە بولىدۇ.

بۇ يەردە، بىز $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ بىلەن $y=\sin x$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆزىتەيلى.

2.5.1 - رەسىمدىكىدەك، ئىككى ئەگرى سىزىقنىڭ ھەربىرى ئۈستىدىن ئايرىم - ئايرىم ھالدا ئوردىناتلىرى ئوخشاش بولغان مۇۋاپىق بىر نۇقتىنى تاللاپ ئېلىپ، بۇ ئىككى نۇقتىنى بىرلا ۋاقىتتا ئىككى ئەگرى سىزىقنى بويلاپ سۈرىمىز ھەمدە ئۇلارنىڭ ئوردىناتلىرىنىڭ ئۆزئارا تەڭلىكىنى ساقلاپ، ئابسىسسالىرىنىڭ مۇناسىۋىتىنى كۆزىتىمىز. بايقاشقا بولىدۇكى، y نىڭ ئوخشاش بىر قىممىتىگە نىسبەتەن، $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى ھامان $y=\sin x$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى ماس نۇقتىنىڭ ئابسىسساسىدىن $\frac{\pi}{3}$ نى ئېلىۋەتكەنگە تەڭ بولىدۇ. بۇ، $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكىنى سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ نىڭ ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنى سولغا $\frac{\pi}{3}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەشتىن كېلىپ چىققان دەپ قاراشقا بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ❶.

❶ ئەگەر $\varphi=-\frac{\pi}{3}$ دەپ ئالساق ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟ ساۋاقداشلار يەنە φ نىڭ باشقا قىممەتلىرىنى ئېلىپ سىناپ باقسا بولىدۇ.



2.5.1 - رەسىم

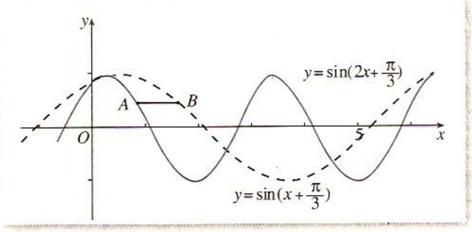
تەجرىبە ئارقىلىق كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، φ باشقا قىممەتلەرنى ئالغاندىمۇ ئەھۋال ئوخشاش بولىدۇ. شۇڭا، $y=\sin(x+\varphi)$ (بۇنىڭدا $\varphi \neq 0$) نىڭ گرافىكىنى سىنۇس ئەگرى سىزىقى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنى سولغا ($\varphi > 0$ بولغاندا) ياكى ئوڭغا ($\varphi < 0$ بولغاندا) $|\varphi|$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەشتىن كېلىپ چىققان دەپ قاراشقا بولىدۇ.

(II) ω ($\omega > 0$) نىڭ $y=\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىغا بولغان تەسىرى ئۈستىدە ئىزدىنىش.

مۇھاكىمە قىلىشقا ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، $\varphi=\frac{\pi}{3}$ دەپ ئالايلى. بۇ چاغدا، ω غا ئوخشاش بولمىغان خالىغان قىممەتلەرنى بېرىپ، بۇ فۇنكسىيەلەرنىڭ ئوخشاش بىر كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى گرافى-

كىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ سىزساق، ئۇلار بىلەن $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ نى
گرافىكى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆزىتىشكە بولىدۇ.

بۇ يەردە، بىز $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى بىلەن $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدىك
مۇناسىۋەتنى كۆزىتەيلى.



3.5.1 - رەسىم

3.5.1 - رەسىمدىكىدەك، ئىككى ئەگرى سىزىقنىڭ ھەربىرى ئۈستىدىن ئايرىم - ئايرىم ھال
ئوردىناتلىرى ئوخشاش بولغان مۇۋاپىق بىر نۇقتىنى تاللاپ ئېلىپ، بۇ ئىككى نۇقتىنى بىرلا ۋاقتت
ئىككى ئەگرى سىزىقنى بويلاپ سۈرىمىز ھەمدە ئۇلارنىڭ ئوردىناتلىرىنىڭ ئۆزگىرىشىنى ساقلا
ئابسىسسالىرىنىڭ مۇناسىۋىتىنى كۆزىتىمىز. بايقاشقا بولىدۇكى، y نىڭ ئوخشاش بىر قىممىتىگ
نىسبەتەن، $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى ھامان $=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى ماس نۇقتىنىڭ ئابسىسساسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ھەسسىسىگە تەڭ بولىدۇ. بۇ، $=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
نىڭ گرافىكىنى $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ئابسىسساسىنى ئەس
لىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش (ئوردىناتى ئۆزگەرمەيدۇ) تىن كېلىپ چىققان دەپ قاراش
قا بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

تەجرىبە ئارقىلىق كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ω باشقا قىممەتلەرنى ئالغاندىمۇ ئەھۋال ئوخشاش بولىدۇ. شۇڭا، فۇنكسىيە $y=\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىنى $y=\sin(x+\varphi)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ئابسىسساسى (ئوردىناتى ئۆزگەرمەيدۇ)نى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{\omega}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش ($\omega > 1$ بولغاندا) ياكى ئۇزارتىش ($0 < \omega < 1$ بولغاندا) تىن كېلىپ چىققان دەپ قاراشقا بولىدۇ❶.

❶ ئەگەر $\omega = \frac{1}{2}$ دەپ ئالساق ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟ ساۋاقداشلار يەنە ω نىڭ باشقا قىممەتلىرىنى ئېلىپ سىناپ باقسا بولىدۇ.

(Ⅲ) $A\ (A>0)$ نىڭ $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىغا بولغان تەسىرى ئۈستىدە ئىزدىنىش

مۇھاكىمە قىلىشقا ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، $\omega=2$ ، $\varphi=\frac{\pi}{3}$ دەپ ئالايلى. بۇ چاغدا، A غا ئوخشا
بولمىغان خالىغان قىممەتلەرنى بېرىپ، بۇ فۇنكسىيەلەرنىڭ ئوخشاش بىر كوئوردېنات سىستېمىسىدىك

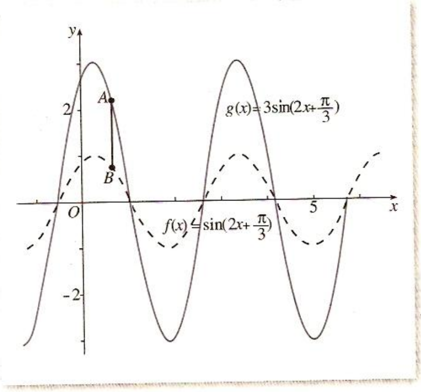
1 - باب

گرافىكنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ سىزساق، ئۇلار بىلەن $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆزىتىشكە بولىدۇ.

بۇ يەردە، بىز $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى بىلەن $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كۆزىتەيلى.

4.5.1 - رەسىمدىكىدەك، ئىككى ئەگرى سىزىقنىڭ ھەربىرى ئۈستىدىن ئايرىم - ئايرىم ھالدا ئابىسسىسالىرى ئوخشاش بولغان مۇۋاپىق بىر نۇقتىنى ئېلىپ، بۇ ئىككى نۇقتىنى بىرلا ۋاقىتتا ئىككى ئەگرى سىزىقنى بويلاپ سۈرىمىز ھەمدە ئۇلارنىڭ ئابسىسسالىرىنىڭ ئۆزئارا تەڭلىكىنى ساقلاپ، ئوردىناتلىرىنىڭ مۇناسىۋىتىنى كۆزىتىمىز. بايقاشقا بولىدۇكى، x نىڭ ئوخشاش بىر قىممىتىگە نىسبەتەن، فۇنكسىيە $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ ئوردىناتى ھامان فۇنكسىيە $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى ماس نۇقتىنىڭ ئوردىناتىنىڭ 3 ھەسسىسىگە تەڭ بولىدۇ. بۇ، $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكىنى $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 3 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش (ئابسىسساسى ئۆزگەرمەيدۇ) تىن كېلىپ چىققان دەپ قاراشقا بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ❶.

❶ ئەگەر $A=\frac{1}{3}$ دەپ ئالساق، ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟ ساۋاقداشلار يەنە A نىڭ باشقا قىممەتلىرىنى ئېلىپ سىناپ باقسا بولىدۇ.

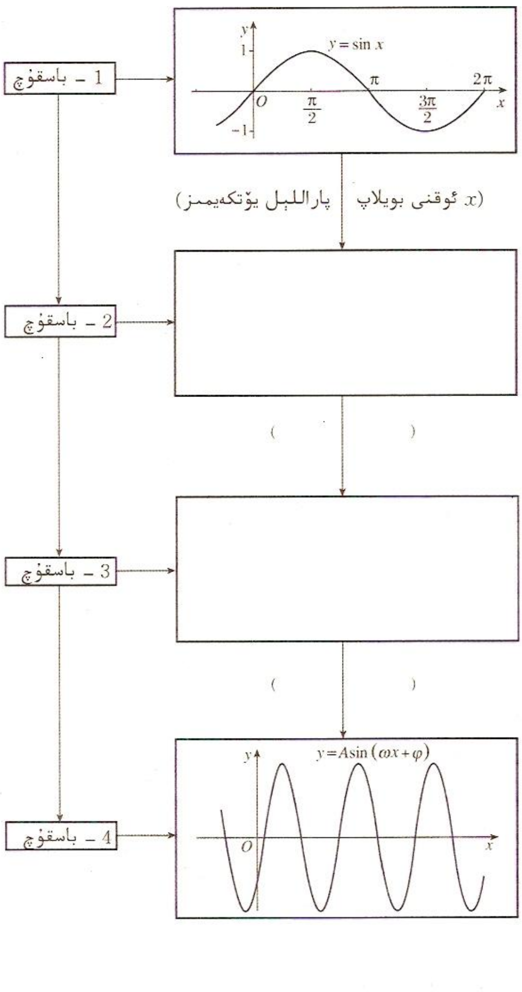


4.5.1 - رەسىم

تەجرىبە ئارقىلىق كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، A باشقا قىممەتلەرنى ئالغاندىمۇ ئەھۋال ئوخشاش بولىدۇ. شۇڭا، فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىنى $y=\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ئوردىناتى (ئابسىسساسى ئۆزگەرمەيدۇ) نى ئەسلىدىكىسىنىڭ A ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش ($A>1$ بولغاندا) ياكى قىسقارتىش ($0<A<1$ بولغاندا)تىن كېلىپ چىققان دەپ قاراشقا بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ قىممەت ساھەسى $[-A, A]$، ئەڭ چوڭ قىممىتى A، ئەڭ كىچىك قىممىتى $-A$ بولىدۇ.

بىز A، ω، φ لارنىڭ فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0$، $\omega>0$) نىڭ گرافىكىنىڭ ئۆزگىـ
رىشىگە تەسىر قىلىش ئەھۋالىنى بىلىۋالدۇق. ئومۇمەن، فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (بۇنىڭدا
$A>0$، $\omega>0$) نىڭ گرافىكىنى تۆۋەندىكى ئۇسۇل ئارقىلىق كېلىپ چىققان دەپ قاراشقا بولىدۇ: ئالدى
بىلەن فۇنكسىيە $y=\sin x$ نىڭ گرافىكىنى سىزىمىز؛ ئاندىن سىنۇس ئەگرى سىزىقىنى سولغا (ياكى
ئوڭغا) $|\varphi|$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەپ، فۇنكسىيە $y=\sin(x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىغا ئېرىـ
شىمىز؛ ئۇنىڭدىن كېيىن ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى ھەرقايسى نۇقتىلارنىڭ ئابسىسساسىنى ئەسلىـ
دىكىسىنىڭ $\frac{1}{\omega}$ ھەسسىسىگىچە ئۆزگەرتىپ، فۇنكسىيە $y=\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ گرافىكىغا ئېرىشىـ
مىز؛ ئەڭ ئاخىرىدا ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى ھەرقايسى نۇقتىلارنىڭ ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ A
ھەسسىسىگىچە ئۆزگەرتىمىز، بۇ چاغدىكى ئەگرى سىزىق دەل فۇنكسىيە $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ نىڭ
گرافىكى بولىدۇ.

بۇ جەرياننىڭ قەدەم ـ باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىچە:



1 - باب

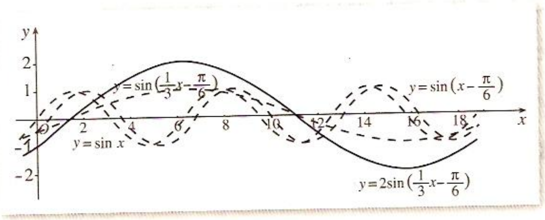
بۇ جەريان ئاددىيدىن مۇرەككەپكە، ئالاھىدىلىكتىن ئومۇمىيلىققا ئۆتىدىغان ئايلاندۇرۇش ئىدىيىسىنى گەۋدىلەندۈرگەن.

1 - مىسال. فۇنكسىيە $y=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$ نىڭ ئاددىي گرافىكىنى سىزايلى.

يېشىش: ئالدى بىلەن سىنۇس ئەگرى سىزىقى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنى ئوڭغا $\frac{\pi}{6}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەپ، $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ نىڭ گرافىكىغا ئېرىشىمىز؛ ئاندىن $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 3 ھەسسىسىگىچە ئۇزار-تىش (ئوردىناتى ئۆزگەرمەيدۇ) ئارقىلىق $y=\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$ نىڭ گرافىكىغا ئېرىشىمىز؛ ئۇنىڭدىن كېيىن كېلىپ چىققان گرافىك ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 2 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش (ئابسىسساسى ئۆزگەرمەيدۇ) ئارقىلىق فۇنكسىيە

$$y=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$$

نىڭ گرافىكىغا ئېرىشىمىز (5.5.1 - رەسىمدىكىدەك).



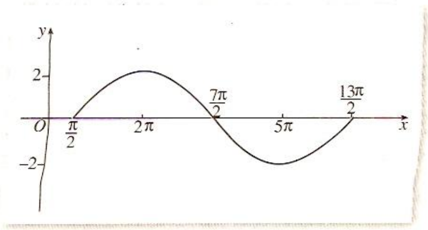
5.5.1 - رەسىم

تۆۋەندە «بەش نۇقتا ئۇسۇلى» دىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيە $y=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$ نىڭ بىر دەۋر ئىچىدىكى گرافىكىنى سىزىمىز. $\left(T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi\right)$

$X=\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}$ دېسەك، ئۇ ھالدا $x=3\left(X+\frac{\pi}{6}\right)$ بولىدۇ. جەدۋەل تۈزسەك:

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{2}$	5π	$\frac{13\pi}{2}$
y	0	2	0	-2	0

نۇقتىلارنى تەسۋىرلەپ گرافىكىنى سىزىمىز (6.5.1 - رەسىم):



6.5.1 ـ رەسىم

ئەمدى، بىز يەنە باب بېشىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان «ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ گرافىكى»غا قايتايلى. ئىسپاتلاشقا بولىدۇكى، بۇ گرافىكقا ماس بولغان فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى تۆۋەندىكى كۆرۈنۈشتە بولىدۇ:

$$y=A\sin(\omega x+\varphi),\ x\in[0,\ +\infty),$$

بۇنىڭدا $A>0$، $\omega>0$. فىزىكىدا، ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنى تەسۋىرلەيدىغان فىزىكىلىق مىقدارلار، مەسىلەن، ئامپلىتۇدا، دەۋر ۋە چاستوتا قاتارلىقلار بۇ ئانالىتىك ئىپادىدىكى تۇراقلىق سانغا مۇناسىۋەتلىك بولىدۇ:

A بۇ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ **ئامپلىتۇدا** (amplitude of vibration)سى بولۇپ، ئۇ، ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتتىكى جىسىمنىڭ تەڭپۇڭ ئورنىدىن ئايرىلغان ئەڭ چوڭ ئارىلىقىدۇر؛

بۇ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ **دەۋرى** (period)

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

بولۇپ، ئۇ، ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتتىكى جىسىمنىڭ بىر قېتىم قايتىلانما ھەرىكەت قىلىشى ئۈچۈن كېتىدىغان ۋاقىتتىن ئىبارەت؛

بۇ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ **چاستوتا** (frequency) سى فورمۇلا

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

ئارقىلىق ئىپادىلەنگەن بولۇپ، ئۇ، ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتتىكى جىسىمنىڭ بىرلىك ۋاقىت ئىچىدىكى قايتىلانما ھەرىكىتىنىڭ قېتىم سانىدىن ئىبارەت.

$\omega x+\varphi$ **فازا** (phase) دېيىلىدۇ؛

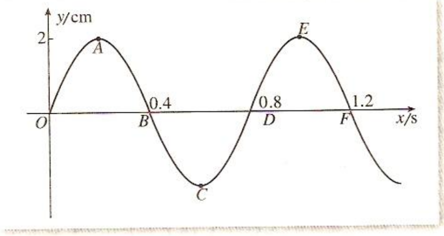
$x=0$ بولغاندىكى فازا φ بولسا **دەسلەپكى فازا** (initial phase) دېيىلىدۇ.

2 ـ مىسال. 7.5.1 ـ رەسىمدىكىسى مەلۇم ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ گرافىكىدىن ئىبارەت. گرافىكقا ئاساسەن تۆۋەندىكى سوئاللارغا جاۋاب بېرەيلى:

(1) بۇ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ ئامپلىتۇدىسى، دەۋرى ۋە چاستوتىسى ئايرىم ـ ئايرىم قانچە؟

(2) O نۇقتىدىن باشلاپ ھېسابلىغاندا، ئەگەر سىزىق ئۈستىدىكى قايسى نۇقتىغا كەلگەندە، بىر قېتىملىق قايتىلانما ھەرىكەتنىڭ تاماملانغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ؟ ئەگەر A نۇقتىدىن باشلاپ ھېسابلىغاندىچۇ؟

(3) بۇ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ فۇنكسىيىلىك ئىپادىسىنى يازايلى.



7.5.1 - رەسىم

يېشىش: (1) گرافىكتىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ ئامپلىتۇ-دىسى $2\,\mathrm{cm}$؛ دەۋرى $0.8\,\mathrm{s}$؛ چاستوتىسى $\frac{5}{4}$.

(2) ئەگەر O نۇقتىدىن باشلاپ ھېسابلىساق، ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى D نۇقتىغا كەلگەندە، بىر قېتىملىق قايتىلانما ھەرىكەتنىڭ تاماملانغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ؛ ئەگەر A نۇقتىدىن باشلاپ ھېسابلى-ساق، ئۇ ھالدا ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى E نۇقتىغا كەلگەندە، بىر قېتىملىق قايتىلانما ھەرىكەتنىڭ تاماملانغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ.

(3) بۇ ئاددىي گارمونىك ھەرىكەتنىڭ فۇنكسىيىلىك ئىپادىسىنى

$$y=A\sin(\omega x+\varphi),\ \ x\in[0,+\infty)$$

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $A=2$ بولىدۇ؛ $\frac{2\pi}{\omega}=0.8$ دىن $\omega=\frac{5\pi}{2}$ كېلىپ چىقىدۇ؛ گرافىكتىن دەسلەپكى فازىسىنىڭ $\varphi=0$ ئىكەنلىكىنى بىلىمىز.

شۇنىڭ بىلەن تاپماقچى بولغان فۇنكسىيىلىك ئىپادە:

$$y=2\sin\frac{5\pi}{2}x,\ \ x\in[0,+\infty).$$

مەشىق

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىر دەۋر بولغان يېپىق ئىنتېرۋالدىكى ئاددىي گرافىكىنى سىزىڭ (شارائىت يار بەرسە، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ تەكشۈرۈڭ):

(1) $y=\frac{1}{2}\sin x$; (2) $y=\sin 3x$;

(3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; (4) $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. توغرا جاۋابنى تاللاڭ: فۇنكسىيە $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ نىڭ گرافىكى C ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) فۇنكسىيە $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ نىڭ گرافىكىغا ئېگە بولۇش ئۈچۈن، C نىڭ ئۈستىدىكى بارلىق نۇق-تىلارنى ( ).

(A) ئوڭ تەرەپكە $\frac{\pi}{5}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(B) سول تەرەپكە $\frac{\pi}{5}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(C) ئوڭ تەرەپكە $\frac{2\pi}{5}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(D) سول تەرەپكە $\frac{2\pi}{5}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(2) فۇنكسىيە $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ نىڭ گرافىكىغا ئېگە بولۇش ئۈچۈن، C نىڭ ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ( ).

(A) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 2 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

(B) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

(C) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 2 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

(D) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

(3) فۇنكسىيە $y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ نىڭ گرافىكىغا ئېگە بولۇش ئۈچۈن، C نىڭ ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ( ).

(A) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{4}{3}$ ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

(B) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{3}{4}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

(C) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{4}{3}$ ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

(D) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{3}{4}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

3. فۇنكسىيە $y=\frac{2}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ نىڭ ئامپلىتۇدىسى، دەۋرى ۋە چاستوتىسى ئايرىم - ئايرىم قانچە؟ ئۇنىڭ گرافىكى بىلەن سىنۇس ئەگرى سىزىقىنىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟

4. فۇنكسىيە $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$، $x\in[0,\ +\infty)$ نىڭ دەسلەپكى فازىسى قانچە؟ ئۇنىڭ گرافىكى بىلەن سىنۇس ئەگرى سىزىقىنىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟

1 - باب

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

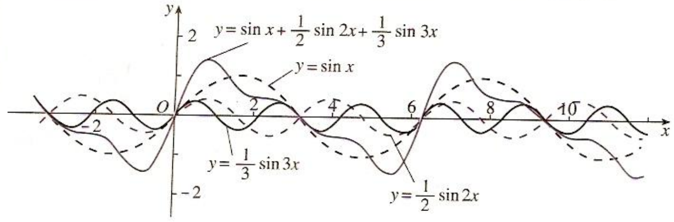
ئامپلىتۇدا، دەۋر، چاستوتا ۋە فازا

ئادەم بەدىنى ھەر خىل دەۋرىي ھەرىكەتلەرنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئورگانىزم، مېدىتسىنادا دەۋرى 24 سائەت بولغان فىزىئولوگىيىلىك ھەرىكەت ئوتتۇرىھال دەۋرلىك ھەرىكەت دېيىلىدۇ، مەسىلەن، قان بېسىمى، قان قەنتى قويۇقلۇقىنىڭ ئۆزگىرىشى؛ دەۋرى 24 سائەتتىن كىچىك بولغىنى قىسقا دەۋرلىك ھەرىكەت دەپ ئاتىلىدۇ، مەسىلەن، يۈرەك ۋە تومۇرنىڭ مىنۇتىغا 50 ~ 70 قېتىم سوقۇشى، مىنۇتىغا 16 ~ 24 قېتىمغىچە نەپەسلىنىش؛ دەۋرى 24 سائەتتىن چوڭ بولغىنى ئۇزۇن دەۋرلىك ھەرىكەت دەپ ئاتىلىدۇ، مەسىلەن، ئادەملەرنىڭ كەيپىياتى، جىسمانىي كۈچى، ئەقلىي قابىلىيىتى قاتارلىقلار.

ئاۋازمۇ سىنۇس فۇنكسىيىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ، ئاۋاز جىسىملارنىڭ تەۋرىنىشىدىن ھاسىل بولغان، ئاڭلاش سېزىمىنى قوزغىيالايدىغان دولقۇندىن ئىبارەت. ھەربىر ئاۋاز ساپ ئاۋازلارنىڭ بىرىكىشىدىن ھاسىل بولغان بولۇپ، ساپ ئاۋازنىڭ ماتېماتىكىلىق مودېلى فۇنكسىيە $y = A\sin\omega t$ بولىدۇ. ئاۋازنىڭ ئىنتوناتسىيە، ياڭراقلىق دەرىجىسى، ئاۋاز ئۇزۇنلۇقى ۋە ئاۋاز تۇسى قاتارلىق تۆت مۇھىم ئامىلى سىنۇس فۇنكسىيىسى ۋە ئۇنىڭ پارامېتىرى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولىدۇ. ياڭراقلىق دەرىجىسى ئامپلىتۇدا بىلەن، يەنى ئاۋاز دولقۇنىنىڭ ئېنېرگىيىسى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولۇپ، ئامپلىتۇدا قانچە چوڭ بولسا، ياڭراقلىق دەرىجىسىمۇ شۇنچە چوڭ بولىدۇ؛ ئاۋاز ئۇزۇنلۇقىمۇ ئامپلىتۇدا بىلەن مۇناسىۋەتلىك، ئاۋاز دولقۇنى تارقىلىش جەريانىدا ئۈچەر تەۋرىنىشكە ئۇچراپ، سىستېمىلىق مېخانىك ئېنېرگىيە ۋاقىتقا ئەگىشىپ تەدرىجىي كىچىكلەيدىغانلىقتىن، تەۋرىنىشنىڭ ئامپلىتۇدىسىمۇ تەدرىجىي كىچىكلەيدۇ - دە، بۇنىڭ بىلەن ئاۋازمۇ تەدرىجىي يوقىلىدۇ؛ ئىنتوناتسىيە بىلەن ئاۋاز دولقۇنىنىڭ تەۋرىنىش چاستوتىسى بىرگە بىر ماس بولۇپ، چاستوتىسى تۆۋەن بولغان ئاۋاز بوم، چاستوتىسى يۇقىرى بولغان ئاۋاز چىرقىراق بولىدۇ.

بىز ئادەتتە ئاڭلىيالايدىغان ھەربىر ئاۋاز پەقەت بىرلا ئاۋازنىڭ جاراڭلىشى بولماستىن، بەلكى نۇرغۇنلىغان ئاۋازنىڭ قوشۇلۇشى بولۇپ، ئۇ، بىرىكمە ئاۋاز دېيىلىدۇ. ئاۋاز چىقارغۇچى جىسىم پۈتۈن بۆلەك بويىچە تەۋرەنگەندە، چاستوتىسى f بولغان ئۇل ئاۋاز پەيدا بولىدۇ، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، ئۇنىڭ قالغان قىسىملىرى، مەسىلەن، ئىككىدىن بىرىچىلىك، ئۈچتىن بىرىچىلىك، تۆتتىن بىرىچىلىك كېلىدىغان قىسىملىرىمۇ بىللە تەۋرىنىدۇ. بۇ تەۋرىنىشلەرنىڭ چاستوتىسى دەل پۈتۈن بۆلەكلىك تەۋرىنىش چاستوتىسىنىڭ ھەسسىلىك سانىغا، يەنى $2f$، $3f$، $4f$ قاتارلىقلارغا تەڭ بولۇپ، بۇ ئاۋازلار ماس ئاۋاز دەپ ئاتىلىدۇ. ماس ئاۋازلارنىڭ ئامپلىتۇدىسى كىچىكرەك بولغاچقا، ئادەتتە ئۇنى ئاسانلىقچە ئاڭلىيالمايمىز. شۇڭا بىز ئاڭلىيالايدىغان ئاۋازنىڭ فۇنكسىيىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots .$$



ئاۋاز تۇسى ئادەتتە ئۇل ئاۋاز بىلەن ماس ئاۋازنىڭ ئارىلاش رول ئوينىشىدىن ۋۇجۇدقا كېلىدۇ. ئوخشاش بولمىغان چالغۇ ئەسۋابلىرى ۋە ئوخشىمىغان ئادەملەرنىڭ ئاھاڭى ئوخشاش بولسىمۇ، لېكىن ئاۋاز تۇسى ئوخشىمايدۇ، كىشىلەر بۇنىڭغا ئاساسەن ئوخشاش بولمىغان ئاۋازلارنى پەرق ئېتىدۇ.

دەۋرىي فۇنكسىيە مۇڭلۇق مۇزىكىلارنى پەيدا قىلىدۇ!

5.1 ـ كۆنۈكمە

A گورۇپپا

1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

(1) فۇنكسىيە $y=\cos\left(x+\frac{1}{3}\right)$، $x \in \mathbf{R}$ نىڭ گرافىكىغا ئېگە بولۇش ئۈچۈن، كوسىنۇس ئەگرى سىزىقى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنى (　).

(A) سول تەرەپكە $\frac{\pi}{3}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(B) ئوڭ تەرەپكە $\frac{\pi}{3}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(C) سول تەرەپكە $\frac{1}{3}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(D) ئوڭ تەرەپكە $\frac{1}{3}$ بىرلىك ئۇزۇنلۇقتا پاراللېل يۆتكەش كېرەك

(2) فۇنكسىيە $y=\cos\frac{x}{5}$، $x \in \mathbf{R}$ نىڭ گرافىكىغا ئېگە بولۇش ئۈچۈن، كوسىنۇس ئەگرى سىزىقى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ (　).

(A) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 5 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

1 - باب

(B) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{5}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

(C) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 5 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

(D) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{5}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

(3) فۇنكسىيە $y=\frac{1}{4}\cos x$، $x\in\mathbf{R}$ نىڭ گرافىكىغا ئېگە بولۇش ئۈچۈن، كوسىنۇس ئەگرى سىزىقى ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ ( ).

(A) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 4 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

(B) ئوردىناتىنى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{4}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

(C) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ 4 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش كېرەك

(D) ئابسىسساسىنى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتىنى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{4}$ ھەسسىسىگىچە قىسقارتىش كېرەك

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىر دەۋر بولغان يېپىق ئىنتېرۋالدىكى ئاددىي گرافىكىنى سىزىڭ (شارائىت يار بەرسە، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ گرافىكىنى سىزىپ تەكشۈرسىڭىز بولىدۇ):

(1) $y=4\sin\frac{1}{2}x,\ x\in\mathbf{R};$ (2) $y=\frac{1}{2}\cos 3x,\ x\in\mathbf{R};$

(3) $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),\ x\in\mathbf{R};$ (4) $y=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\pi\right),\ x\in\mathbf{R}.$

3. تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ ئامپلىتۇدىسى، دەۋرى ۋە دەسلەپكى فازىسىنى گرافىك سىزماي بىۋاستە يېزىڭ ھەمدە سىنۇس ئەگرى سىزىقىنى قانداق ئۆزگەرتىش ئارقىلىق بۇ فۇنكسىيەلەرنىڭ گرافىكىغا ئېرىشكىلى بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ (ئېنىقلىنىش ساھەسىگە دىققەت قىلىڭ):

(1) $y=8\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right),\ x\in[0,\ +\infty);$ (2) $y=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right),\ x\in[0,\ +\infty).$

4. 1.5.1 - رەسىمدىكى توك i (بىرلىكى: A) نىڭ ۋاقىت t (بىرلىكى: s) غا ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىنىڭ فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋىتى:

$$i=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,\ +\infty).$$

(1) توك i نىڭ ئۆزگىرىشىنىڭ دەۋرى، چاستوتىسى، ئامپلىتۇدىسى ۋە دەسلەپكى فازىسىنى

تېپىڭ؛

(2) $t=0, \frac{1}{600}, \frac{1}{150}, \frac{7}{600}, \frac{1}{60}$ (بىرلىكى: s) بولغاندىكى توك i نى تېپىڭ.

5. ئۇزۇنلۇقى l cm بولغان بىر تال يىپنىڭ بىر ئۇچى مۇقىم قىلىنىپ، يەنە بىر ئۇچىغا بىر كـ
چىك شارچە ئېسىلغان. كىچىك شارچە تەۋرەنگەندە، تەڭپۇڭ ئورنىدىن ئايرىلىش ئارىلىقى s(بىر
لىكى: cm) بىلەن ۋاقىت t (بىرلىكى: s) نىڭ فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋىتى:

$$s=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,\ +\infty).$$

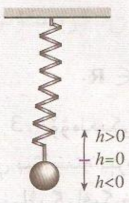
(1) كىچىك شارچىنىڭ تەۋرىنىش دەۋرىنى تېپىڭ؛

(2) $g\approx 980\ \mathrm{cm/s^2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، شارچىنىڭ تەۋرىنىش دەۋرىنى 1 s قىلىش
ئۈچۈن، يىپنىڭ ئۇزۇنلۇقى l نى قانچىلىك قىلىش كېرەك؟ (0.1 cm غىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ)

B گۇرۇپپا

1. پۇرژىنىدا تەۋرەتكۈچنىڭ تەۋرىنىشى ئاددىي گارمونىك ھەرىكەت بولۇپ، تۆۋەندىكى جەدۋە
دە تەۋرەتكۈچنىڭ تولۇق بىر قېتىم تەۋرىنىش جەريانىدىكى ۋاقىت t بىلەن يۆتكىلىشى s ئارىس
دىكى ماس سانلىق مەلۇماتلار بېرىلگەن. بۇ سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن بۇ تەۋرەتكۈچنىڭ تەۋ
رىنىشىنىڭ فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى تېپىڭ.

t	0	t_0	$2t_0$	$3t_0$	$4t_0$	$5t_0$	$6t_0$	$7t_0$	$8t_0$	$9t_0$	$10t_0$	$11t_0$	$12t_0$
s	−20.0	−17.8	−10.1	0.1	10.3	17.7	20.0	17.7	10.3	0.1	−10.1	−17.8	−20.0



(2 – مىسال ئۈچۈن

2. پۇرژىنىغا ئېسىلغان شارچە يۇقىرى – تۆۋەن ھەرىكەت قىلغاندا، ئۇنىڭ t سېكۇنتتىكى تەڭپۇڭ ئورنى (شارچىنىڭ تىنچ تۇرغان چاغدىكى ئورنى)غا نىسبەتەن ئېگىزلىكى h (سانتىمېتىر) تۆۋەندىكى مۇناسىۋەت ئىپادىسىگە ئاساسەن ئېنىقلىنىدۇ:

$$h=2\sin(t+\frac{\pi}{4}).$$

t نى ئابسىسسا، h نى ئوردىنات قىلىپ، بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىر دەۋر بولغان يېپىق ئىنتېرۋالدىكى گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە تۆۋەندىكى سوئاللارغا جاۋا
بېرىڭ:

(1) شارچىنىڭ تەۋرىنىشكە باشلىغان (يەنى $t=0$) چاغدىكى ئورنى قەيەردە؟

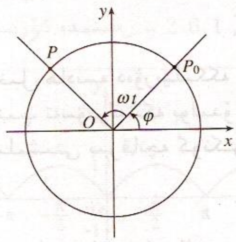
(2) شارچىنىڭ ئەڭ ئېگىز ۋە ئەڭ تۆۋەن نۇقتىسى بىلەن تەڭپۇڭ ئورنىنىڭ ئارىلىقى ئايرىم
ئايرىم قانچىلىك بولىدۇ؟

(3) شارچە قانچىلىك ۋاقىتتا بىر قېتىم قايتىلانما ھەرىكەت قىلىدۇ؟

(4) شارچە سېكۇنتتا قانچە قېتىم تەكرار تەۋرىنىدۇ؟

1 ـ باب

3. رەسىمدىكىدەك، Pنۇقتا رادىئۇسى r cm بولغان قۇم چاقنىڭ قىرى ئۈستىدىكى بىر ماددىي نۇقتا، ئۇ دەسلەپكى ئورنى P_0 دىن باشلاپ، سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە ω rad/s بۇلۇڭلۇق تېزلىك بىلەن ئايلانما ھەرىكەت قىلىدۇ. P نۇقتىنىڭ ئوردىناتى y نىڭ ۋاقىت t غا دائىر فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋىتىنى تېپىڭ ھەمدە P نۇقتىنىڭ ھەرىكەتلىنىش دەۋرى بىلەن چاستوتىسىنى تېپىڭ.

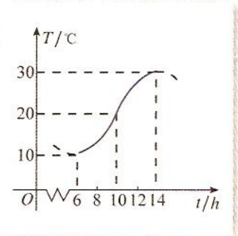


(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

CHAPTER 1

6-1 ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە مودېلىنىڭ ئاددىي قوللىنىلىشى

ئەگەر ئۆزگىرىۋاتقان مەلۇم بىر خىل ھادىسە دەۋرىيلىككە ئىگە بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىدىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلەشكە بولىدۇ. بۇ پاراگرافتا ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە مودېلىنىڭ ئاددىي قوللىنىلىشىنى بىرقانچە كونكرېت مىسال ئارقىلىق چۈشەندۈرۈپ ئۆتىمىز.



1.6.1 - رەسىم

1 - مىسال. 1.6.1 - رەسىمدىكىدەك، مەلۇم جاينىڭ بىر كۈندىكى سائەت 6 ~ 14 كىچە بولغان تېمپېراتۇرا ئۆزگىرىشىنىڭ ئەگرى سىزىقى فۇنكسىيە

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$$

نى تەقرىبىي ھالدا قانائەتلەندۈرىدۇ.

(1) بۇ بىر كۈندىكى سائەت 6 ~ 14 كىچە بولغان ئەڭ چوڭ تېمپېراتۇرا پەرقىنى تاپايلى؛

(2) بۇ بۆلەك ئەگرى سىزىقنىڭ فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى يازايلى.

يېشىش: (1) رەسىمدىن بىلىشكە بولىدۇكى، بۇ بۆلەك ۋاقىتتىكى ئەڭ چوڭ تېمپېراتۇرا پەرقى 20℃.

(2) رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، سائەت 6 ~ 14 كىچە بولغان ۋاقىتتىكى گرافىك فۇنكسىيە

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b \qquad (*)$$

نىڭ يېرىم دەۋرىدىكى گرافىكى بولىدۇ، شۇڭا

$$A=\frac{1}{2}(30-10)=10,$$

$$b=\frac{1}{2}(30+10)=20.$$

چۈنكى $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=14-6$،

شۇڭا $\omega=\frac{\pi}{8}$ بولىدۇ.

$A=10$، $b=20$، $\omega=\frac{\pi}{8}$، $x=6$، $y=10$ لارنى (*) ئىپادىدىكى ئورنىغا قويۇپ يەشسەك، $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ كېلىپ چىقىدۇ.

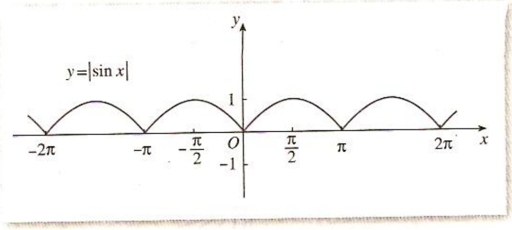
يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق، تاپماقچى بولغان ئانالىتىك ئىپادە مۇنداق بولىدۇ:

$$y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20,\ x\in[6,\ 14].$$

ئومۇمەن، تېپىلغان فۇنكسىيە مودېلى پەقەت شۇ كۈننىڭ مەلۇم ۋاقىت بۆلىكىدىكى تېمپېراتۇرا ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى تەقرىبىي تەسۋىرلەپ بېرەلەيدۇ، شۇڭا ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئۆزگىرىش دائىرىسىگە ئالاھىدە دىققەت قىلىش لازىم.

2 - مىسال. فۇنكسىيە $y=|\sin x|$ نىڭ گرافىكىنى سىزايلى ھەمدە ئۇنىڭ دەۋرىنى كۆزىتەيلى.

يېشىش: فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى 2.6.1 - رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك بولىدۇ.



2.6.1 - رەسىم

رەسىمدىن كۆرۈشكە بولىدۇكى، فۇنكسىيە $y=|\sin x|$ بولسا π نى دەۋر قىلغان دولقۇنسىمان ئەگرى سىزىقتۇر.

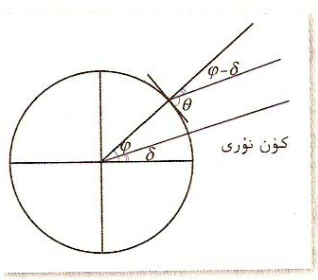
بۇنى مۇنداق ئىسپاتلىساقمۇ بولىدۇ:

$$|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$$

بولغانلىقتىن، فۇنكسىيە $y=|\sin x|$ بولسا π نى دەۋر قىلغان فۇنكسىيە بولىدۇ.

فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ كۆرسەتمىلىكلىكىدىن پايدىلىنىپ، گرافىكنى كۆزىتىش ئارقىلىق فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى بىلىۋېلىش، ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى مۇھاكىمە قىلىشتا دائىم ئىشلىتىلىدىغان ئۇسۇلدۇر. روشەنكى، فۇنكسىيە $y=|\sin x|$ سىنۇس فۇنكسىيىسى بىلەن زىچ باغلىنىشلىق، سىز بۇ خىل باغلىنىشتىن پايدىلىنىپ ئۇنىڭ گرافىكىنى سىزىش ئۇسۇلىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

3 - مىسال. 3.6.1 - رەسىمدىكىدەك، يەر شارىنىڭ سىرتقى يۈزىدىكى مەلۇم جايدا قۇياشنىڭ چىققىچۇشتىكى ئېگىزلىك بۇلۇڭىنى θ ، شۇ چاغدىكى قۇياشنىڭ تىك چۈشۈش كەڭلىكىنى δ ، شۇ جاينىڭ كەڭلىك قىممىتىنى φ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا بۇ ئۈچ مىقدار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت $\theta=90°-|\varphi-\delta|$ بولىدۇ. δ شۇ جاينىڭ يازلىق يېرىم يىلىدا مۇسبەت قىممەت، قىشلىق يېرىم يىلىدا مەنپىي قىممەت ئالىدۇ.



3.6.1 - رەسىم

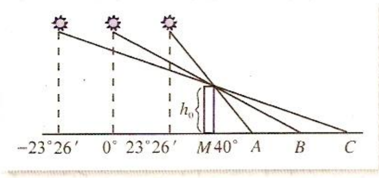
ئەگەر بېيجىڭ رايونىدىكى (كەڭلىك سانى تەخمىنەن شىمالىي كەڭلىك 40°) ئېگىزلىكى h_0 بولغان بىر بىنانىڭ شىمال تەرىپىگە يېڭىدىن بىر بىنا سېلىنماقچى بولسا، بۇ بىنانىڭ

1 - قەۋەتكە پۈتۈن يىلدا چىڭقىچۈشتە چۈشىدىغان كۈن نۇرىنى ئالدىنقى بىنانىڭ توسۇۋالماسلىقى ئۈچۈن، ئىككى بىنانىڭ ئارىلىقى قانچە مېتىردىن كىچىك بولماسلىقى كېرەك؟

تەھلىل: 3.6.1 - رەسىمگە ئاساسلانغاندا، قۇياشنىڭ ئېگىزلىك بۇلۇڭى θ ، بىنانىڭ ئېگىزلىكى h_0 ۋە شۇ چاغدىكى بىنانىڭ يەر يۈزىدىكى سايىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى h ئارىسىدا تۆۋەندىكىدەك مۇناسىۋەت مەۋجۇت:

$$h_0 = h\tan\theta\ .$$

جۇغراپىيىلىك بىلىملەرگە ئاساسلانغاندا، بېيجىڭ رايونىدا قۇياش شىمالىي تروپىك سىزىقىغا تىك چۈشكەندە جىسىمنىڭ سايىسى ئەڭ قىسقا بولىدۇ، قۇياش جەنۇبىي تروپىك سىزىقىغا تىك چۈشكەندە جىسىمنىڭ سايىسى ئەڭ ئۇزۇن بولىدۇ. شۇڭا، يېڭىدىن سېلىنىدىغان بىنانىڭ 1 - قەۋەتكە پۈتۈن يىلدا چىڭقىچۈشتە چۈشىدىغان كۈن نۇرىنىڭ توسۇلماسلىقى ئۈچۈن، قۇياش جەنۇبىي تروپىك سىزىقىغا تىك چۈشكەن چاغدىكى ئەھۋالنى مۇلاھىزە قىلىشقا توغرا كېلىدۇ.



4.6.1 - رەسىم

يېشىش: 4.6.1 - رەسىمدىكىدەك، A ، B ، C لار ئايرىم - ئايرىم ھالدا قۇياش نۇرى شىمالىي تروپىك سىزىقى، ئېكۋاتور ۋە جەنۇبىي تروپىك سىزىقىغا تىك چۈشكەن چاغدىكى بىنا چوققىسىنىڭ يەر يۈزىدىكى پروييېكسىيە نۇقتىلىرىدىن ئىبارەت. يېڭىدىن سېلىنىدىغان بىنانىڭ 1 - قەۋەتكە پۈتۈن يىلدا چىڭقىچۈشتە كۈن نۇرى تولۇق چۈشىدىغان قىلىش ئۈچۈن، قۇياش جەنۇبىي تروپىك سىزىقىغا تىك چۈشكەن چاغدىكى ئەھۋالنى مۇلاھىزە قىلىش كېرەك، قۇياشنىڭ شۇ چاغدىكى تىك چۈشۈش كەڭلىكى $-23°26'$ بولىدۇ، مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، ئىككى بىنانىڭ ئارىلىقى MC دىن كىچىك بولماسلىقى كېرەك.

قۇياشنىڭ ئېگىزلىك بۇلۇڭىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

$$\angle C = 90° - |40° - (-23°26')| = 26°34',$$

شۇڭا

$$MC = \frac{h_0}{\tan C} = \frac{h_0}{\tan 26°34'} \approx 2.000\,h_0 .$$

دېمەك، بىنا سالغاندا، بىناغا چۈشىدىغان كۈن نۇرىنى ئالدىدىكى بىنانىڭ توسۇۋالماسلىقى ئۈچۈن، ئىككى بىنانىڭ ئارىسىدا بىنا ئېگىزلىكىنىڭ ئىككى ھەسسىسىگە تەڭ كەلگۈدەك ئارىلىق قالدۇرۇش كېرەك.

ئەمەلىي مەسىلىلەرنىڭ ئارقا كۆرۈنۈشى كۆپ ھاللاردا مۇرەككەپ بولىدۇ. ئۇلارنى كۆپ پەنلەرگە دائىر بىلىملەرنى ئۇنىۋېرسال قوللىنىپ ھەل قىلىشقا توغرا كېلىدۇ. شۇڭا، ماتېماتىكىلىق بىلىملەرنى قوللىنىپ ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا، مۇرەككەپ ئارقا كۆرۈنۈشلەردىن ئاساسلىق ماتېماتىكىلىق مۇناسىۋەتلەرنى ئايرىپ ئېلىشقا، شۇنىڭدەك ئالاقىدار پەنلەردىكى بىلىملەردىن پايدىلىنىش ئارقىلىق مەسىلىلەرنى چۈشىنىۋېلىشقا دىققەت قىلىش كېرەك.

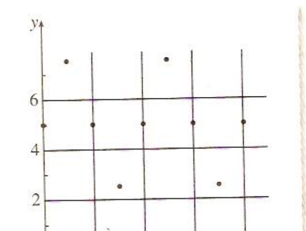
4 - مىسال. ئاي ۋە كۈننىڭ تارتىش كۈچىنىڭ تەسىرىدە، دېڭىز سۈيى بەلگىلىك ۋاقىتتا كۆتىرىلىدۇ ۋە پەسىيىدۇ، بۇ خىل ھادىسە دېڭىز سۈيىنىڭ كۆتۈرۈلۈشى - پەسىيىشى (تاشقىن) دەپ ئاتىلىدۇ. ئادەتتە، دېڭىز سۈيى ئەتىگەندە كۆتۈرۈلۈپ، كەچتە پەسىيىدۇ. ئادەتتىكى ئەھۋالدا، پاراخوت دېڭىز سۈيى كۆتۈرۈلگەندە دېڭىز يولىغا كىرىپ، پورتقا يېقىنلىشىدۇ؛ يۈك چۈشۈرۈلۈپ بولغاندىن كېيىن، دېڭىز سۈيى پەسەيگەندە دېڭىزغا قايتىدۇ. جەدۋەلدە مەلۇم پورتنىڭ مەلۇم پەسىلدىكى ھەر كۈنلۈك پەيتلەر بىلەن سۇ چوڭقۇرلۇقىنىڭ مۇناسىۋىتى كۆرسىتىلگەن:

پەيت	مېتىر/سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى	پەيت	مېتىر/سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى	پەيت	مېتىر/سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى
0: 00	5.0	9: 00	2.5	18: 00	5.0
3: 00	7.5	12: 00	5.0	21: 00	2.5
6: 00	5.0	15: 00	7.5	24: 00	5.0

(1) بۇ پورتتىكى سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى بىلەن ۋاقىتنىڭ فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋىتىنى بىر فۇنكسىيە ئارقىلىق تەقرىبىي تەسۋىرلەپ، پۈتۈن سائەتلىك پەيتتىكى سۇ چوڭقۇرلۇقىنىڭ تەقرىبىي سانلىق قىممەتلىرىنى تاپايلى (0.001 گىچە ئېنىقلىقتا).

(2) بىر يۈك پاراخوتىنىڭ سۇغا چۆكۈش چوڭقۇرلۇقى (پاراخوتىنىڭ تېگى بىلەن سۇ يۈزىنىڭ ئارىلىقى) 4 مېتىر بولۇپ، بىخەتەرلىك نىزامىدا كەم دېگەندە 1.5 مېتىر بىخەتەر ئارىلىق بولۇشى كېرەك (پاراخوتىنىڭ تېگى بىلەن دېڭىز ئاستىنىڭ ئارىلىقى) دەپ بەلگىلەنگەن بولسا، بۇ پاراخوت قايسى ۋاقىتتا پورتقا كىرەلەيدۇ؟ پورتتا قانچىلىك ۋاقىت تۇرالايدۇ؟

(3) ئەگەر مەلۇم پاراخوتىنىڭ سۇغا چۆكۈش چوڭقۇرلۇقى 4 مېتىر، بىخەتەر ئارىلىقى 1.5 مېتىر بولۇپ، پاراخوت سائەت 2:00 دە يۈك چۈشۈرۈشكە باشلىغاندا، سۇغا چۆكۈش چوڭقۇرلۇقى سائىتىگە 0.3 مېتىر تېزلىكتە كېمەيسە، ئۇ ھالدا بۇ پاراخوت قايسى ۋاقىتتا يۈك چۈشۈرۈشنى توختىتىپ، چوڭقۇرراق سۇ رايونىغا قاراپ مېڭىشى كېرەك؟



5.6.1 - رەسىم

تەھلىل: مەسىلىدە بېرىلگەن سانلىق مەلۇماتلارنى كۆزەتكەندە، سۇ چوڭقۇرلۇقىنىڭ ئۆزگىرىشى دەۋرىيلىككە ئىگە ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ. جەدۋەلدىكى سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن 5.6.1 - رەسىمدىكىدەك گرافىك سىزىمىز (بۇ گرافىك تارقاق نۇقتىلار گرافىكى دېيىلىدۇ). تارقاق نۇقتىلار گرافىكىنىڭ شەكلىدىن ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇكى، بۇ پورتتىكى سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى بىلەن ۋاقىتنىڭ مۇناسىۋىتىنى $y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ كۆرۈنۈشتىكى فۇنكسىيە ئارقىلىق تەسۋىرلەشكە بولىدۇ، بۇنىڭدىكى x ۋاقىتنى، y بولسا سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقىنى ئىپادىلەيدۇ. سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن A، ω، φ، h لارنىڭ قىممەتلىرىنى كونكرېت ئېنىقلىغىلى بولىدۇ.

يېشىش: (1) ۋاقىتنى ئابسىسسا، سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقىنى ئوردىناتا قىلىپ، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تارقاق نۇقتىلار گرافىكىنى سىزىمىز (5.6.1 - رەسىم).

گرافىكقا ئاساسەن، سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى بىلەن ۋاقىت ئارىسىدىكى ماس مۇناسىۋەتنى فۇنكسىيە

$y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ تىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلەشنى ئويلىششقا بولىدۇ. سانلىق مەلۇماتلار بىلەن گرافىكتىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$A=2.5,\ h=5,\ T=12,\ \varphi=0;$$

$T=\frac{2\pi}{\omega}=12$ دىن $\omega=\frac{\pi}{6}$ كېلىپ چىقىدۇ.

شۇڭا، بۇ پورتتىكى سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى بىلەن ۋاقىت ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى $y=2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5$ ئارقىلىق تەقرىبىي تەسۋىرلىگىلى بولىدۇ.

يۇقىرىقى مۇناسىۋەت ئىپادىسىدىن پورتنىڭ پۈتۈن سائەتلىك پەيتتىكى سۇ چوڭقۇرلۇقىنىڭ تەقرىبىي قىممىتىگە ئاسانلا ئېرىشىمىز:

پەيت	0: 00	1: 00	2: 00	3: 00	4: 00	5: 00	6: 00	7: 00	8: 00	9: 00	10: 00	11: 00
سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى	5.000	6.250	7.165	7.500	7.165	6.250	5.000	3.754	2.835	2.500	2.835	3.754
پەيت	12: 00	13: 00	14: 00	15: 00	16: 00	17: 00	18: 00	19: 00	20: 00	21: 00	22: 00	23: 00
سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى	5.000	6.250	7.165	7.500	7.165	6.250	5.000	3.754	2.835	2.500	2.835	3.754

(2) يۈك پاراخوتى ئېھتىياجلىق بولىدىغان بىخەتەر سۇ چوڭقۇرلۇقى

$4+1.5=5.5$ (مېتىر)،

شۇڭا $y\geqslant 5.5$ بولغاندا پاراخوت پورتقا كىرەلەيدۇ.

$$2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5=5.5$$

دېسەك، $\sin\frac{\pi}{6}x=0.2$ بولىدۇ. ھېسابلىغۇچتىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

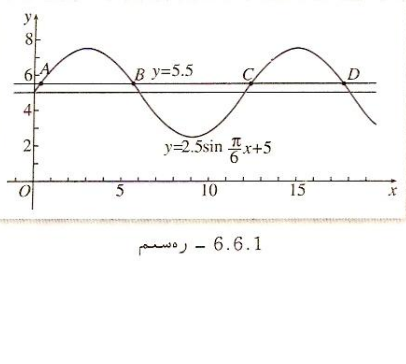
MODE MODE 2

SHIFT $\sin^{-1}$ ❶ 0.2 = $0.20135792\approx 0.2014$.

❶ ئىلمىي ھېسابلىغۇچتا $\sin^{-1}$، $\cos^{-1}$، $\tan^{-1}$ ئۈچ كۇنۇپكا بار، بىر ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتى بېرىلگەندە، ئۇلاردىن پايدىلىنىپ ماس بۇلۇڭلارنى تاپقىلى بولىدۇ.

6.6.1 - رەسىمدىكىدەك، ئىنتېرۋال $[0,\ 12]$ دە، فۇنكسىيە $y=2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5$ نىڭ گرافىكى بىلەن تۈز سىزىق $y=5.5$ نىڭ A، B دىن ئىبارەت ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بار، شۇڭا

$$\frac{\pi}{6}x\approx 0.2014 \text{ ياكى } \pi-\frac{\pi}{6}x\approx 0.2014.$$



6.6.1 - رەسىم

1 - باب

بۇنى يەشسەك:

$$x_A \approx 0.384\,6,\ x_B \approx 5.615\,4.$$

فۇنكسىيىنىڭ دەۋرىيلىكىگە ئاساسەن:

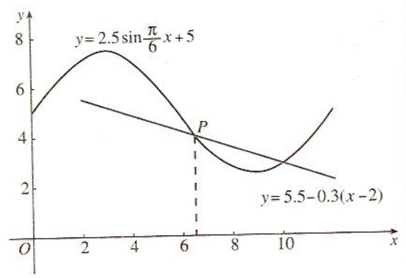
$$x_C \approx 12 + 0.384\,6 = 12.384\,6,$$

$$x_D \approx 12 + 5.615\,4 = 17.615\,4.$$

شۇڭا، يۈك پاراخوتى سائەت 30 :0 ئەتراپىدا پورتقا كىرىپ، ئەتىگەن سائەت 30 :5 ئەتراپىدا پورتتىن چىقسا؛ ياكى چۈش سائەت 30 :12 ئەتراپىدا پورتقا كىرىپ، چۈشتىن كېيىن سائەت 30 :17 ئەتراپىدا پورتتىن چىقسا بولىدۇ. پاراخوت ھەر قېتىم پورتتا 5 سائەت ئەتراپىدا تۇرالايدۇ.

(3) يۈك پاراخوتىنىڭ x پەيتتىكى بىخەتەر سۇ چوڭقۇرلۇقىنى y دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $(x \geqslant 2)$ $y = 5.5 - 0.3(x-2)$ بولىدۇ. ئوخشاش بىر كوئوردېنات سىستېمىسىدا بۇ ئىككى فۇنكسىيەنىڭ گرافىكىنى سىزساق، سائەت 6 ~ 7 گىچە بولغان ئارىلىقتا ئىككى فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ بىر كېسىشىش نۇقتىسىغا ئىگە ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز (7.6.1 - رەسىم).

ھېسابلىغۇچنى ئىشلىتىپ، P نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنىڭ تەقرىبىي قىممىتىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپسىڭىز بولىدۇ.



7.6.1 - رەسىم

ھېسابلاش ئارقىلىق بۇ نەتىجىگە ئېرىشكىلى بولىدۇ. سائەت 6 دە سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى تەخمىنەن 5 مېتىر بولۇپ، بۇ چاغدىكى يۈك پاراخوتىنىڭ بىخەتەر سۇ چوڭقۇرلۇقى تەخمىنەن 4.3 مېتىر؛ سائەت 6.5 تە سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى 4.2 مېتىر بولۇپ، بۇ چاغدىكى يۈك پاراخوتىنىڭ بىخەتەر سۇ چوڭقۇرلۇقى تەخمىنەن 4.1 مېتىر؛ سائەت 7 دە سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقى تەخمىنەن 3.8 مېتىر بولۇپ، بىراق يۈك پاراخوتىنىڭ بىخەتەر سۇ چوڭقۇرلۇقى تەخمىنەن 4 مېتىر بولىدۇ. شۇڭا، بىخەتەر بولۇش ئۈچۈن، يۈك پاراخوتى ئەڭ ياخشىسى سائەت 6.5 تىن ئىلگىرى يۈك چۈشۈرۈشنى توختىتىپ، چوڭقۇرراق سۇ رايونىغا قاراپ مېڭىشى كېرەك.

مۇلاھىزە ؟

7.6.1 - رەسىمدىكىدەك، $P(x_0, y_0)$ دەپ پەرەز قىلايلى، بەزىلەر P نۇقتا ئىككى گرافىكنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بولغانلىقتىن، بۇ، سائەت x_0 بولغاندا يۈك پاراخوتىنىڭ بىخەتەر سۇ چوڭقۇرلۇقى دەل

پورتتىكى سۇنىڭ چوڭقۇرلۇقىغا تەڭ بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ، شۇڭا بۇ ۋاقىتتا پاراخوت يۈك چۈشۈرۈشنى توختىتىپ، چوڭقۇرراق سۇ رايونىغا قاراپ ماڭسىلا بولىدۇ، دەپ قارايدۇ، سىزنىڭچە توغرىمۇ؟

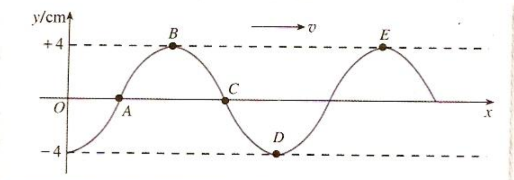
ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە رېئال دۇنيادىكى دەۋرىي ھادىسىلەرنى تەسۋىرلەيدىغان بىر خىل ماتېماتىكىلىق مودېل بولۇش سۈپىتىدە، نۇرغۇن مەسىلىلەرنى مۇھاكىمە قىلىشتا ئىشلىتىلىدۇ، ئۇ، دەۋرىي ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى تەسۋىرلەش، ئۇلارنىڭ كەلگۈسىنى مۆلچەرلەش قاتارلىق جەھەتلەردە ئىنتايىن مۇھىم رول ئوينايدۇ.

كونكرېت قىلىپ ئېيتقاندا، توپلىغان سانلىق مەلۇماتلاردىن پايدىلىنىپ، ماس ھالدىكى «تارقاق نۇقتىلار گرافىكى» نى تۈزۈپ، گرافىكنى كۆزىتىش ھەمدە فۇنكسىيىلەر ئۈستىدە تەڭشەش ئېلىپ بېرىش ئارقىلىق كونكرېت فۇنكسىيە مودېلىغا ئېرىشىمىز، ئاخىرىدا بۇ فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ ماس ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىمىز.

ئەمەلىي مەسىلىلەر ئادەتتە مۇرەككەپ سانلىق مەلۇماتلارغا چېتىلىدۇ، شۇڭا دائىم كومپيۇتېر ياكى ھېسابلىغۇچنى ئىشلىتىشكە توغرا كېلىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى رەسىمدە ئوڭغا تارقالغان ئارغامچا دولقۇنى ھەمدە ئارغامچا ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ مەلۇم پەيتتىكى ئورنى كۆرسىتىلگەن بولۇپ، $\frac{1}{2}$ دەۋردىن كېيىن، B نۇقتىنىڭ ئورنى قايسى ئورۇنغا يۆتكىلىدۇ؟



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. تېلېۋىزىيە ئىستانسىسىنىڭ ئوخشاش بولمىغان سەھىپىلەرنى قويۇش ۋاقتىنىڭ دەۋرى ئوخشاش بولمايدۇ، بەزىلىرى كۈندە قويۇلىدۇ، بەزىلىرى كۈن ئاتلاپ قويۇلىدۇ، يەنە بەزىلىرى بىر ھەپتىدە بىر قېتىم قويۇلىدۇ. ئۆز جايىڭلاردىكى تېلېۋىزىيە پروگراممىلىرىدىن ئالدىن بېرىلگەن مەلۇماتقا قاراپ، ئوخشاش بولمىغان سەھىپىلەرنىڭ قويۇلۇش دەۋرىنى ستاتىستىكا قىلىڭ.

3. ئادەم تۇغۇلغان كۈندىن باشلاپ، ئۇنىڭ كەيپىياتى، جىسمانىي كۈچى، ئەقلىي قابىلىيىتى قاتارلىق پسىخىكىلىق ھالەت ۋە فىزىئولوگىيىلىك ھالەتلىرىدە دەۋرىيلىك ئۆزگىرىش بولىدۇ. پسىخولوگلارنىڭ ستاتىستىكىسىغا ئاساسلانغاندا، ئادەم بەدىنىنىڭ رىتىمى — جىسمانىي رىتىم، كەيپىيات رىتىمى، ئەقلىي رىتىمدىن ئىبارەت ئۈچ خىلغا بۆلۈنىدۇ. بۇ رىتىملارنىڭ دەۋرى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا 23 كۈن، 28 كۈن ۋە 33 كۈن بولۇپ، ھەربىر رىتىمنىڭ دەۋرى يەنە ئەۋجگە چىقىش مەزگىلى، كرىتىك كۈنى ۋە پەسىيىش مەزگىلى دەپ ئۈچ باسقۇچقا بۆلۈنىدۇ. يۇقىرىقى ئۈچ رىتىم دەۋرىنىڭ يېرىمىغا توغرا كەلگەن كۈن كرىتىك كۈنى بولىدۇ، يەنى 11.5 ـىنچى كۈ-

نى، 14 - كۈنى ۋە 16.5 نچى كۈنى ئايرىم - ئايرىم جىسمانىي رىتىم، كەيپىيات رىتىمى ۋە ئەقلىي رىتىمىنىڭ كرىتىك كۈنلىرى بولىدۇ. كرىتىك كۈنىنىڭ ئالدىنقى يېرىم مەزگىلى ئەۋجىگە چىقىش مەزگىلى، كېيىنكى يېرىم مەزگىلى پەسىيىش مەزگىلى بولىدۇ. ئەگەر تۇغۇلغان كۈنىنىڭ ئالدىدىكى بىر كۈن باشلىنىش ئورنى (تەڭپۇڭ ئورۇن) بولسا، تۇغۇلغان كۈنىڭىزگە ئاساسەن جىسمانىي كۈچىڭىز، كەيپىياتىڭىز ۋە ئەقلىي قابىلىيىتىڭىزنىڭ ئەگرى سىزىقىنى سىزىڭ ھەمدە قانداق چاغدا كەيپىياتىڭىزنى كونترول قىلىشىڭىز، قانداق چاغدا ئۆزىڭىزنى ئىلھاملاندۇرۇشىڭىز، قانداق چاغدا چېنىقىشنى كۈچەيتىشىڭىز، قانداق چاغدا جىسمانىي كۈچىڭىزنى ساقلىشىڭىز كېرەك ئىكەنلىكىنى يەكۈنلەڭ.

6.1 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، $\triangle ABC$ نىڭ ئىچكى بۇلۇڭى A نى تېپىڭ:

(1) $\sin A = \frac{1}{2}$;　　(2) $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

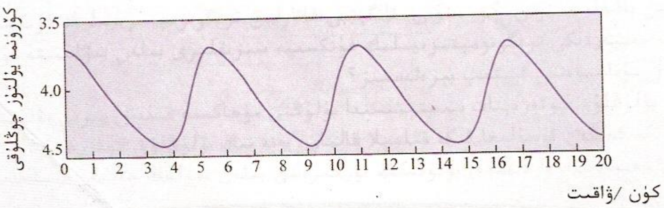
(3) $\tan A = 1$;　　(4) $\tan A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، $(0, 2\pi)$ ئىچىدىكى x بۇلۇڭىنى تېپىڭ:

(1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2) $\sin x = -1$;

(3) $\cos x = 0$;　　(4) $\tan x = 1$.

3. ئاسماندىكى بەزى تۇرغۇن يۇلتۇزلارنىڭ يورۇقلۇق دەرىجىسى ئۆزگىرىپ تۇرىدۇ، ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى بىر خىلى سېفېئىد دېيىلىدۇ، ئۇنىڭ ھەجمى كېڭىيىپ ۋە تارىيىپ يورۇقلۇق دەرىجىسىنىڭ دەۋرىيلىك ئۆزگىرىشىنى پەيدا قىلىدۇ. تۆۋەندىكى رەسىم بىر سېفېئىدنىڭ يورۇقلۇق دەرىجىسىنىڭ ۋاقىتقا ئەگىشىپ دەۋرىي ئۆزگىرىشىنىڭ گرافىكى بولسا، بۇ ئۆزگىرىشچان يۇلتۇزنىڭ يورۇقلۇق دەرىجىسىنىڭ ئۆزگىرىش دەۋرى قانچە كۈن بولىدۇ؟ ئۇ ئەڭ يورۇق بولغاندا قانچىنچى دەرىجىلىك يۇلتۇز بولىدۇ؟ ئەڭ خىرە بولغاندا قانچىنچى دەرىجىلىك يۇلتۇز بولىدۇ؟



4. ياز كۈنلىرى توك ئىشلىتىش يۇقىرى پەللىگە چىقىدۇ، بولۇپمۇ كەچلەردە، ئاھالىلەرنىڭ ھاۋا تەڭشىگۈچ ئىشلىتىشگە كاپالەتلىك قىلىش ئۈچۈن، ئېلېكتر تارماقلىرى كارخانا ۋە كەسپىي ئورۇنلارنىڭ توك ئىشلىتىشىنى چەكلىمىسە بولمايدۇ، ئەمما سائەت 0 دىن كېيىن يەنە توك كۆچى ئېشىپ قېلىش ئەھۋالى كۆرۈلىدۇ. ھەر كۈنلۈك توك ئىشلىتىشتىمۇ دەۋرلىك ئۆزگىرىش يۈز بېرىدۇ. ئېلېكتر تارماقلىرى ئاھالىلەرنىڭ توك ئىشلىتىشىگە كاپالەتلىك قىلىش ئۈچۈن «توكنى تەڭشەپ ئىشلىتىش»، يەنى كەچتە توك ئىشلىتىش يۇقىرى پەللىگە يەتكەن ۋاقىتتىكى توك باھاسىنى ئۆستۈرۈش، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، كېيىنكى يېرىم كېچىدىكى توك ئىشلىتىش مىقدارى تۆۋەنلىگەن ۋاقىتتىكى توك باھاسىنى تۆۋەنلىتىش ئۇسۇلىنى ئوتتۇرىغا قويۇپ، ھەرقايسى ئورۇنلارنى توك ئىشلىتىش مىقدارى تۆۋەنلىگەن ۋاقىتتا توك ئىشلىتىشكە ئىلھاملاندۇردى. ئۆز رايونىڭىزنىڭ كۈندىلىك توك ئىشلىتىش ئەھۋالىنى تەكشۈرۈپ، «توكنى تەڭشەپ ئىشلىتىش» تىن ئىبارەت توك باھاسىغا دائىر بىر لايىھىنى تۈزۈڭ.

B گۇرۇپپا

1. بېيجىڭ تيەنئەنمېن مەيدانىدىكى دۆلەت بايرىقى ھەر كۈنى كۈن چىققاندا قۇياشنىڭ كۆتۈرۈلۈشىگە ئەگىشىپ چىقىرىلىپ، كۈن پاتقاندا چۈشۈرۈلىدۇ. يىلنامە ياكى باشقا پايدىلىنىش ماتېرىياللىرىغا ئاساسەن، ئۆتكەن بىر يىلنىڭ ئوخشاش بولمىغان مەزگىلدىكى كۈن چىقىش ۋە كۈن پېتىش ۋاقتىنى ستاتىستىكا قىلىڭ.

(1) ئوخشاش بىر كوئوردىنات سىستېمىسىدا، چېسلانى ئابسىسسا ئوق قىلىپ تارقاق نۇقتىلار گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە ئەگرى سىزىقتىن پايدىلىنىپ بۇ سانلىق مەلۇماتلارنى تەڭشەڭ، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، فۇنكسىيە مودېلىنى تېپىڭ؛

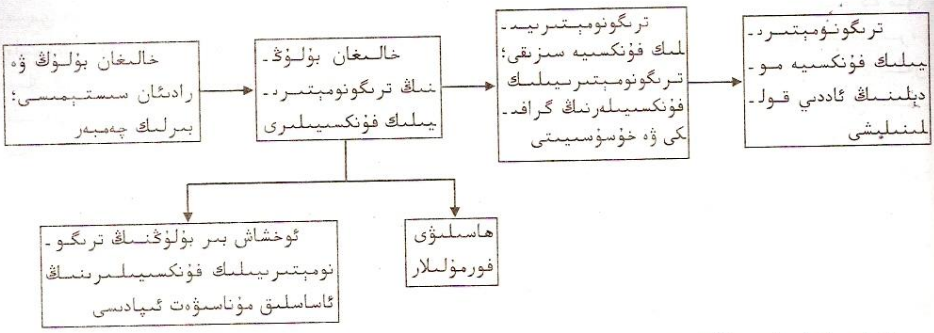
(2) مەلۇم بىر ساۋاقداش 1 - ماي دەم ئېلىش ۋاقتىدا بايراق چىقىرىشنى كۆرمەكچى بولدى، ئۇ سائەت قانچىدا تيەنئەنمېن مەيدانىغا بېرىپ بولۇشى كېرەك؟

2. مەلۇم شەھەر تۇرۇشلۇق جاينىڭ جۇغراپىيىلىك ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى كۈن چىقىش ۋە كۈن پېتىش ۋاقتىغا قانداق تەسىر كۆرسىتىدۇ؟ باشقا مۇناسىۋەتلىك سانلىق مەلۇماتلارنى توپلاپ ھەمدە نەزەرىيىۋى پاكىتلارنى كەلتۈرۈپ يەكۈنىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

1 - باب

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش بىلەن بىۋاسىتە مۇناسىۋەتلىك، كەڭ بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى بولسا خالىغان ئۈچبۇلۇڭنى يېشىش بىلەن بىۋاسىتە مۇناسىۋەتلىك. خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى گەرچە تار بۇلۇڭ، كەڭ بۇلۇڭلارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ كېڭەيتىلىشى بولسىمۇ، لېكىن ئۇنىڭ ئۈچبۇلۇڭلارنى يېشىش بىلەن ھېچقانداق مۇناسىۋىتى يوق، ئۇ ئەڭ ئاساسىي ۋە ئىپادىلەش كۈچى ئەڭ يۇقىرى بولغان بىر خىل دەۋرىي فۇنكسىيىدۇر.

2. خالىغان بۇلۇڭ بىلەن رادىئان سىستېمىسىنىڭ كىرگۈزۈلۈشى ئوخشاشلا ئىشلەپچىقىرىش ئەمەلىيىتى ۋە ماتېماتىكىنىڭ ئۆزىدىكى تەرەققىيات ئېھتىياجى بىلەن زىچ مۇناسىۋەتلىك. بۇ بابنى ئۆگىنىش جەريانىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، رادىئان سىستېمىسىنىڭ كىرگۈزۈلۈشى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنى تەتقىق قىلىشقا نۇرغۇن ئاسانلىقلارنى يارىتىپ بەردى. سىز رادىئان سىستېمىسىنىڭ پايدىلىق تەرەپلىرىنى يىغىنچاقلاپ بېرەلەمسىز؟

3. بىرلىك چەمبەر ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنى تەتقىق قىلىشتا ئىنتايىن مۇھىم رول ئوينايدۇ. ئۇ بىزنىڭ خالىغان بۇلۇڭ، رادىئان سىستېمىسى ۋە خالىغان بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى بىلەن تونۇشۇشىمىز، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ خۇسۇسىيىتىنى چۈشىنىشىمىز، ئوخشاش بىر بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ مۇناسىۋەت ئىپادىسى ۋە هاسىلىۋى فورمۇلىلارنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشىمىز، شۇنداقلا ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكىنى سىزىشىمىزدىكى مۇھىم قورالدۇر. سىز ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى ۋە ئۇنىڭغا دائىر فورمۇلىلارنى بىرلىك چەمبەردىن پايدىلىنىپ يىغىنچاقلىيالامسىز؟

ئۇنىڭدىن باشقا، سىنۇس، كوسىنۇس، تانگېنس قاتارلىق ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ نامى بىرلىك چەمبەردىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقلىرى بىلەن بىۋاسىتە مۇناسىۋەتلىك. سىز بۇ خىل مۇناسىۋەتنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

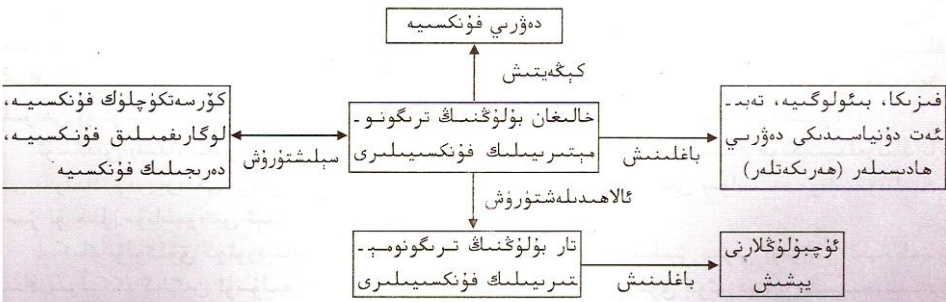
4. تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا بۇلۇڭنى مۇھاكىمە قىلىش بىزنى بۇلۇڭنى ئىپادىلەشنىڭ بىرلىككە كەلگەن ئۇسۇلىغا ئىگە قىلىپلا قالماي، يەنە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى بىرلىك چەمبەرنىڭ ياردىمىدە، بۇلۇڭنىڭ ئۆزگىرىشى بىلەن بىرلىك چەمبەر ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ

ئۆزگىرىشى ئارىسىدا ماس مۇناسىۋەت ئورنىتىپ، بۇ ئارقىلىق بىرلىك چەمبەر ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ ئوردىناتى ۋە ئابسىسساسىدىن پايدىلىنىپ مەركىزىي بۇلۇڭنىڭ سىنۇس فۇنكسىيىسى ۋە كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنى ئىپادىلەش ئىمكانىيىتىگە ئىگە قىلىدۇ. شۇڭا، سىنۇس فۇنكسىيىسى ۋە كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرى بىلەن چەمبەرنىڭ گېئومېتىرىيىلىك خۇسۇسىيىتى (مۇھىمى سىممېترىكلىكى) ئارىسىدا ئىنتايىن زىچ باغلىنىش مەۋجۇت. مەسىلەن، بىرلىك چەمبەرگە مۇناسىۋەتلىك «گوگۇ تېئورېمىسى» بىلەن ئوخشاش بىر بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرىنىڭ ئاساسلىق مۇناسىۋىتى ئىچكى بىردەكلىككە ئىگە. بىرلىك چەمبەرنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى 2π بىلەن سىنۇس فۇنكسىيىسى ۋە كوسىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ دەۋرى 2π بىردەك؛ چەمبەرنىڭ ھەر خىل سىممېترىكلىكى بىلەن ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ تاق - جۈپلۈكى، ھاسىلىۋى فورمۇلا قاتارلىقلارمۇ بىردەك بولىدۇ، ۋەھاكازالار. شۇڭا، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنى تەتقىق قىلىش جەريانى سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈش ئىدىيىسىنى ناھايىتى ياخشى گەۋدىلەندۈرۈپ بېرىدۇ.

5. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېر ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنى ئۆگىنىشتە مۇھىم رولىنى جارى قىلىدۇ، ئۇ بىزنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكىنى سىزىشىمىزغا ياردەم بېرىپلا قالماي، يەنە ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەھلىل قىلىشىمىزغىمۇ ياردەم بېرىدۇ. مەسىلەن، A، ω، φ لارنىڭ فۇنكسىيە $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ نىڭ گرافىكىغا بولغان تەسىرىنى تەھلىل قىلغاندا، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ رولى ناھايىتى چوڭ بولىدۇ. شۇڭا، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرگە دائىر مەسىلىلەرنى تەھلىل قىلغان ۋە ھەل قىلغاندا ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ ئارتۇقچىلىقىنى تولۇق جارى قىلدۇرۇش كېرەك.

6. بابنىڭ كىرىش سۆزىدە ئېيتىلغاندەك، رېئال ئىشلەپچىقىرىش ۋە تۇرمۇشتا، دەۋرىي ھادىسىلەر كەڭ دائىرىدە مەۋجۇت بولۇپ تۇرىدۇ. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەر دەل دەۋرىي ھادىسىلەرنى تەسۋىرلەيدىغان مۇھىم ماتېماتىكىلىق مودېلدۇر. سىز رېئال تۇرمۇشتىكى مەلۇم بىر خىل دەۋرىي ھادىسىگە قارىتا، مۇۋاپىق ئۇسۇل ئارقىلىق سانلىق مەلۇماتلارنى توپلاپ ھەمدە بۇ سانلىق مەلۇماتلاردىن پايدىلىنىپ، بۇ خىل دەۋرىي ھادىسىگە بىر فۇنكسىيىلىك مودېل تۇرغۇزالامسىز؟

7. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە بىر تۈرلۈك ئالاھىدە دەۋرىي فۇنكسىيە بولۇپ، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنى تەتقىق قىلغاندا، ھەم فىزىكا، بىئولوگىيە ۋە تەبىئەت دۇنياسىدىكى دەۋرىي ھادىسىلەر (ھەرىكەتلەر) گە بىرلەشتۈرسەك، ھەم ئۆگەنگەن كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە، دەرىجىلىك فۇنكسىيە قاتارلىقلاردىن پايدىلانساق بولىدۇ، بۇنىڭدا يەنە تار بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلىرى بىلەن مۇناسىۋەت ئورنىتىشقىمۇ ئەھمىيەت بېرىش كېرەك. بۇ خىل مۇناسىۋەتنى تۆۋەندىكى رامكىلىق سخېما ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:



تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. ئاخىرقى تەرىپى تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلارنىڭ توپلىمى S نى يېزىڭ ھەمدە S تىكى تەڭسىزلىك $-2\pi \leqslant \beta < 4\pi$ غا ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېلېمېنت β نى يېزىڭ:

(1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $-\frac{2}{3}\pi$; (3) $\frac{12}{5}\pi$; (4) 0.

2. رادىئۇسى 15 cm بولغان چەمبەردىكى بىر سېكتورنىڭ يايى $54°$ نى ئۆز ئىچىگە ئالغان بولسا، بۇ سېكتورنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى بىلەن يۈزىنى تېپىڭ (π ئۈچۈن 3.14 ئېلىنسۇن، نەتىجىنى ئىككى ئونلۇق رەقەمگىچە ئېلىڭ).

3. تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ ئالامىتىنى ئېنىقلاڭ:

(1) $\sin 4$; (2) $\cos 5$; (3) $\tan 8$; (4) $\tan(-3)$.

4. $\cos\varphi = \frac{1}{4}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\varphi$، $\tan\varphi$ لارنى تېپىڭ.

5. $\sin x = 2\cos x$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، x بۇلۇڭنىڭ ئۈچ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى تېپىڭ.

6. $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ نى $\cos\alpha$ ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.

7. ئىسپاتلاڭ:

(1) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha) = (1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;

(2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta = 1$.

8. $\tan\alpha = 3$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ھېسابلاڭ:

(1) $\frac{4\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha + 3\sin\alpha}$; (2) $\sin\alpha\cos\alpha$; (3) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

9. ئالدى بىلەن نەتىجىنىڭ ئالامىتىنى مۆلچەرلەپ، ئاندىن ھېسابلاڭ:

(1) $\sin\frac{25}{6}\pi + \cos\frac{25}{3}\pi + \tan\left(-\frac{25}{4}\pi\right)$;

(2) $\sin 2 + \cos 3 + \tan 4$ (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ).

10. $\sin(\pi+\alpha) = -\frac{1}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ھېسابلاڭ:

(1) $\cos(2\pi-\alpha)$; (2) $\tan(\alpha-7\pi)$.

11. ئالدى بىلەن چوڭ - كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇپ، ئاندىن ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\sin 378°21'$, $\tan 1\,111°$, $\cos 642.5°$;

(2) $\sin(-879°)$, $\tan\left(-\frac{33\pi}{8}\right)$, $\cos\left(-\frac{13}{10}\pi\right)$;

(3) $\sin 3$, $\cos(\sin 2)$.

12. $\pi < x < 2\pi$ دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكى جەدۋەلنى تولدۇرۇڭ:

x	$\frac{7\pi}{6}$				$\frac{7\pi}{4}$	
$\sin x$				-1		
$\cos x$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$			$\sqrt{3}$			

13. تۆۋەندىكى ئىپادىلەر كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

(1) $\cos^2 x = 1.5$; (2) $\sin^3 x = -\frac{\pi}{4}$.

14. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ ھەمدە فۇنكسىيىنى ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ توپلىمىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sqrt{2}+\frac{\sin x}{\pi}$, $x \in \mathbf{R}$; (2) $y=3-2\cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

15. $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان x بولۇشنىڭ توپلىمىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sin x$ بىلەن $y=\cos x$ نىڭ ھەر ئىككىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيە؛

(2) $y=\sin x$ بىلەن $y=\cos x$ نىڭ ھەر ئىككىسى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە؛

(3) $y=\sin x$ ئاشقۇچى فۇنكسىيە، $y=\cos x$ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە؛

(4) $y=\sin x$ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە، $y=\cos x$ ئاشقۇچى فۇنكسىيە.

16. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئۆزۈنلۈكى بىر دەۋر بولغان يېپىق ئىنتېرۋالدىكى ئاددىي گرافىكىنى سىزىڭ:

(1) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$; (2) $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$;

(3) $y=1-\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$, $x \in \mathbf{R}$; (4) $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

17. (1) فۇنكسىيە $y=\sin x$، $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ نىڭ گرافىكىنى نۇقتا تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ سىزىڭ.

(2) (1) كىچىك مەسىلىگە ئاساسەن ھەمدە سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى قوللىنىپ فۇنكسىيە $y=\sin x$، $x \in [0, 2\pi]$ نىڭ گرافىكىنى قانداق كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ؟

(3) (2) كىچىك مەسىلىگە ئاساسەن ھەمدە كوئوردىنات ئوقلىرىنى پاراللېل يۆتكەش ئارقىلىق، فۇنكسىيە $y=\sin(x+\varphi)+k$، $x \in [0, 2\pi]$ نىڭ گرافىكىنى قانداق كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ؟ (بۇنىڭدىكى φ، k لار تۇراقلىق سان)

18. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئامپلىتۇدىسى، دەۋرى ۋە دەسلەپكى فازىسىنى گرافىك سىزماي يېزىڭ ھەمدە سىنۇس ئەگرى سىزىقىدىن ئۆلارنىڭ گرافىكىغا قانداق ئېرىشكىلى بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) $y=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbf{R}$; (2) $y=2\sin\frac{1}{6}x$, $x \in \mathbf{R}$.

B گۇرۇپپا

1. α نىڭ تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى بۇلۇڭلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى تۇرغان ئورۇننى ئېنىقلاڭ:

(1) $\frac{\alpha}{2}$; (2) $\frac{\alpha}{3}$; (3) 2α.

2. بىر سېكتورنىڭ ياي ئۇزۇنلۇقى بىلەن يۈزىنىڭ سانلىق قىممىتى ئوخشاشلا 5 بولسا، بۇ سېكتورنىڭ مەركىزىي بۇلۇڭىنىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ.

3. α نىڭ ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىنى ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

$$\cos\alpha\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

4. $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ھېسابلاڭ:

(1) $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\cos\alpha-\sin\alpha}$; (2) $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$.

5. $\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$ نى ئىسپاتلاڭ.

6. $x\cos\theta=a$، $\frac{y}{\tan\theta}=b$ $(a\neq0$، $b\neq0)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نى ئىسپاتلاڭ.

7. $\tan\theta+\sin\theta=a$، $\tan\theta-\sin\theta=b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $(a^2-b^2)^2=16ab$ نى ئىسپاتلاڭ.

8. (1) فۇنكسىيە $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$، $x\in\mathbf{R}$ قايسى ئىنتېرۋالدا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ؟

(2) فۇنكسىيە $y=\sin\left(-3x+\frac{\pi}{4}\right)$، $x\in\mathbf{R}$ قايسى ئىنتېرۋالدا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ؟

9. (1) كوئوردىنات بېشىنى چەمبەر مەركىزى، r نى رادىئۇس قىلغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى $x^2+y^2=r^2$ ئىكەنلىكى بىزگە مەلۇم. ئۇنداقتا

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}$$

قانداق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ؟ (بۇنىڭدىكى r تۇراقلىق سان، θ بولسا $[0, 2\pi)$ ئىچىدە ئۆزگىرىدۇ)

(2) تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا،

$$\begin{cases}x=a+r\cos\theta,\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$$

قانداق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ؟ (بۇنىڭدىكى a، b، r لار تۇراقلىق سان ھەمدە r مۇسبەت سان، θ بولسا $[0, 2\pi)$ ئىچىدە ئۆزگىرىدۇ).

2 ـ باب

تەكشىلىكتىكى ۋېكتور

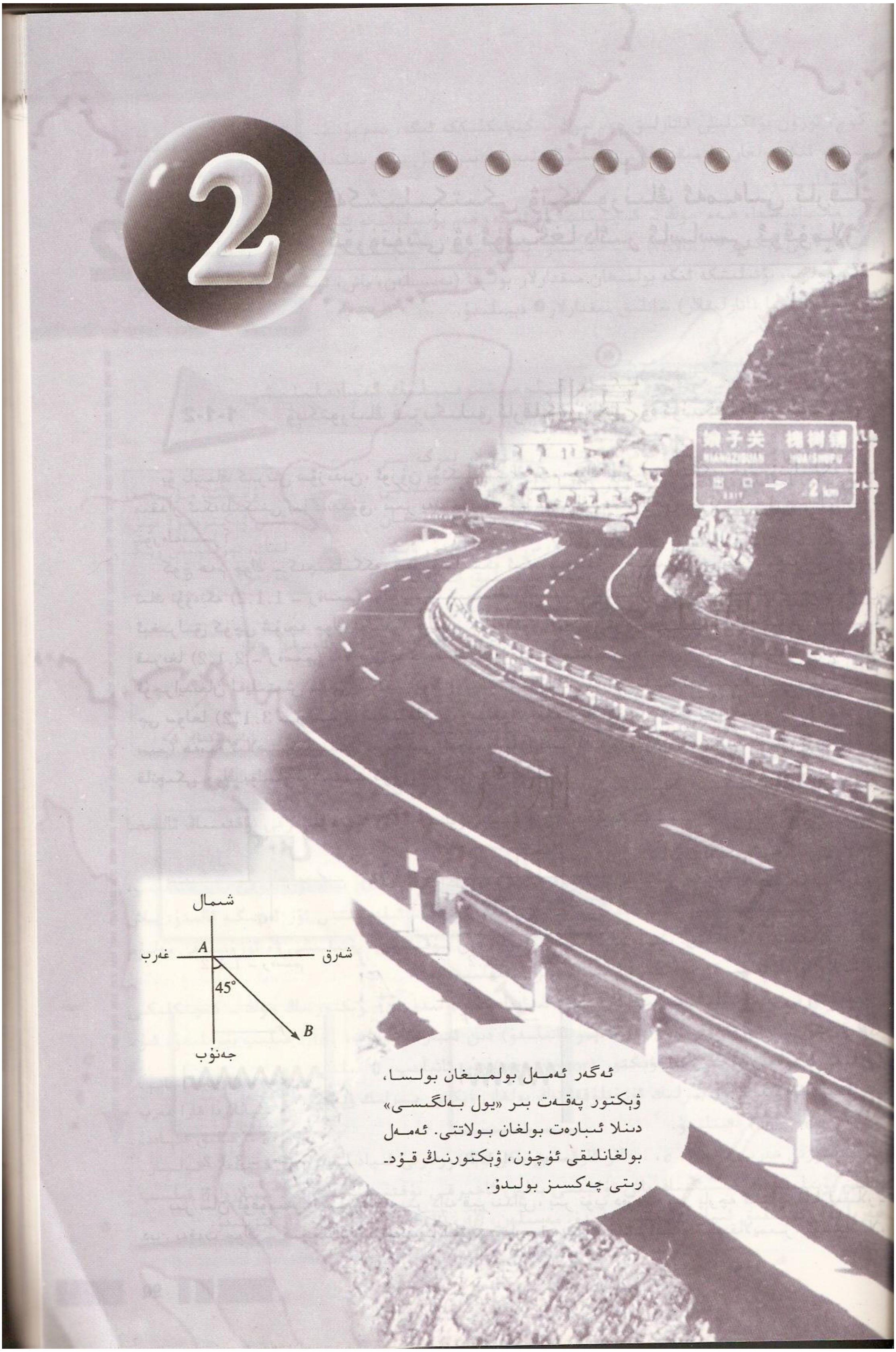
ئورۇن گېئومېتىرىيىدە تەتقىق قىلىنىدىغان مۇھىم مەزمۇنلارنىڭ بىرى، ئادەتتە، گېئومېتىرىيىدە نۇقتا ئارقىلىق ئورۇن ئىپادىلىنىدۇ، بىر نۇقتىنىڭ ئورنىغا ئاساسەن يەنە بىر نۇقتىنىڭ ئورنىنى قانداق ئېنىقلاش مۇھاكىمە قىلىنىدۇ.

سولدىكى رەسىمدىكىدەك، A نۇقتىغا ئاساسەن B نۇقتىنىڭ ئورنى قانداق ئېنىقلىنىدۇ؟

كۆپ قوللىنىلىدىغان بىر خىل ئۇسۇل — A نۇقتىنى پايدىلىنىش نۇقتىسى قىلىپ، B نۇقتا بىلەن A نۇقتا ئارىسىدىكى يۆنىلىش ۋە ئارىلىق ئارقىلىق B نۇقتىنىڭ ئورنىنى ئېنىقلاش. مەسىلەن، B نۇقتا A نۇقتىنىڭ جەنۇبىدىن شەرققە $45°$ ئاغقان يۆنىلىشتىكى 30 كىلومېتىر كېلىدىغان ئورۇندا. شۇنداق قىلىپ، بىز A نۇقتا بىلەن B نۇقتا ئارىسىدىكى يۆنىلىشلىك كېسىك AB ئارقىلىق B نۇقتىنىڭ A نۇقتىغا بولغان نىسبىي ئورنىنى بەلگىلىۋالدۇق. يۆنىلىشلىك كېسىك AB دەل A نۇقتا بىلەن B نۇقتا ئارىسىدىكى ئورۇن يۆتكىلىشتۇر. ئورۇن يۆتكىلىش ئورۇنلار ئارىسىدىكى نىسبىي مۇناسىۋەتنى ئاددىي ۋە ئېنىق ئىپادىلەپ بېرىدۇ. ئورۇن يۆتكىلىشكە ئوخشاش ھەم چوڭ ـ كىچىكلىككە ئىگە، ھەم يۆنىلىشكە ئىگە بۇ خىل مىقدارنى ئابستىراكتلىساق دەل بىز مۇشۇ بابتا تەتقىق قىلىدىغان ۋېكتور بولىدۇ.

ۋېكتور يېقىنقى زامان ماتېماتىكىسىدىكى مۇھىم ۋە ئاساسلىق ئۇقۇملارنىڭ بىرى، ئۇ چوڭقۇر گېئومېتىرىيىلىك ئارقا كۆرۈنۈشكە ئىگە بولۇپ، گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتىكى كۈچلۈك قورال. ۋېكتور ئۇقۇمى كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن، تەپمۇ ـ تەڭلىك ۋە پاراللېللىق (پاراللېل يۆتكەش)، ئوخشاشلىق، تىكلىك، گوگۇ تېئورېمىسى قاتارلىقلارنى ۋېكتورلارنى قوشۇش (ئېلىش)، سانلارنى ۋېكتورغا كۆپەيتىش، سكالىيار كۆپەيتمىگە دائىر ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) قاتارلىقلارغا ئايلاندۇرۇپ، بۇ ئارقىلىق شەكىللەرنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرىنى ۋېكتورلارنىڭ ئەمەللەر سىستېمىسىغا ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ.

ۋېكتور ئالگېبرا، گېئومېتىرىيە ۋە ترىگونومېتىرىيىلىك فونكسىيىلەرنى تۇتاشتۇرىدىغان بىر خىل قورال، ئۇ ناھايىتى مول ئارقا كۆرۈنۈشكە ئىگە بولۇپ، ماتېماتىكا ۋە فىزىكىدا كەڭ دائىرىدە قوللىنىلىدۇ.



ئەگەر ئەمەل بولمىغان بولسا، ۋېكتور پەقەت بىر «يول بەلگىسى» دىنلا ئىبارەت بولغان بولاتتى. ئەمەل بولغانلىقى ئۈچۈن، ۋېكتورنىڭ قۇد-رىتى چەكسىز بولىدۇ.

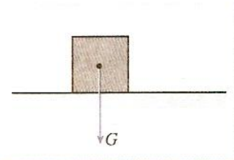
1-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنىڭ ئەمەلىي ئارقا كۆرۈنۈشى ۋە ئۇنىڭغا دائىر ئاساسىي ئۇقۇملار

1-1-2 ۋېكتورنىڭ فىزىكىلىق ئارقا كۆرۈنۈشى ۋە ئۇنىڭغا دائىر ئۇقۇملار

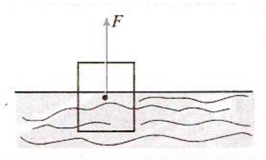
بۇ بابنىڭ كىرىش سۆزىدىن، ئورۇن يۆتكىلىشنىڭ ھەم چوڭ ـ كىچىكلىككە، ھەم يۆنىلىشكە ئىگە مىقدار ئىكەنلىكىنى بىلگەندۇق. سىز يەنە مۇشۇنىڭغا ئوخشاش مىقداردىن بىرنەچچىنى مىسال كەلتۈرەلەمسىز؟

كۈچ ھەم چوڭ ـ كىچىكلىككە، ھەم يۆنىلىشكە ئىگە. مەسىلەن، جىسىم ئۇچرىغان ئېغىرلىق كۈچى تىك تۆۋەنگە (1.1.2 ـ رەسىم) بولۇپ، جىسىمنىڭ ماسسىسى قانچىكى چوڭ بولسا، ئۇ ئۇچرايدىغان ئېغىرلىق كۈچى شۇنچە چوڭ بولىدۇ؛ جىسىم سۇيۇقلۇق ئىچىدە ئۇچرىغان لەيلىتىش كۈچى تىك يۇقىرىغا (2.1.2 ـ رەسىم) بولۇپ، جىسىمنىڭ سۇيۇقلۇققا چىلانغان ھەجمى قانچىكى چوڭ بولسا، ئۇ ئۇچرايدىغان لەيلىتىش كۈچى شۇنچە چوڭ بولىدۇ؛ سوزۇلغان پۇرژىنىنىڭ ئېلاستىك (سوزۇلۇش) كۈچى سولغا (3.1.2 ـ رەسىم)، قىسىلغان پۇرژىنىنىڭ ئېلاستىك كۈچى ئوڭغا يۆنىلىدۇ (4.1.2 ـ رەسىم) ھەمدە ئېلاستىكىلىقلىق دەرىجىسى ئىچىدە، پۇرژىنىنىڭ سوزۇلۇش ياكى قىسىلىش ئۇزۇنلۇقى قانچىكى چوڭ بولسا، ئېلاستىك كۈچى شۇنچە چوڭ بولىدۇ.

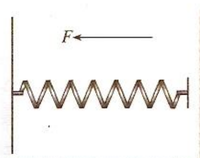
سىز يەنە فىزىكىدىكى كۈچكە دائىر بەزى ئەمەلىي مىساللارنى كەلتۈرەلەمسىز؟



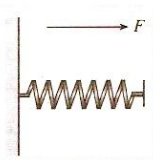
1.1.2 ـ رەسىم



2.1.2 ـ رەسىم



3.1.2 ـ رەسىم



4.1.2 ـ رەسىم

بىز سان ئۇقۇمىنى ئەسلىسەك، بىر دانە قېرىنداش، بىر تۇپ دەرەخ، بىر پارچە كىتاب قاتارلىقلاردىن پەقەت چوڭ ـ كىچىكلىككە ئىگە سانلىق مىقدار «1» نى ئابستىراكتلاپ چىقالايمىز. ئوخشاشلا،

2 ـ باب

كۈچ، ئورۇن يۆتكىلىش قاتارلىق ھەم چوڭ ـ كىچىكلىككە ئىگە، ھەم يۆنىلىشكە ئىگە بولغان بۇ مىقدارلارنى ئابستراكتلىساق، بىر خىل يېڭى مىقدار شەكىللىنىدۇ.

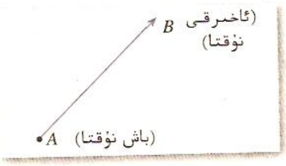
ماتېماتىكىدا، ھەم چوڭ ـ كىچىكلىككە ئىگە، ھەم يۆنىلىشكە ئىگە مىقدارلارنى **ۋېكتور**❶ (vector) دەپ ئاتايمىز. پەقەت چوڭ ـ كىچىكلىككە ئىگە بولۇپ، يۆنىلىشكە ئىگە بولمىغان مىقدارلار بولسا (مەسىلەن، ياش، ئېگىزلىك، ئۇزۇنلۇق، يۈز، ھەجىم، ماسسا قاتارلىقلار) سانلىق مىقدارلار❷ دېيىلىدۇ.

❶ فىزىكىدا ئادەتتە ۋېكتور دېيىلىدۇ؛
❷ فىزىكىدا ئادەتتە سكالىيار دېيىلىدۇ.

2-1-2 ۋېكتورلارنىڭ گېئومېترىيىلىك ئىپادىلىنىشى

ھەقىقىي سان بىلەن سان ئوقى ئۈستىدىكى نۇقتىلار بىرگە بىر ماس بولغانلىقتىن، سانلىق مىقدارلار دائىم سان ئوقى ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، ھالبۇكى ئوخشاش بولمىغان نۇقتىلار ئوخشاش بولمىغان سانلىق مىقدارلارنى ئىپادىلەيدۇ. ۋېكتورنى كۆپ ھاللاردا ئىسترېلكىلىق كېسىك ئارقىلىق ئىپادىلەيمىز، كېسىك بەلگىلىك نىسبەت (شكالا) بويىچە سىزىلىدۇ، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋېكتورنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى، ئىسترېلكا كۆرسەتكەن يۆنىلىش ۋېكتورنىڭ يۆنىلىشىنى ئىپادىلەيدۇ.

ۋاقىت، مۇساپە، ئىش ۋېكتورمۇ؟ تېزلىك، تېزلىنىش ۋېكتورمۇ؟



5.1.2 ـ رەسىم

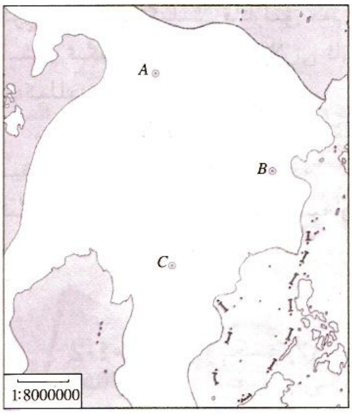
بىزگە مەلۇمكى، يۆنىلىشكە ئىگە بولغان كېسىك **يۆنىلىشلىك كېسىك** دەپ ئاتىلىدۇ. 5.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ ئاخىرقى نۇقتىسى تۇرغان ئورۇنغا ئىسترېلكا سىزىش ئارقىلىق ئۇنىڭ يۆنىلىشىنى ئىپادىلەيمىز. A نى باش نۇقتا، B نى ئاخىرقى نۇقتا قىلغان يۆنىلىشلىك كېسىك $\overrightarrow{AB}$ قىلىپ يېزىلىدۇ، باش نۇقتا ئاخىرقى نۇقتىنىڭ ئالدىغا يېزىلىدۇ.

$\overrightarrow{AB}$ بېرىلگەندە، AB كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقى يۆنىلىشلىك كېسىك $\overrightarrow{AB}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقى دەپ ئاتىلىپ، $|\overrightarrow{AB}|$ قىلىپ يېزىلىدۇ. يۆنىلىشلىك كېسىك مۇنداق ئۈچ مۇھىم ئېلېمېنتنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ: **باش نۇقتا، يۆنىلىش، ئۇزۇنلۇق**. يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ باش نۇقتىسى، يۆنىلىشى ۋە ئۇزۇنلۇقى مەلۇم بولسىلا، ئۇنىڭ ئاخىرقى نۇقتىسىمۇ بىردىنبىر ئېنىقلىنىدۇ.

ۋېكتورنى يۆنىلىشلىك كېسىك ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ. $\overrightarrow{AB}$ ۋېكتورنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى $\overrightarrow{AB}$ ۋېكتورنىڭ **ئۇزۇنلۇقى** (**مودېلى** دەپمۇ ئاتىلىدۇ) دىن ئىبارەت بولۇپ، $|\overrightarrow{AB}|$ قىلىپ يېزىلىدۇ. ئۇزۇنلۇقى 0 بولغان ۋېكتور **نۆل ۋېكتور** (zero vector) دەپ ئاتىلىپ، **0** قىلىپ يېزىلىدۇ. ئۇزۇنلۇقى 1 بىرلىك ئۇزۇنلۇققا تەڭ بولغان ۋېكتور **بىرلىك ۋېكتور** (unit vector) دېيىلىدۇ.

ۋېكتورنى ھەرپ $\boldsymbol{a}$❸، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$، … لار ئارقىلىق ياكى ۋېكتورلارنى ئىپادىلەيدىغان يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ باش نۇقتىسى بىلەن ئاخىرقى نۇقتىسىنىڭ ھەرپلىرى ئارقىلىق ئىپادىلەشكىمۇ بولىدۇ. مەسىلەن، $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$.

❸ باسما ماتېرىياللاردا قارا ھەرپ $\boldsymbol{a}$ ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، قوليازمىلاردا $\vec{a}$ قىلىپ يېزىلىدۇ.



6.1.2 ـ رەسىم

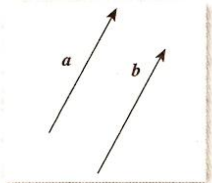
1 ـ مىسال. 6.1.2 ـ رەسىمدىكى ماسشتابقا ۋە ئۈچ جاينىڭ ئورنىغا ئاساسەن، رەسىمدە ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا A جايدىن B، C ئىككى جايغىچە بولغان ئورۇن يۆتكىلىشنى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەپ باقايلى ھەمدە A جايدىن B، C ئىككى جايغىچە بولغان ئەمەلىي ئارىلىقنى تاپايلى (1 km غىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش: $\overrightarrow{AB}$ بولسا A جايدىن B جايغىچە بولغان ئورۇن يۆتكىلىشنى ئىپادىلەيدۇ ھەمدە

$|\overrightarrow{AB}|\approx$ ________;

$\overrightarrow{AC}$ بولسا A جايدىن C جايغىچە بولغان ئورۇن يۆتكىلىشنى ئىپادىلەيدۇ ھەمدە

$|\overrightarrow{AC}|\approx$ ________.

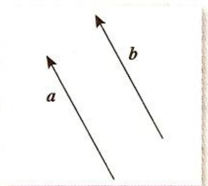


7.1.2 ـ رەسىم

يۆنىلىشلىرى ئوخشاش ياكى قارىمۇقارشى بولغان نۆل بولمىغان ۋېكتورلار **پاراللېل ۋېكتورلار** (parallel vectors) دېيىلىدۇ. 7.1.2 ـ رەسىمدىكى دەل يۆنىلىشلىك كېسىك ئارقىلىق ئىپادىلەنگەن ئىككى پاراللېل ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ دىن ئىبارەت. $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلارنىڭ پاراللېل بولۇشى ئادەتتە $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

بىز مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز: نۆل ۋېكتور ھەرقانداق بىر ۋېكتورغا پاراللېل بولىدۇ، يەنى خالىغان $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورغا نىسبەتەن ھامان $\boldsymbol{0} \parallel \boldsymbol{a}$ بولىدۇ.

3-1-2 تەڭ ۋېكتورلار ۋە سىزىقداش ۋېكتورلار

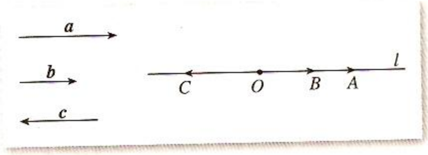


8.1.2 ـ رەسىم

ئۇزۇنلۇقلىرى ئۆزئارا تەڭ ھەمدە يۆنىلىشلىرى ئوخشاش بولغان ۋېكتورلار **تەڭ ۋېكتورلار** (equal vector) دېيىلىدۇ. 8.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، يۆنىلىشلىك كېسىك ئارقىلىق ئىپادىلەنگەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ ئۆزئارا تەڭ بولۇپ، ئۇ، $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ قىلىپ يېزىلىدۇ. نۆل بولمىغان ئۆزئارا تەڭ خالىغان ئىككى ۋېكتورنى ئوخشاش بىر يۆنىلىشلىك كېسىك ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ ھەمدە بۇ خىل ئىپادىلەش يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ باش نۇقتىسى بىلەن مۇناسىۋەتسىز بولىدۇ. تەكشىلىكتە، ئۇزۇنلۇقى ئۆزئارا تەڭ ھەمدە كۆرسەتكەن يۆنىلىشى بىردەك بولغان ئىككى يۆنىلىشلىك كېسىك ئوخشاش بىر ۋېكتورنى ئىپادىلەيدۇ. چۈنكى ۋېكتور پۈتۈنلەي ئۇنىڭ يۆنىلىشى بىلەن مودۇلى تەرىپىدىن ئېنىقلىنىدۇ.

9.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لار بىر گۇرۇپپا پاراللېل ۋېكتورلار بولۇپ، $\boldsymbol{a}$ ياتقان تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان خالىغان بىر l تۈز سىزىقنى سىزىپ، l ئۈستىدىن خالىغان بىر O نۇقتىنى ئالساق، ئۇ ھالدا l ئۈستىدە ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ لارنى يۇرگۈزۈشكە بولىدۇ. دېمەك، ھەرقانداق بىر گۇرۇپپا پاراللېل ۋېكتورلارنى ھامان ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىگە يۆتكەشكە بولىدۇ، شۇڭلاشقا پاراللېل ۋېكتورلار **سىزىقداش ۋېكتورلار** (collinear vectors) دەپمۇ ئاتىلىدۇ.

2 ـ باب



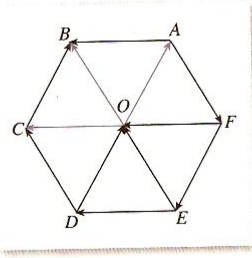
9.1.2 ـ رەسىم

ۋېكتور $\overrightarrow{OA}$ بىلەن $\overrightarrow{EF}$ ئۆزئارا تەڭمۇ؟ ۋېكتور $\overrightarrow{OB}$ بىلەن $\overrightarrow{AF}$ ئۆزئارا تەڭمۇ؟

2 ـ مىسال. 10.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، O نى مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك $ABCDEF$ نىڭ مەركىزى دەپ پەرەز قىلىپ، ئايرىم ـ ئايرىم هالدا رەسىمدىكى $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ لارغا تەڭ بولغان ۋېكتورلارنى يازايلى.

يېشىش:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DO};$$
$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EO};$$
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{FO}.$$

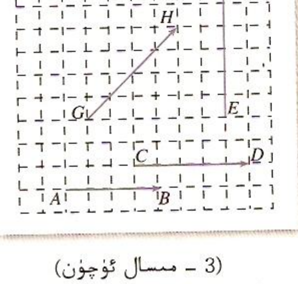


10.1.2 ـ رەسىم

مەشىق

1. يۆنىلىشلىك كېسىكلەرنى سىزىش ئارقىلىق، ئايرىم ـ ئايرىم هالدا تىك يۇقىرىغا يۆنەلگەن، چوڭ ـ كىچىكلىكى 18 N بولغان بىر كۈچ بىلەن گورىزونتال سولغا يۆنەلگەن، چوڭ ـ كىچىكلىكى 28 N بولغان بىر كۈچنى ئىپادىلەڭ (1 cm ئۇزۇنلۇق ئارقىلىق 10 N نى ئىپادىلەڭ).

2. نۆل بولمىغان ۋېكتور $\overrightarrow{AB}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقى قانداق ئىپادىلىنىدۇ؟ نۆل بولمىغان ۋېكتور $\overrightarrow{BA}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقى قانداق ئىپادىلىنىدۇ؟ بۇ ئىككى ۋېكتورنىڭ ئۇزۇنلۇقلىرى ئۆزئارا تەڭمۇ؟ بۇ ئىككى ۋېكتور ئۆزئارا تەڭمۇ؟



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكى هەربىر ۋېكتورنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى كۆرسىتىڭ.

4. (1) ئۆزئارا تەڭ بولغان ئىككى ۋېكتورنى يۆنىلىشلىك كېسىك ئارقىلىق ئىپادىلىگەندە، ئەگەر يۆنىلىشلىك كېسىكلەرنىڭ باش نۇقتىلىرى ئوخشاش بولسا، ئۇ هالدا ئۇلارنىڭ ئاخىرقى نۇقتىلىرى ئوخشاش بولامدۇ؟

(2) يۆنىلىشى ئوخشاش، ئەمما ئۇزۇنلۇقى ئوخشاش بولمىغان ئىككى ۋېكتورنى يۆنىلىشلىك كېسىك ئارقىلىق ئىپادىلىگەندە، ئەگەر يۆنىلىشلىك كېسىكلەرنىڭ باش نۇقتىلىرى ئوخشاش بولسا، ئۇ هالدا ئۇلارنىڭ ئاخىرقى نۇقتىلىرى ئوخشاش بولامدۇ؟

1.2 - كۆنۈكمە

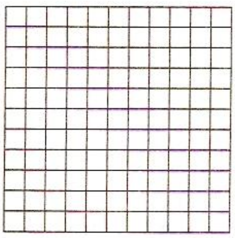
A گۇرۇپپا

1. تۈز سىزغۇچ ۋە سىركۇلدىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندىكى ۋېكتورلارنى رەسىمدە كۆرسىتىلگەن كوئوردىنات قەغىزىگە سىزىڭ:

(1) $|\overrightarrow{OA}|=4$، A نۇقتا O نۇقتىنىڭ دەل جەنۇب يۆنىلىشىدە؛

(2) $|\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{2}$، B نۇقتا O نۇقتىنىڭ شىمالىدىن غەربكە $45°$ ئاغقان يۆنىلىشىدە؛

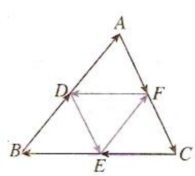
(3) $|\overrightarrow{OC}|=2$، C نۇقتا O نۇقتىنىڭ جەنۇبىدىن غەربكە $30°$ ئاغقان يۆنىلىشىدە.



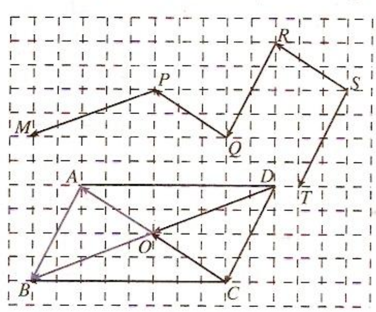
(1 - مىسال ئۈچۈن)

2. بىر ئادەم A جايدىن شەرققە 500 مېتىر مېڭىپ B جايغا بارغان، ئاندىن شىمالدىن شەرققە $60°$ ئاغقان يۆنىلىشتە 300 مېتىر مېڭىپ C جايغا يېتىپ بارغان. ئاندىن يەنە شىمالدىن شەرققە $45°$ ئاغقان يۆنىلىشتە 100 مېتىر مېڭىپ D جايغا يېتىپ بارغان. مۇۋاپىق ماسشتابنى تاللاپ، بۇ ئادەمنىڭ ئورۇن يۆتكىلىشىنى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.

3. رەسىمدىكىدەك، D، E، F لار ئايرىم - ئايرىم ھالدا $\triangle ABC$ نىڭ ھەرقايسى تەرەپلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، رەسىمدىكى $\overrightarrow{DE}$، $\overrightarrow{EF}$، $\overrightarrow{FD}$ لارغا تەڭ بولغان ۋېكتورلارنى يېزىڭ.



(3 - مىسال ئۈچۈن)



(4 - مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىدەك، چاقماق قەغەزدىكى $\square ABCD$ بىلەن سۇنۇق سىزىق $MPQRST$ دا، O نۇقتا $\square ABCD$ نىڭ دىئاگوناللىرىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى ھەمدە $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$ بولسا، ئايرىم - ئايرىم ھالدا رەسىمدىكى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لارغا تەڭ بولغان ۋېكتورلارنى يېزىڭ.

5. تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 3 بولغان تەڭ تەرەپلىك ئۇچبۇلۇڭ ABC بېرىلگەن بولسا، BC تەرەپ ئوتتۇرىسىدىكى مېدىئانا ۋېكتورى $\overrightarrow{AD}$ نىڭ مودۇلى $|\overrightarrow{AD}|$ نى تېپىڭ.

6. تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ (توغرا بولسا تىرناق ئىچىگە«$\checkmark$»نى، خاتا بولسا «$\times$» نى قويۇڭ) ھەممە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

(1) ئەگەر $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار بىرلىك ۋېكتور بولسا، ئۇ ھالدا $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ بولىدۇ. ( )

(2) فىزىكىدىكى تەسىر قىلغۇچى كۈچ بىلەن ئەكس تەسىر قىلغۇچى كۈچ بىر جۈپ سىزىقداش ۋېكتورلاردۇر. ( )

(3) يۆنىلىشى جەنۇبتىن غەربكە 60° ئاغقان ۋېكتور بىلەن شىمالدىن شەرققە 60° ئاغقان ۋېكتور سىزىقداش ۋېكتورلاردۇر. ( )

(4) تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات تەكشىلىكىدىكى x ئوق، y ئوقلار ۋېكتور بولىدۇ. ( )

B گۇرۇپپا

1. بىر ئادەم دېڭىز تەكشىلىكىدىن يۇقىرى بولغان ئېگىزلىك (دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكى) مۇسبەت سان بىلەن، دېڭىز تەكشىلىكىدىن تۆۋەن بولغان ئېگىزلىك مەنپىي سان بىلەن ئىپادىلىنىدۇ، شۇڭا دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكمۇ ۋېكتور بولىدۇ دېگەن. سىز ئۇنىڭ قارىشىغا قوشۇلامسىز؟ تېمپېراتۇرا، بۇلۇڭ گرادۇسى ۋېكتور بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

2. تىك تۆتبۇلۇڭ $ABCD$ دا، $AB=2BC$، M، N لار ئايرىم ـ ئايرىم AB ۋە CD نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، A، B، C، D، M، N لارنى باش نۇقتا ۋە ئاخىرقى نۇقتا قىلغان بارلىق ۋېكتورلارنىڭ ئىچىدە، ئۆزئارا تەڭ ھەمدە نۆل بولمىغان ۋېكتورلاردىن جەمئىي قانچە جۈپ بار؟

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

ۋېكتور ۋە ۋېكتور بەلگىسىنىڭ كېلىپ چىقىشى

ۋېكتور ئەڭ دەسلەپ فىزىكىدا قوللىنىلغان. نۇرغۇن فىزىكىلىق مىقدارلار، مەسىلەن، تېزلىك، ئورۇن يۆتكىلىش، ئېلېكتر مەيدانى كۈچىنىشلىكى، ئېلېكتر ماگنىت ئىندۇكسىيىسىنىڭ كۈچىنىشى قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسى ۋېكتوردۇر. تەخمىنەن مىلادىيىدىن ئىلگىرىكى 350 - يىلى قەدىمكى يۇنانلىق مەشھۇر ئالىم ئارىستوتېل (Aristotle، مىلادىيىدىن ئىلگىرىكى 384 — 322 - يىللىغىچە) كۈچنى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقىنى بىلگەن. «ۋېكتور» دېگەن سۆز مېخانىكا، ئانالىتىك گېئومېتىرىيىدىكى يۆنىلىشلىك كېسىكتىن كەلگەن. يۆنىلىشلىك كېسىك ئارقىلىق ۋېكتورنى ئىپادىلەشنى ئەڭ بۇرۇن ئەنگلىيىلىك ئۇلۇغ ئالىم نيۇتون (Newton، 1642 — 1727 - يىللىغىچە) قوللانغان.

ۋېكتور گېئومېتىرىيىلىك خۇسۇسىيەتكە ئىگە بىر خىل مىقدار بولۇپ، نۆل ۋېكتوردىن باشقا، ۋېكتورنى ھامان ئىستىرېلكا ئارقىلىق يۆنىلىشى، كېسىك ئۇزۇنلۇقى ئارقىلىق چوڭ - كىچىكلىكى ئىپادىلەنگەن يۆنىلىشلىك كېسىك سىزىپ ئىپادىلەشكە بولىدۇ. 1806 - يىلى، شۋېيتسارىيىلىك ئارگان (R.Argand، 1768 — 1822 - يىللىغىچە) $\overrightarrow{AB}$ ئارقىلىق بىر يۆنىلىشلىك كېسىك ياكى ۋېكتورنى ئىپادىلىگەن. 1827 - يىلى، موبىئۇس (Möbius، 1790 — 1868 - يىللىغىچە) $\overrightarrow{AB}$ ئارقىلىق باش نۇقتىسى A، ئاخىرقى نۇقتىسى B بولغان ۋېكتورنى ئىپادىلىگەن بولۇپ، بۇ خىل ئۇسۇل ماتېماتىكلار تەرىپىدىن كەڭ دائىرىدە قوبۇل قىلىنغان. بۇنىڭدىن باشقا، خامىلتون (W.R.Hamilton، 1805 — 1865 - يىللىغىچە)، گىببس (J.W.Gibbs، 1839 — 1903 - يىللىغىچە) قاتارلىقلار گرېك ھەرپىنىڭ كىچىك يېزىلىشى ئارقىلىق ۋېكتورنى ئىپادىلىگەن. 1912 - يىلى، لانگۋېن $\vec{a}$ ئارقىلىق ۋېكتورنى ئىپادىلىگەن، كېيىنچە، ھەرپىنىڭ ئۈستىگە ئىستىرېلكا قوشۇپ ۋېكتورنى ئىپادىلەش ئۇسۇلى تەدرىجىي ئومۇملاشقان (بولۇپمۇ قوليازمىلاردا). باسمىدا قولايلىق بولۇش ئۈچۈن، ۋېكتور توم قارا كىچىك ھەرپ $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ قاتارلىقلار ئارقىلىق ئىپادىلەنگەن، بۇ ئىككى خىل بەلگە تا بۈگۈنگىچە داۋاملىق قوللىنىلماقتا.

ۋېكتورنىڭ ماتېماتىكىغا كىرگۈزۈلۈشى ۋە تەرەققىي قىلىشى كومپلېكس سانلارنىڭ گېئومېتىرىيىلىك ئىپادىلىنىشىدىن باشلانغان. 1797 - يىلى، دانىيە ماتېماتىكى ۋېسسېل (C.Wessel، 1745 — 1818 - يىللىغىچە) كوئوردىنات تەكشىلىكىدىكى (a, b) نۇقتىدىن پايدىلىنىپ كومپلېكس سان $a+bi$ نى ئىپادىلىگەن ھەمدە گېئومېتىرىيىلىك مەنىگە ئىگە كومپلېكس سانلار ئۈستىدىكى ئەمەللەردىن پايدىلىنىپ ۋېكتورلار ئۈستىدىكى ئەمەللەرگە ئېنىقلىما بەرگەن. كوئوردىنات تەكشىلىكىدىكى نۇقتىنى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلىگەن ھەمدە ۋېكتورنىڭ گېئومېتىرىيىلىك ئىپادىلىنىشىنى گېئومېتىرىيىلىك ۋە ترىگونومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشتا قوللانغان. كىشىلەر كومپلېكس ساننى قەدەممۇ قەدەم قوبۇل قىلىپ، تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنى كومپلېكس سانلاردىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەش ۋە تەتقىق قىلىشنىمۇ ئۆگىنىۋالغان.

سىز ۋېكتورنى بەلگە ئارقىلىق ئىپادىلەشنىڭ ئەۋزەللىكىنى چۈشەندۇرۇپ بېرەلەمسىز؟

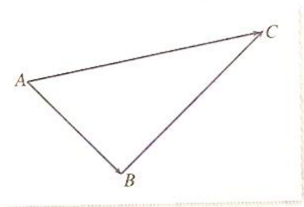
2-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلار ئۈستىدە سىزىقلىق ئەمەللەر

سانلار ئۈستىدە ئەمەللەرنى بېجىرىشكە بولىدۇ، ئەمەللەر بولغانلىقى ئۈچۈن، سان چەكسىز كۈچ - قۇدرەتكە ئىگە بولغان. ئۇنداق بولسا، ۋېكتورلار ئۈستىدىمۇ ساندىكىگە ئوخشاش ئەمەل بېجىرىشكە بولامدۇ؟ كىشىلەر ۋېكتورنىڭ فىزىكىلىق ئارقا كۆرۈنۈشى ۋە سانلار ئۈستىدىكى ئەمەللەردىن ئىلھام ئېلىپ ۋېكتورلار ئۈستىدىكى ئەمەللەرنى كىرگۈزدى.

تۆۋەندە بىز ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەرنى ئۆگىنىمىز.

1-2-2 ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلى ۋە ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى

1.2.2 - رەسىمدىكىدەك، مەلۇم ئوبيېكت A نۇقتىدىن چىقىپ B نۇقتا ئارقىلىق C نۇقتىغا بارغان بولسا، ئىككى قېتىملىق ئورۇن يۆتكىلىش $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ نىڭ نەتىجىسى A نۇقتىدىن بىۋاسىتە C نۇقتىغا بارغاندىكى ئورۇن يۆتكىلىش $\overrightarrow{AC}$ نىڭ نەتىجىسى بىلەن ئوخشاش بولىدۇ.

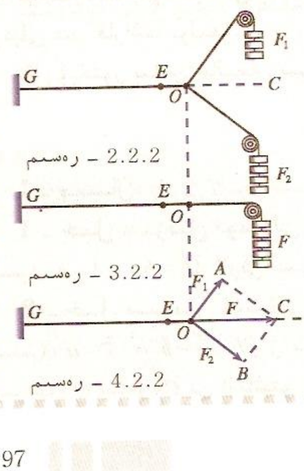


1.2.2 - رەسىم

ئىزدىنىش

2.2.2 - رەسىمدە، رېزىنكە F_1، F_2 كۈچلەرنىڭ تەسىرىدە GC يۆنىلىشى بويلاپ EO چىلىك ئۇزۇنلۇقتا سوزۇلغان؛ 3.2.2 - رەسىمدە، F_1، F_2 كۈچلەرنى چىقىرىۋەتكەندە، رېزىنكە بىر F كۈچنىڭ تەسىرىدە ئوخشاش يۆنىلىشنى بويلاپ ئوخشاش ئۇزۇنلۇقتا سوزۇلغان.

F_1، F_2 كۈچلەرنىڭ چوڭ - كىچىكلىكى بىلەن يۆنىلىشىنى ئۆزگەرتىپ، يۇقىرىقى تەجرىبىنى قايتا ئىشلىسەك، F بىلەن F_1، F_2 لەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بايقىيالامسىز؟



2.2.2 - رەسىم

3.2.2 - رەسىم

4.2.2 - رەسىم

$\boldsymbol{F}$ كۈچنىڭ رېزىنكىگە تەسىر قىلىش ئۈنۈمى $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$ كۈچلەرنىڭ بىرلىكتە تەسىر قىلىش ئۈنۈمى بىلەن ئوخشاش بولۇپ، فىزىكىدا $\boldsymbol{F}$ كۈچ $\boldsymbol{F}_1$ بىلەن $\boldsymbol{F}_2$ نىڭ تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچى دەپ ئاتىلىدۇ.

تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچ $\boldsymbol{F}$ بىلەن $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$ كۈچلەر قانداق مۇناسىۋەتتە ئىگە؟ 4.2.2 - رەسىمدىن بايقاشقا بولىدۇكى، $\boldsymbol{F}$ كۈچ $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$ لەرنى قوشنا تەرەپ قىلغان پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگونالى ئۈستىدە بولۇپ، چوڭ - كىچىكلىكى پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقىغا تەڭ بولىدۇ.

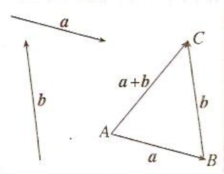
سانلارنى قوشۇشتىن شۇنى ھېس قىلىمىزكى، ئەمەل نۇقتىسىدىن قارىغاندا، $\boldsymbol{F}$ نى $\boldsymbol{F}_1$ بىلەن $\boldsymbol{F}_2$ نىڭ يىغىندىسى دەپ قاراشقا بولىدۇ، يەنى ئورۇن يۆتكىلىش ۋە كۈچلەرنىڭ بىرىكىشىنى ۋېكتورلارنى قوشۇش دەپ قاراشقا بولىدۇ.

5.2.2 - رەسىمدىكىدەك، نۆل بولمىغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار بېرىلگەن، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر A نۇقتا ئارقىلىق، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$ لارنى سىزساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{AC}$ ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ يىغىندىسى دەپ ئاتىلىپ، $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ قىلىپ يېزىلىدۇ، يەنى

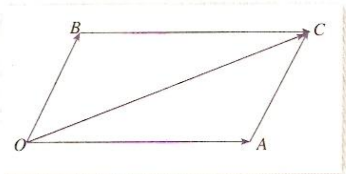
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

ئىككى ۋېكتورنىڭ يىغىندىسىنى تېپىش ئەمىلى **ۋېكتورلارنى قوشۇش** دەپ ئاتىلىدۇ. ۋېكتورلارنىڭ يىغىندىسىنى تېپىشتىكى بۇ خىل ئۇسۇل **ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ ئۈچبۇلۇڭ قائىدىسى** دېيىلىدۇ.

ئورۇن يۆتكىلىشنىڭ بىرىكىشىنى ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ ئۈچبۇلۇڭ قائىدىسىنىڭ فىزىكىلىق مودېلى دەپ قاراشقا بولىدۇ.



5.2.2 - رەسىم



6.2.2 - رەسىم

6.2.2 - رەسىمدىكىدەك، ئوخشاش بىر O نۇقتىنى باش نۇقتا قىلغان بېرىلگەن ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ نى قوشنا تەرەپ قىلىپ ▱$OACB$ نى سىزساق، ئۇ ھالدا O نى باش نۇقتا قىلغان دىئاگونال $\overrightarrow{OC}$ دەل $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ يىغىندىسى بولىدۇ. بىز ئىككى ۋېكتورنىڭ يىغىندىسىنى سىزىشتىكى بۇ خىل ئۇسۇلنى **ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك قائىدىسى** دەپ ئاتايمىز.

كۈچلەرنىڭ بىرىكىشىنى ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك قائىدىسىنىڭ فىزىكىلىق مودېلى دەپ قاراشقا بولىدۇ.

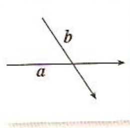
نۆل ۋېكتور بىلەن خالىغان بىر $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورغا نىسبەتەن مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

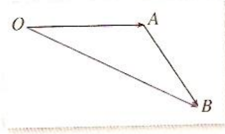
1 - مىسال. 7.2.2 - رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار بېرىلگەن، ۋېكتور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ نى سىزايلى.

1 - خىل سىزىش ئۇسۇلى: تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر O نۇقتا ئارقىلىق (8.2.2 - رەسىم)، $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ لارنى سىزساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ بولىدۇ.

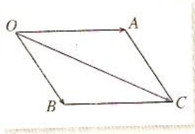
2 - خىل سىزىش ئۇسۇلى: تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر O نۇقتا ئارقىلىق (9.2.2 - رەسىم)، $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ لارنى سىزىمىز. ئاندىن OA، OB لارنى قوشنا تەرەپ قىلىپ ▱$OACB$ نى سىزىپ، O بىلەن C نى تۇتاشتۇرساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ بولىدۇ.



7.2.2 - رەسىم



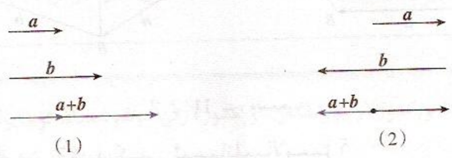
8.2.2 - رەسىم



9.2.2 - رەسىم

مۇلاھىزە؟

10.2.2 - رەسىمدىكىدەك، سان ئوقى ئۈستىدە ئىككى سىزىقداش ۋېكتورنى ئىپادىلىگەندە، ئۇلارنى قوشۇش بىلەن سانلارنى قوشۇش قانداق مۇناسىۋەتكە ئىگە بولىدۇ؟



10.2.2 - رەسىم

1 - مىسالدىن بىلىشكە بولىدۇكى، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار سىزىقداش بولمىغاندا، $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ بولىدۇ. ئومۇمەن، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

ئىزدىنىش

$\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار قانداق ئورۇندا بولغاندا، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ (ياكى $|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$).

بىزگە مەلۇم، سانلار ئۈستىدىكى ئەمەللەر بىلەن ئەمەللەر قانۇنى زىچ باغلىنىشلىق بولۇپ، ئەمەللەر قانۇنى ھېسابلاشنى ئۈنۈملۈك ئاددىيلاشتۇرۇپ بېرىدۇ. مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، ۋېكتورلارنى قوشۇشمۇ ئەمەللەر قانۇنىغا ئىگە بولامدۇ؟

ئىزدىنىش

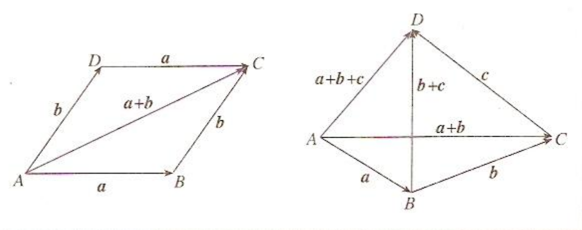
سانلارنى قوشۇش ئەملى ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرىدۇ، يەنى خالىغان $a, b \in \mathbf{R}$ لارغا نىسبەتەن مۇنداق بولىدۇ:

$$a+b=b+a,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

خالىغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لارنى قوشۇشمۇ ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرەمدۇ؟ شەكىل سىزىش ئارقىلىق ئىزدىنىپ بېقىڭ.

11.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ، $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ لارنى ھەمدە AB ، AD لارنى قوشنا تەرەپ قىلى
$ABCD$ ▱ نى سىزساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{BC}=$ _______ ، $\overrightarrow{DC}=$ _______ بولىدۇ.

$$\because \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$



11.2.2 ـ رەسىم

11.2.2 ـ رەسىمگە ئاساسەن تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلىيالامسىز؟

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

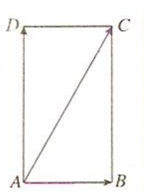
يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق، ۋېكتورلارنى قوشۇش ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى بىلەن گۇر
ۇپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرىدۇ.

2 ـ مىسال. چاڭجياڭ دەرياسىنىڭ ئىككى قىرغىقى ئارىسىدىكى كۆۋرۈك يوق يەردە، ھەمىشە ك
ېمىك كېمىسى ئارقىلىق يۆك توشۇلىدۇ. 12.2.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، بىر كېمە چاڭجياڭ د
ەرياسىنىڭ جەنۇبىي قىرغىقىدىكى A نۇقتىدىن چىقىپ، $5\,\mathrm{km/h}$ تېزلىك بىلەن قارشى قىرغاققا ت
ىك بولغان يۆنىلىشتە ماڭغان، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، دەريا سۈيىنىڭ ئېقىش تېزلىكى شەرققە قار
ىتا $2\,\mathrm{km/h}$ بولغان.

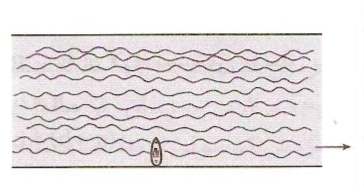
(1) دەريا سۈيىنىڭ تېزلىكى، كېمىنىڭ تېزلىكى ۋە كېمىنىڭ ئەمەلىيەتتىكى مېڭىش تېزلىكىن
ى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەيلى (ئىككى ئىناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېلىنىدۇ)؛

(2) كېمىنىڭ ئەمەلىيەتتىكى مېڭىش تېزلىكىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى بىلەن يۆنىلىشىنى تاپاي
(ئۇنىڭ بىلەن دەريا سۈيىنىڭ ئېقىش تېزلىكى ئارىسىدىكى ئارا بۇلۇڭ ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، گرادۇ
ىقىچە ئېنىقلىقتا ئېلىنىدۇ).

يېشىش: (1) 13.2.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، كېمىنىڭ تېزلىكىنى $\overrightarrow{AD}$ ئارقىلىق، سۇن
ىڭ تېزلىكىنى $\overrightarrow{AB}$ ئارقىلىق ئىپادىلەپ، AD ، AB لارنى قوشنا تەرەپ قىلىپ $ABCD$ ▱ نى سىزساق،
ھالدا $\overrightarrow{AC}$ دەل كېمىنىڭ ئەمەلىيەتتىكى مېڭىش تېزلىكى بولىدۇ.



13.2.2 ـ رەسىم



12.2.2 ـ رەسىم

(2) Rt $\triangle ABC$ دا، $|\overrightarrow{AB}|=2$ ، $|\overrightarrow{BC}|=5$ ، شۇڭا

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}$$
$$=\sqrt{2^2+5^2}$$
$$=\sqrt{29}\approx 5.4.$$

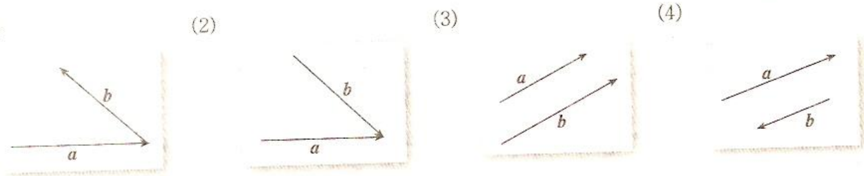
چۈنكى $\tan\angle CAB=\frac{5}{2}$ ،

ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانساق $\angle CAB \approx 68°$ قا ئېرىشىمىز.

جاۋابى: كېمىنىڭ ئەمەلىيەتتىكى مېڭىش تېزلىكىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى تەخمىنەن 5.4 km/h ، ئۇنىڭ يۆنىلىشى بىلەن سۇنىڭ ئېقىش تېزلىكى ئارىسىدىكى ئارا بۇلۇڭ تەخمىنەن °68.

مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار بېرىلگەن، ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ ئۈچبۇلۇڭ قائىدىسىدىن پايدىلىنىپ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ نى سىزىڭ.



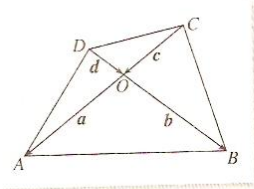
(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار بېرىلگەن، ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك قائىدىسىدىن پايدىلىنىپ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ نى سىزىڭ.

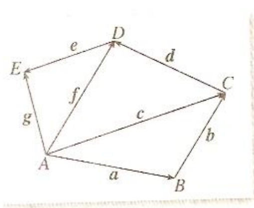
(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدە كۆرسىتىلگەنگە ئاساسەن بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}=$ ________ ; (2) $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=$ ________ .



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدە كۆرسىتىلگەنگە ئاساسەن بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$ ________ ; (2) $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=$ ________ ;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=$ ________ ; (4) $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}=$ ________ .

2-2-2 ۋېكتورلارنى ئېلىش ئەملى ۋە ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى

ئىزدىنىش

ۋېكتورلار ئۇستىدە ئېلىش ئەملىنى بېجىرىشكە بولامدۇ؟ ۋېكتورلارنى ئېلىشنى قانداق چۈشىنىش كېرەك؟

بىزگە مەلۇم، بىر سانىنى ئېلىش شۇ سانىنىڭ قارىمۇقارشى سانىنى قوشقانغا تەڭ. ۋېكتورلارنى ئېلىشمۇ يۇقىرىقىغا ئوخشاش قائىدىگە ئىگە بولامدۇ؟

سان x نىڭ قارىمۇقارشى سانى $-x$ بولغانلىقىغا ئوخشاش، مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز: ئۇزۇنلۇقى نىڭ ئۇزۇنلۇقىغا تەڭ، يۆنىلىشى $\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشىگە قارىمۇقارشى بولغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ قارىمۇقارشى ۋېكتورى دەپ ئاتىلىدۇ ۋە $-\boldsymbol{a}$ قىلىپ يېزىلىدۇ. بىر ۋېكتورنىڭ يۆنىلىشىنى قارشى يۆنىلىش بويىچە ئىككى قېتىم ئايلاندۇرغاندا يەنىلا ئەسلىدىكى يۆنىلىشكە قايتىپ كېلىدىغانلىقتىن، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $-\boldsymbol{a}$ ئۆز ئارا قارىمۇقارشى ۋېكتورلار بولىدۇ. شۇڭا،

$$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.$$

بىز نۆل ۋېكتورنىڭ قارىمۇقارشى ۋېكتورى يەنىلا نۆل ۋېكتور بولىدۇ دەپ بەلگىلىۋالىمىز.

ھەرقانداق بىر ۋېكتور بىلەن ئۇنىڭ قارىمۇقارشى ۋېكتورىنىڭ يىغىندىسى نۆل ۋېكتور بولىدۇ، يەنى

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، ئەگەر $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار ئۆزئارا قارىمۇقارشى ۋېكتورلار بولسا، ئۇ ھالدا:

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a},\ \ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

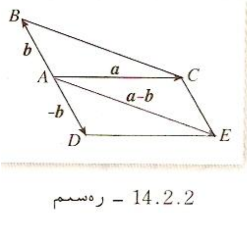
بىز مۇنداق ئېنىقلىما بېرىمىز:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

يەنى بىر ۋېكتورنى ئېلىش شۇ ۋېكتورنىڭ قارىمۇقارشى ۋېكتورىنى قوشقانغا تەڭ.

14.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ۋېكتور $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$ ، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{b}$ بولىدۇ، ۋېكتورلارنى ئېلىش ئەملىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى،

$$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$



14.2.2 ـ رەسىم

يەنە

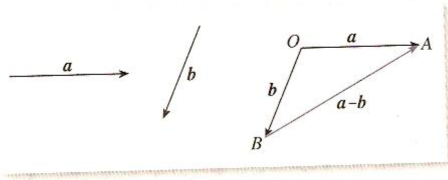
$$\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},$$

شۇنىڭ ئۈچۈن

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

شۇنىڭ بىلەن، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ نى سىزىش ئۇسۇلىغا ئىگە بولدۇق.

15.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار بېرىلگەن، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر O نۇقتا ئارقىلىق $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ ، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ لارنى سىزساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ بولىدۇ، يەنى $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ نى $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورنىڭ ئاخىرقى نۇقتىسىدىن $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنىڭ ئاخىرقى نۇقتىسىغا يۆنەلگەن ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، ما بۇ، ۋېكتورلارنى ئېلىشنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىدۇر.



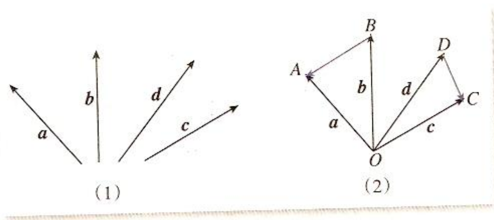
15.2.2 ـ رەسىم

مۇلاھىزە ?

(1) 15.2.2 ـ رەسىمدە، ئەگەر a نىڭ ئاخىرقى نۇقتىسىدىن b نىڭ ئاخىرقى نۇقتىسىغىچە بولغان ۋېكتورنى سىزساق، ئۇ ھالدا بۇ ۋېكتور قانداق ۋېكتور بولىدۇ؟

(2) 15·2·2 ـ رەسىمدىكى a، b ۋېكتورلارنىڭ يۆنىلىشىنى $a \parallel b$ بولىدىغان قىلىپ ئۆزگەرتسەك، $a-b$ نى قانداق سىزىش كېرەك؟

3 ـ مىسال. 16.2.2 ـ رەسىم (1) دە كۆرسىتىلگەندەك، a، b، c، d ۋېكتورلار بېرىلگەن، ۋېكتور $a-b$ بىلەن $c-d$ نى سىزايلى.

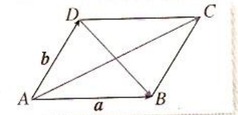


16.2.2 ـ رەسىم

سىزىش ئۇسۇلى: 16.2.2 ـ رەسىم (2) دە كۆرسىتىلگەندەك، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر O نۇقتا ئارقىلىق $\overrightarrow{OA}=a$، $\overrightarrow{OB}=b$، $\overrightarrow{OC}=c$، $\overrightarrow{OD}=d$ لارنى سىزساق، ئۇ ھالدا مۇنداق بولىدۇ:

$$\overrightarrow{BA}=a-b,$$
$$\overrightarrow{DC}=c-d.$$

4 ـ مىسال. 17.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\square ABCD$ دا، $\overrightarrow{AB}=a$، $\overrightarrow{AD}=b$ بولسا، ۋېكتور $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{DB}$ لارنى a، b لار ئارقىلىق ئىپادىلەيلى.



17.2.2 ـ رەسىم

يېشىش: ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك قائىدىسىگە ئاساسەن:

$$\overrightarrow{AC}=a+b;$$

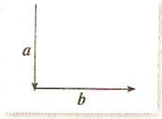
ئوخشاشلا، ۋېكتورلارنى ئېلىشقا ئاساسەن:

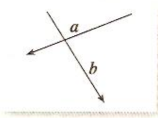
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=a-b.$$

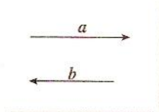
مەشىق

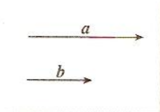
1. رەسىمدىكىدەك $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ نى سىزىڭ.

(1) (2) (3) (4)









(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$ ______________ ;

$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=$ ______________ ;

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=$ ______________ ;

$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=$ ______________ ;

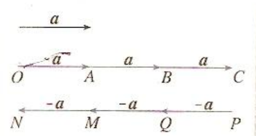
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$ ______________ .

3. شەكىل سىزىپ ئىسپاتلاڭ: $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

3-2-2 ۋېكتورلارنى سانغا كۆپەيتىش ئەمىلى ۋە ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى

ئىزدىنىش

نۆل بولمىغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ بىلەن $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$ نى سىزىڭ. ئۇلارنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟



18.2.2 ـ رەسىم

18.2.2 ـ رەسىمدىن مەلۇمكى، $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$. سانلارنى كۆپەيتىشتىكىگە ئوخشاش، $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ نى $3\boldsymbol{a}$، يەنى $\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}$ قىلىپ يازىمىز. روشەنكى، $3\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى $\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش بولۇپ، ئۇزۇنلۇقى $\boldsymbol{a}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقىنىڭ 3 ھەسسىسىگە تەڭ بولىدۇ، يەنى $|3\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|$.

ئوخشاشلا، 18.2.2 ـ رەسىمدىن مەلۇمكى، $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MN}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$، يەنى $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=3(-\boldsymbol{a})$. روشەنكى، $3(-\boldsymbol{a})$ نىڭ يۆنىلىشى $\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى بىلەن قارىمۇقارشى بولۇپ، ئۇزۇنلۇقى $\boldsymbol{a}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقىنىڭ 3 ھەسسىسىگە تەڭ بولىدۇ، يەنى $3(-\boldsymbol{a})=-3\boldsymbol{a}$.

2 ـ باب

ئومۇمەن، بىز ھەقىقىي سان λ بىلەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ كۆپەيتمىسى بىر ۋېكتور بولىدۇ دەپ بەلگىلىمىز، بۇ خىل ئەمەل ۋېكتورلارنى سانغا كۆپەيتىش (multi plication of vector by scalar) دەپ ئاتىلىپ، $\lambda\boldsymbol{a}$ قىلىپ يېزىلىدۇ، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن يۆنىلىشى تۆۋەندىكىدەك بەلگىلىنىدۇ:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2) $\lambda>0$ بولغاندا، $\lambda\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى $\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش؛ $\lambda<0$ بولغاندا، $\lambda\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى $\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى بىلەن قارىمۇقارشى؛ $\lambda=0$ بولغاندا، $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ بولىدۇ.

ھەقىقىي سان بىلەن ۋېكتورنىڭ كۆپەيتمىسىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكى ئەمەللەر قانۇنىنى ئىسپاتلاشقا بولىدۇ.

λ، μ لارنى ھەقىقىي سان دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\boxed{\begin{aligned}&(1)\ \lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};\\&(2)\ (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};\\&(3)\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}}$$

خۇسۇسەن، مۇنداق بولىدۇ:

$$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a}),$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}.$$

مۇلاھىزە ?

يۇقىرىدىكى ئەمەللەر قانۇنىنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

5 ـ مىسال. تۆۋەندىكىلەرنى ھېسابلاڭ:

(1) $(-3)\times4\boldsymbol{a}$;

(2) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}$;

(3) $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

يېشىش:

(1) ئەسلىي ئىپادە $=(-3\times4)\boldsymbol{a}=-12\boldsymbol{a}$;

(2) ئەسلىي ئىپادە $=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{b}$;

(3) ئەسلىي ئىپادە $=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$
$=-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

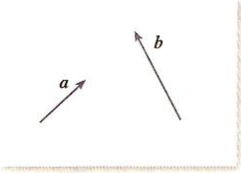
مۇلاھىزە ?

ۋېكتورلارنى سانغا كۆپەيتىش ئەمەلى كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن، سانلارنى ۋېكتورغا كۆپەيتىش بىلەن ئەسلىدىكى ۋېكتور ئارىسىدىكى ئورۇن مۇناسىۋىتىنى بايقىيالامسىز؟

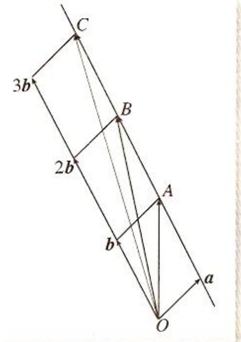
ئەگەر ۋېكتور $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$، $\boldsymbol{b}$ لارغا نىسبەتەن بىر ھەقىقىي سان λ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ بولسا، ئۇ ھالدا ۋېكتورلارنى سانغا كۆپەيتىشنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلەلەيمىزكى، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ سىزىقداش بولىدۇ.

ئەكسىچە، ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ سىزىقداش بولۇپ، $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ھەمدە $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورنىڭ ئۇزۇنلۇقى $\boldsymbol{a}$ ۋېكتور ئۇزۇنلۇقىنىڭ μ ھەسسىسىگە تەڭ، يەنى $|\boldsymbol{b}|=\mu|\boldsymbol{a}|$ بولسا، ئۇ ھالدا $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ ئوخشاش يۆنىلىشلىك بولغاندا، $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$؛ $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ قارىمۇقارشى يۆنىلىشلىك بولغاندا، $\boldsymbol{b}=-\mu\boldsymbol{a}$ بولىدۇ.

يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق، تۆۋەندىكى تېئورېمىغا ئىگە بولىمىز: **ۋېكتور $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ سىزىقداش $\Leftrightarrow$ پەقەت ۋە پەقەت بىردىنبىر ھەقىقىي سان λ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.**



19.2.2 - رەسىم



20.2.2 - رەسىم

6 - مىسال. 19.2.2 - رەسىمدىكىدەك، خالىغان ئىككى نۆل بولمىغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ بېرىلگەن، $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ لارنى سىزايلى. سىز A، B، C ئۈچ نۇقتىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلالامسىز؟ نېمە ئۈچۈن؟

تەھلىل: ئۈچ نۇقتىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىشتا، ئاساسلىقى بۇ ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش ياكى سىزىقداش ئەمەسلىكىگە قارايمىز. ئىككى نۇقتا بىر تۈز سىزىقنى بەلگىلەيدىغانلىقتىن، ئەگەر ئۈچىنچى نۇقتىنىڭ مۇشۇ تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلالىساق، ئۇ ھالدا بۇ ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش ئىكەنلىكىگە ھۆكۈم قىلغىلى بولىدۇ. بۇ مىسالدا، ۋېكتور بىلىملىرىنى قوللىنىپ، A، B، C ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش بولۇش - بولماسلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا، ۋېكتور $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{AB}$ لارنىڭ سىزىقداش بولۇش - بولماسلىقىغا، يەنى $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان λ نىڭ مەۋجۇت ياكى مەۋجۇت ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىشتىن پايدىلانساق بولىدۇ.

يېشىش: ئايرىم - ئايرىم ھالدا ۋېكتور $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ لارنى سىزىپ، A، C نۇقتىلار ئارقىلىق AC تۈز سىزىقنى يۈرگۈزىمىز (20.2.2 - رەسىمدىكىدەك). كۆزىتىش ئارقىلىق بايقاشقا بولىدۇكى، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلارنىڭ قانداق ئۆزگىرىشىدىن قەتئىينەزەر، B نۇقتا ھامان AC تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ، بۇنىڭغا ئاساسەن A، B، C ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش بولىدىغانلىقىنى قىياس قىلىمىز.

ئەمەلىيەتتە، چۈنكى

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{b},\\\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\\&=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=2\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

شۇڭا

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}.$$

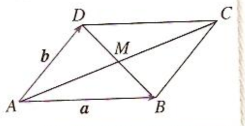
شۇنىڭ ئۈچۈن A، B، C ئۈچ نۇقتا سىزىقداش.

❶ سىز ئۇنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىنى چۈشەندۈرەلەمسىز؟

ۋېكتورلارنى قوشۇش، ئېلىش، سانغا كۆپەيتىش ئەمەللىرى ئومۇملاشتۇرۇلۇپ ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەر دېيىلىدۇ. خالىغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋە خالىغان ھەقىقىي سان λ، μ_1، μ_2 لەرگە نىسبەتەن ھامان مۇنداق بولىدۇ:

$$\lambda(\mu_1\boldsymbol{a} \pm \mu_2\boldsymbol{b}) = \lambda\mu_1\boldsymbol{a} \pm \lambda\mu_2\boldsymbol{b}.❶$$

7 ـ مىسال. 21.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\square ABCD$ نىڭ ئىككى دىئاگونالى M نۇقتىدا كېسىشسە ھەمدە $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ بولسا، $\overrightarrow{MA}$، $\overrightarrow{MB}$، $\overrightarrow{MC}$ ۋە $\overrightarrow{MD}$ لارنى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار ئارقىلىق ئىپادىلەيلى.



21.2.2 ـ رەسىم

يېشىش: $\square ABCD$ دا،

$$\because \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

يەنە $\because$ پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ ئىككى دىئاگونالى بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ،

$$\because \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
$$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$
$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$
$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$
$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$
$$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

مەشىق

1. خالىغان بىر $\boldsymbol{e}$ ۋېكتورنى سىزىپ، ئاندىن ئايرىم ـ ئايرىم ۋېكتور $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}$، $\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{e}$ نى سىزىڭ.

2. C نۇقتا AB كېسىنىڭ ئۈستىدە ھەمدە $\frac{AC}{CB}=\frac{5}{2}$ بولسا، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{AC}=$ __________ $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}=$ __________ $\overrightarrow{AB}$ بولىدۇ.

3. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر كىچىك مىسالدىكى $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورنى ھەقىقىي سان بىلەن $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنىڭ كۆپەيتمىسى كۆرۈنۈشىدە ئىپادىلەڭ:

(1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{e}$;

(2) $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}=-14\boldsymbol{e}$;

(3) $a = -\frac{2}{3}e$, $b = \frac{1}{3}e$;

(4) $a = -\frac{3}{4}e$, $b = -\frac{2}{3}e$.

4. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر كىچىك مىسالدىكى ۋېكتور a بىلەن b نىڭ سىزىقداش ياكى سىزىقداش ئەمەس-لىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $a = -2e$, $b = 2e$;

(2) $a = e_1 - e_2$, $b = -2e_1 + 2e_2$.

5. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $5(3a - 2b) + 4(2b - 3a)$;

(2) $\frac{1}{3}(a - 2b) - \frac{1}{4}(3a - 2b) - \frac{1}{2}(a - b)$;

(3) $(x + y)a - (x - y)a$.

6. $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ (O، A، B ئۈچ نۇقتا سىزىقداش ئەمەس) ۋېكتورلار بېرىلگەن، تۆۋەندىكى ۋېكتورلارنى سىزىڭ:

(1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

(2) $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$;

(3) $\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$.

2.2 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. a «شەرققە قاراپ 10 km مېڭىش» نى، b «غەربكە قاراپ 5km مېڭىش» نى، c «شىمالغا قاراپ 10 km مېڭىش» نى، d «جەنۇبقا قاراپ 5km مېڭىش» نى ئىپادىلەيدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكى ۋېكتورلارنىڭ مەنىسىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) $a + a$; (2) $a + b$;

(3) $a + c$; (4) $b + d$;

(5) $b + c + b$; (6) $d + a + d$.

2. بىر ئايروپىلان شىمالغا قاراپ 300 km ئۇچۇپ، ئاندىن يۆنىلىشىنى ئۆزگەرتىپ غەربكە قاراپ 400 km ئۇچقان بولسا، بۇ ئايروپىلاننىڭ ئۇچقان مۇساپىسى ۋە ئىككى قېتىملىق ئورۇن يۆتكىلىشىنىڭ بىرىكمىسىنى تېپىڭ.

3. بىر كېمە 8 km/h تېزلىك بىلەن دەريانىڭ قارشى قىرغىقىغا تىك بولغان يۆنىلىش بويىچە ماڭىدۇ. ئەگەر بۇ چاغدىكى دەريا سۈيىنىڭ ئېقىش تېزلىكى 2 km/h بولسا، بۇ كېمىنىڭ ئەمەلىيەت-

2 - باب

تىكى مېڭىش تېزلىكىنىڭ چوڭ - كىچىكلىكى بىلەن يۆنىلىشىنى تېپىڭ (1° قىچە ئېنىقلىقتا).

4. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$;

(2) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$;

(3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$;

(4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$;

(5) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}$;

(6) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$;

(7) $\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}$.

5. شەكلىنى سىزىپ ئىسپاتلاڭ:

(1) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$;

(2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$.

6. $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ئىككى ۋېكتور بېرىلگەن، شۇنداق بىر $\boldsymbol{c}$ ۋېكتورنى سىزىڭكى، نەتىجىدە $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ بولسۇن. $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لارنى ئىپادىلەيدىغان يۆنىلىشلىك كېسىكلەردىن ئۈچبۇلۇڭ ھاسىل قىلىشقا بولامدۇ؟

7. شەكلىنى سىزىپ ئىسپاتلاڭ: $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

8. نۆل بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ بېرىلگەن،

(1) ۋېكتور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ بىلەن $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ نى سىزىڭ؛

(2) ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ قانداق ئورۇن مۇناسىۋىتىدە بولغاندا، $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ بولىدۇ (ئىسپاتلاش تەلەپ قىلىنمايدۇ).

9. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $5(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+4(2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})$;

(2) $6(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-4(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$;

(3) $\frac{1}{2}[(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+5\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}(6\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b})]$;

(4) $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x-y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

10. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$، $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ۋە $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ نى تېپىڭ.

11. $\square ABCD$ نىڭ AC، BD دىئاگوناللىرى O نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى ھەمدە $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\overrightarrow{OC}$، $\overrightarrow{OD}$، $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{BC}$ ۋېكتورلارنى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار ئارقىلىق ئايرىم - ئايرىم ئىپادىلەڭ.

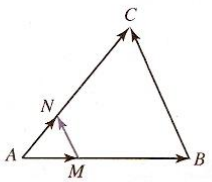
12. $\triangle ABC$ دا، $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$، $DE \parallel BC$ ھەمدە DE بىلەن AC تەرەپ E نۇقتىدا كېسىشىدۇ، $\triangle ABC$ نىڭ AM مېدىئانىسى DE بىلەن N نۇقتىدا كېسىشىدۇ. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $\overrightarrow{AE}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{DE}$، $\overrightarrow{DB}$، $\overrightarrow{EC}$، $\overrightarrow{DN}$، $\overrightarrow{AN}$ ۋېكتورلارنى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار ئارقىلىق ئايرىم - ئايرىم ئىپادىلەڭ.

13. E، F، G، H نۇقتىلار ئايرىم - ئايرىم ھالدا تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ AB، BC، CD، DA تەرەپلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ نى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئايروپىلان A جايدىن شىمالدىن غەربكە $15°$ ئاغقان يۆنىلىشتە $1400\,\text{km}$ ئۇچۇپ B جايغا بارغان، ئاندىن يەنە B جايدىن جەنۇبتىن شەرققە $75°$ ئاغقان يۆنىلىشتە $1400\,\text{km}$ ئۇچۇپ C جايغا بارغان. ئايروپىلاننىڭ ئۇچقان چاغدىكى ئورۇن يۆتكىلىش سخېمىسىنى سىزىڭ ھەمدە C جاي A جاينىڭ قايسى يۆنىلىشىدە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈڭ. C جاي بىلەن A جاينىڭ ئارىلىقى قانچىلىك كېلىدۇ؟

2. نۆل بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ بېرىلگەن، $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ بىلەن $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ چوقۇم تەڭ بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ نى ئىسپاتلاڭ.

4. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر كىچىك مىسالدىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە ئىسپاتلاڭ:

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$;

(2) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ھەمدە $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$.

5. O بولسا تۆت تەرەپلىك $ABCD$ ياتقان تەكشىلىكنىڭ ئىچىدىكى بىر نۇقتا ئىكەنلىكى ھەمدە ۋېكتور $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$، $\overrightarrow{OD}$ لارنىڭ تەڭلىك $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ نى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى بېرىلگەن.

(1) شەكلىنى سىزىڭ ھەمدە تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ شەكلىنى كۆزىتىڭ؛

(2) تۆت تەرەپلىك $ABCD$ قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟ قىياسىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

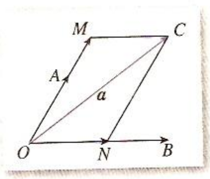
3-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېما ۋە ئۇنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى

1-3-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېما

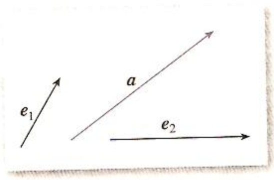
مۇلاھىزە؟

تەكشىلىكتىكى خالىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{e}_1$، $\boldsymbol{e}_2$ بېرىلگەن، ۋېكتور $3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ بىلەن $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ نى سىزىڭ. تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر ۋېكتورنى $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ كۆرۈنۈشتىكى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولامدۇ - يوق؟

1.3.2 - رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{e}_1$، $\boldsymbol{e}_2$ لەرنى ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى سىزىقداش بولمىغان ئىككى ۋېكتور، $\boldsymbol{a}$ نى مۇشۇ تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر ۋېكتور دەپ پەرەز قىلىپ، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{e}_1$، $\boldsymbol{e}_2$ لەر ئارد- سىدىكى مۇناسىۋەتنى شەكىل سىزىش ئارقىلىق مۇھاكىمە قىلىپ كۆرەيلى.



2.3.2 - رەسىم



1.3.2 - رەسىم

2.3.2 - رەسىمدىكىدەك، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر O نۇقتا ئارقىلىق $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$، $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$ لارنى سىزايلى. C نۇقتا ئارقىلىق OB تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان تۈز سىزىقنى يۈرگۈزسەك، ئۇ، OA تۈز سىزىق بىلەن M نۇقتىدا كېسىشىدۇ؛ C نۇقتا ئارقىلىق OA تۈز سىزىققا پاراللېل بولغان تۈز سىزىقنى يۈرگۈزسەك، ئۇ، OB تۈز سىزىق بىلەن N نۇقتىدا كېسىشىدۇ. ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەرنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$، $\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان ھەقىقىي سان λ_1، λ_2 مەۋجۇت بولىدۇ. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ بولغانلىقتىن، $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ بولىدۇ. باشقىچە قىلىپ ئېيتقاندا، خالىغان بىر $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنى ھامان $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ كۆرۈنۈشتە ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

يۇقىرىقى جەريانلاردىن بايقاشقا بولىدۇكى، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر ۋېكتورنى ھامان مۇشۇ تەكشىلىكتىكى سىزىقداش بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{e}_1$، $\boldsymbol{e}_2$ ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ. $\boldsymbol{e}_1$، $\boldsymbol{e}_2$ لەر ئېنىقلانغاندىن كېيىن، خالىغان بىر ۋېكتورنى ئوخشاشلا بۇ ئىككى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ مىقدارلاشتۇرغىلى بولىدۇ، بۇ، بىزنىڭ مەسىلىلەرنى مۇھاكىمە قىلىشىمىزغا زور قۇلايلىقلارنى ئېلىپ كېلىدۇ.

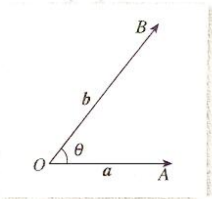
تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئاساسىي تېئورېما: ئەگەر e_1، e_2 لەر ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى سىزىقداش بولمىغان ئىككى ۋېكتور بولسا، ئۇ ھالدا مۇشۇ تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر a ۋېكتورغا نىسبەتەن، پەقەت ۋە پەقەت بىر جۈپ ھەقىقىي سان λ_1، λ_2 مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$a=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2 .$$

بىز سىزىقداش بولمىغان ۋېكتور e_1، e_2 لەرنى مۇشۇ تەكشىلىكتىكى بارلىق ۋېكتورلارنى ئىپادىلەشنىڭ بىر گۇرۇپپا **ئاساسى** (base)❶ دەپ ئاتايمىز.

❶ تەكشىلىكتە ئوخشاش بولمىغان كوئوردىنات سىستېمىسىنى تاللاپ ئېلىشقا بولىدىغانلىقىغا ئوخشاش، ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ئوخشاش بولمىغان ئاساسلار بار بولىدۇ.

سىزىقداش بولمىغان ۋېكتورلار ئوخشاش بولمىغان يۆنىلىشكە ئىگە بولۇپ، ئۇلارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى ئارا بۇلۇڭ ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ۋېكتورلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىنى مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز:



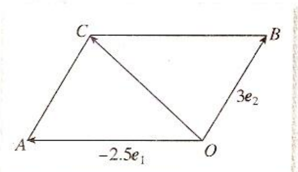
3.3.2 ـ رەسىم

نۆل بولمىغان ئىككى ۋېكتور a بىلەن b بېرىلگەن بولسۇن (3.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك). $\overrightarrow{OA}=a$، $\overrightarrow{OB}=b$ لارنى سىزساق، ئۇ ھالدا $\angle AOB=\theta$ ($0°\leqslant\theta\leqslant 180°$) ۋېكتور a بىلەن b نىڭ **ئارا بۇلۇڭى** دېيىلىدۇ.

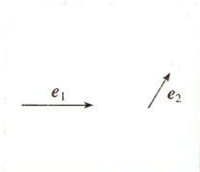
روشەنكى، $\theta=0°$ بولغاندا، a بىلەن b ئوخشاش يۆنىلىشلىك؛ $\theta=180°$ بولغاندا، a بىلەن b قارىمۇ قارشى يۆنىلىشلىك بولىدۇ.

ئەگەر a بىلەن b نىڭ ئارا بۇلۇڭى $90°$ بولسا، بىز a بىلەن b نى **تىك** دەيمىز ۋە $a\perp b$ قىلىپ يازىمىز.

1 ـ مىسال. 4.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، e_1، e_2 ۋېكتورلار بېرىلگەن ، ۋېكتور $-2.5e_1+3e_2$ نى سىزايلى.



5.3.2 ـ رەسىم



4.3.2 ـ رەسىم

سىزىش ئۇسۇلى: 1. 5.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، خالىغان بىر O نۇقتىنى ئېلىپ، $\overrightarrow{OA}=-2.5e_1$، $\overrightarrow{OB}=3e_2$ نى سىزىمىز.

2. $\square OACB$ نى سىزىمىز.

$\overrightarrow{OC}$ دەل سىزىش تەلەپ قىلىنغان ۋېكتور بولىدۇ.

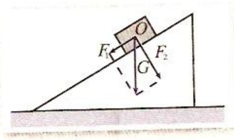
مۇلاھىزە؟

يەنە باشقا سىزىش ئۇسۇلى بارمۇ؟

2 ـ باب

2-3-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنىڭ ئورتوگونال ئاجرىلىشى ۋە ئۇنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى

6.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، سىلىق يانتۇ تەكشىلىكتىكى بىر ياغاچ پارچىسى ئېغىرلىق كۈچى G نىڭ تەسىرىدە ئىككى ئۈنۈم ھاسىل قىلىدۇ. بىرى، ياغاچ پارچىسى يانتۇ تەكشىلىككە پاراللېل بولغان F_1 كۈچىنىڭ تەسىرىدە يانتۇ يۈزنى بويلاپ تۆۋەنگە سىيرىلىدۇ؛ يەنە بىرى، ياغاچ پارچىسى يانتۇ يۈزگە تىك بولغان بېسىم كۈچى F_2 نى ھاسىل قىلىدۇ. دېمەك، ئېغىرلىق كۈچى G نىڭ ئۈنۈمى F_1 بىلەن F_2 نىڭ تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچىنىڭ ئۈنۈمىگە تەڭ بولىدۇ، يەنى $G=F_1+F_2$. بۇ، ئېغىرلىق كۈچى G نى ئاجرىتىش دەپ ئاتىلىدۇ.



6.3.2 ـ رەسىم

ئوخشاشلا، تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىغا ئاساسەن، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر a ۋېكتورنى $a=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2$ بولىدىغان قىلىپ، سىزىقداش بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\lambda_1 a_1$ بىلەن $\lambda_2 a_2$ گە ئاجرىتىشقا بولىدۇ.

سىزىقداش بولمىغان ئىككى ۋېكتوردا، تىك بولۇش بىر خىل مۇھىم ھالەت. بىر ۋېكتورنى ئۆزئارا تىك بولغان ئىككى ۋېكتورغا ئاجرىتىش ۋېكتورلارنى **ئورتوگونال** (**تىك كېسىپ**) **ئاجرىتىش** دېيىلىدۇ. 6.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئېغىرلىق كۈچى G نى ئۆزئارا تىك بولغان ئىككى يۆنىلىش بويىچە ئاجرىتىش دەل ئورتوگونال ئاجرىتىش بولىدۇ. ئورتوگونال ئاجرىتىش ۋېكتورلارنى ئاجرىتىشتا كۆپ ئۇچرايدىغان بىر خىل ئەھۋال.

ئەگەر تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا تىك بولغان ۋېكتورلارنى تاللاپ ئاساس قىلىۋالساق، مەسىلىلەرنى مۇھاكىمە قىلىشىمىزغا قۇلايلىقلارنى يارىتىپ بېرىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

بىزگە مەلۇمكى، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ھەربىر نۇقتىنى بىر جۈپ تەرتىپلىك ھەقىقىي سان (يەنى شۇ نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى) ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ئۇنداقتا، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات تەكشىلىكىدىكى ھەربىر ۋېكتورنى قانداق ئىپادىلەش كېرەك؟

7.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا يۆنىلىشى x ئوق، y ئوقنىڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش بولغان ئىككى بىرلىك ۋېكتور i، j نى ئاساس قىلىپ ئالايلى. تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىدىن بىلەلەيمىزكى، تەكشىلىكتىكى بىر a ۋېكتورغا نىسبەتەن، پەقەت ۋە پەقەت بىر جۈپ ھەقىقىي سان x، y مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۈچكە ئىگە بولىدۇ:

$$a=xi+yj. \quad ①$$

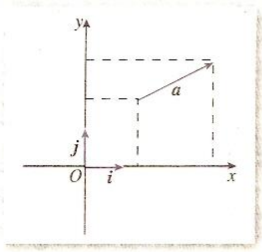
شۇنىڭ بىلەن، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر a ۋېكتورنى ھامان x، y ئارقىلىق بىردىنبىر ئېنىقلاشقا بولىدۇ، بىز تەرتىپلىك سانلار جۈپى (x, y) نى a ۋېكتورنىڭ كوئوردېناتى دەپ ئاتايمىز ۋە

$$a=(x, y) \quad ②$$

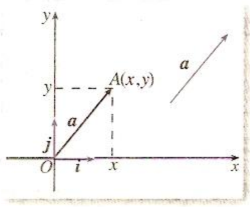
قىلىپ يازىمىز. بۇنىڭدىكى x بولسا a نىڭ x ئوقتىكى كوئوردېناتى، y بولسا a نىڭ y ئوقتىكى كو ـ

ئوردېناتى، ② ئىپادە ۋېكتورنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى دېيىلىدۇ.

روشەنكى، $\boldsymbol{i}=(1, 0)$، $\boldsymbol{j}=(0, 1)$، $\mathbf{0}=(0, 0)$.



7.3.2 ـ رەسىم



8.3.2 ـ رەسىم

8.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات تەكشىلىكىدە، كوئوردېنات بېشى O نى باش نۇقتا قىلىپ $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ نى سىزساق، ئۇ ھالدا A نۇقتىنىڭ ئورنى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ تەرىپىدىن بىردىنبىر ئېنىقلىنىدۇ.

$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{OA}$ ۋېكتورنىڭ كوئوردېناتى (x, y) دەل ئاخىرقى نۇقتا A نىڭ كوئوردېناتى بولىدۇ؛ ئەكسىچە، ئاخىرقى نۇقتا A نىڭ كوئوردېناتى (x, y) مۇ $\overrightarrow{OA}$ ۋېكتورنىڭ كوئوردېناتى بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ھەربىر تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنى بىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى ئارقىلىق بىردىنبىر ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

2 ـ مىسال. 9.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$، $\boldsymbol{d}$ ۋېكتورلارنى ئاساس $\boldsymbol{i}$ ۋە $\boldsymbol{j}$ ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم ئىپادىلەيلى ھەمدە ئۇلارنىڭ كوئوردېناتىنى تاپايلى.

يېشىش: 9.3.2 ـ رەسىمدىن بىلەلەيمىزكى،

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},$$

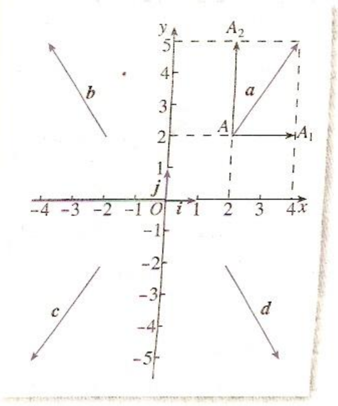
$$\therefore\ \boldsymbol{a}=(2, 3).$$

ئوخشاش يول بىلەن،

$$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=(-2, 3);$$

$$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(-2, -3);$$

$$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(2, -3).$$



9.3.2 ـ رەسىم

2 ـ باب

3-3-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلار ئۈستىدە كوئوردىناتلىق ئەمەل

مۇلاھىزە؟

$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$، $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، سىز $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، $\lambda\boldsymbol{a}$ لارنىڭ كوئوردىناتىنى تاپالامسىز؟

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}),$$

ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەرنىڭ گۇرۇپپىلاش قانۇنى ۋە تارقىتىش قانۇنىغا ئاساسەن:

$$(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})$$
$$=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j},$$

يەنى

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2).$$

ئوخشاش يول بىلەن،

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2).$$

دېمەك، ئىككى ۋېكتورنىڭ يىغىندىسى (ئايرىمىسى) نىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم مۇشۇ ئىككى ۋېكتورنىڭ ماس كوئوردىناتلىرىنىڭ يىغىندىسى (ئايرىمىسى) غا تەڭ بولىدۇ.

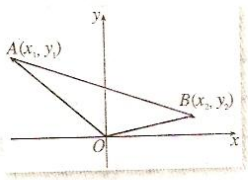
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j},$$

يەنى

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1).$$

دېمەك، ھەقىقىي سان بىلەن ۋېكتورنىڭ كۆپەيتمىسىنىڭ كوئوردىناتى مۇشۇ ھەقىقىي ساننى ئەسلىدىكى ۋېكتورنىڭ ماس كوئوردىناتلىرىغا كۆپەيتكەنگە تەڭ بولىدۇ.

3 ـ مىسال. 10.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\overrightarrow{AB}$ نىڭ كوئوردىناتىنى تاپايلى.



10.3.2 ـ رەسىم

يېشىش:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(x_2, y_2)-(x_1, y_1)$$
$$=(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، بىر ۋېكتورنىڭ كوئوردىناتى مۇشۇ ۋېكتورنى ئىپادىلەيدىغان يۆنىلىشلىك كېسىندىنىڭ ئاخىرقى نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىدىن باش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى ئېلىۋەتكەنگە تەڭ بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

10.3.2 ـ رەسىمدە كوئوردىناتى $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ بولغان P نۇقتىنى كۆرسىتىپ بېرەلەمسىز؟

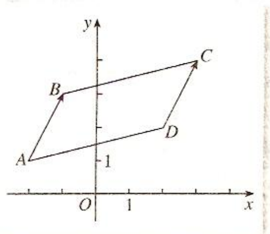
P نۇقتىنى كۆرسىتىپ بولغاندىن كېيىن، $\overrightarrow{AB}$ ۋېكتورنىڭ كوئوردېنات كوئوردېناتى بېشىنى باش نۇقتا، P نۇقتىنى ئاخىرقى نۇقتا قىلغان ۋېكتورنىڭ كوئوردېناتى بىلەن ئوخشاش ئىكەنلىكىنى بايقايمىز. شۇنداق قىلىپ، ۋېكتورنىڭ كوئوردېناتى بىلەن نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى ئارىسىدا باغلىنىش ئورنىتىلدى.

4 - مىسال. $\boldsymbol{a}=(2, 1)$، $\boldsymbol{b}=(-3, 4)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ لارنىڭ كوئوردېناتىنى تاپايلى.

يېشىش:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2, 1)+(-3, 4)=(-1, 5);$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2, 1)-(-3, 4)=(5, -3);$$
$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}&=3(2, 1)+4(-3, 4)\\&=(6, 3)+(-12, 16)\\&=(-6, 19).\end{aligned}$$

5 - مىسال. 11.3.2 - رەسىمدىكىدەك، $\square ABCD$ نىڭ ئۈچ چوققىسى A، B، C نىڭ كوئوردېناتى ئايرىم - ئايرىم ھالدا $(-2, 1)$، $(-1, 3)$، $(3, 4)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ئۇنىڭ D چوققىسىنىڭ كوئوردېناتىنى تاپايلى.



11.3.2 - رەسىم

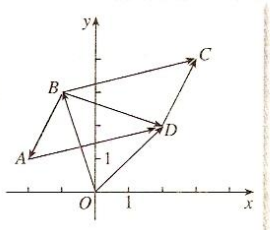
1 - خىل يېشىش ئۇسۇلى: 11.3.2 - رەسىمدىكىدەك، D چوققىسىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلايلى.

$$\because\ \overrightarrow{AB}=(-1-(-2), 3-1)=(1, 2),$$
$$\overrightarrow{DC}=(3-x, 4-y),$$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ غا ئاساسەن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(1, 2)=(3-x, 4-y).$$
$$\therefore\ \begin{cases}1=3-x,\\2=4-y.\end{cases}$$
$$\therefore\ \begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$$

شۇنىڭ ئۈچۈن D چوققىسىنىڭ كوئوردېناتى $(2, 2)$.



12.3.2 - رەسىم

2 - خىل يېشىش ئۇسۇلى: 12.3.2 - رەسىمدىكىدەك، ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك قائىدىسىدىن تۆۋەندىكىنى بىلىشكە بولىدۇ:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\\&=(-2-(-1), 1-3)+(3-(-1), 4-3)\\&=(3, -1),\end{aligned}$$

ھەمدە

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}\\&=(-1, 3)+(3, -1)\\&=(2, 2).\end{aligned}$$

شۇنىڭ ئۈچۈن D چوققىسىنىڭ كوئوردېناتى $(2, 2)$.

ئىككى خىل يېشىشتىكى پىكىر قىلىش ئۇسۇلىنىڭ پەرقى ۋە ئوخشاشلىقىنى سېلىشتۇرالامسىز؟

2 ـ باب

4-3-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنىڭ سىزىقداش بولۇشىنىڭ كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى

مۇلاھىزە ؟

ئىككى سىزىقداش ۋېكتورنى كوئوردىنات ئارقىلىق قانداق ئىپادىلەش كېرەك؟

$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$، $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ (بۇنىڭدا $\boldsymbol{b}\neq \boldsymbol{0}$) دەپ پەرەز قىلىمىز. بىزگە مەلۇمكى، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار سىزىقداش بولغاندا، پەقەت ۋە پەقەت ھەقىقىي سان λ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{b}.$$

بۇنى كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىسەك، مۇنداق بولىدۇ:

$$(x_1, y_1)=\lambda (x_2, y_2),$$

يەنى

$$\begin{cases} x_1=\lambda x_2, \\ y_1=\lambda y_2. \end{cases}$$

λ نى يوقاتساق تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x_1y_2-x_2y_1=0.$$

دېمەك، پەقەت ۋە پەقەت

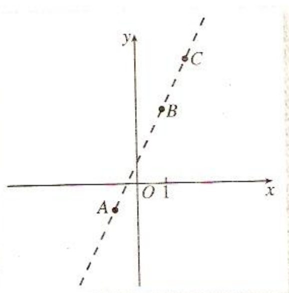
$$x_1y_2-x_2y_1=0$$

بولغاندىلا، $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}\neq \boldsymbol{0}$) ۋېكتورلار سىزىقداش بولىدۇ.

6 ـ مىسال. $\boldsymbol{a}=(4, 2)$، $\boldsymbol{b}=(6, y)$ ھەمدە $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، y نى تاپايلى.

يېشىش:

$$\because\ \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b},$$
$$\therefore\ 4y-2\times 6=0.$$
$$\therefore\ y=3.$$



13.3.2 ـ رەسىم

7 ـ مىسال. $A(-1, -1)$، $B(1, 3)$، $C(2, 5)$ لار بېرىلگەن. A، B، C ئۈچ نۇقتىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى.

يېشىش: تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا A، B، C ئۈچ نۇقتىنى بەلگىلەپ (13.3.2 ـ رەسىم)، شەكىلنى كۆزىتىش ئارقىلىق A، B، C ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش ئىكەنلىكىنى قىياس قىلىمىز. تۆۋەندە بۇنى ئىسپاتلايمىز.

$\because\ \overrightarrow{AB}=(1-(-1),\quad 3-(-1))=(2,4),$

$\quad\ \overrightarrow{AC}=(2-(-1),\quad 5-(-1))=(3,6),$

يەنە

$2\times 6-3\times 4=0,$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\ //\ \overrightarrow{AC}.$

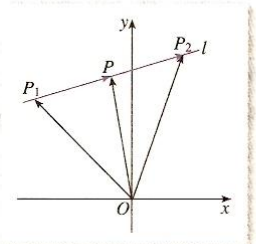
$\because$ AB، AC تۈز سىزىقلار ئورتاق نۇقتا A غا ئىگە،

$\therefore$ A، B، C ئۈچ نۇقتا سىزىقداش.

8 ـ مىسال. P نۇقتىنى P_1P_2 كېسىكنىڭ ئۈستىدىكى بىر نۇقتا، P_1، P_2 لەرنىڭ كوئوردىناتلىرىنى ئايرىم ئايرىم (x_1, y_1)، (x_2, y_2) دەپ پەرەز قىلايلى.

(1) P نۇقتا P_1P_2 كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولغاندىكى P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تاپايلى؛

(2) P نۇقتا P_1P_2 كېسىكنى تەڭ ئۈچ بۆلەككە بۆلگۈچى نۇقتا بولغاندىكى P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تاپايلى.



14.3.2 ـ رەسىم

يېشىش: (1) 14.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەرگە ئاساسەن:

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

شۇڭا، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

(2) 15.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، P نۇقتا P_1P_2 كېسىكنى تەڭ ئۈچ بۆلەككە بۆلگۈچى نۇقتا بولغاندا، ئىككى خىل ئەھۋال بولىدۇ، يەنى

$$\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}\ \ \text{ياكى}\ \ \overrightarrow{P_1P}=2\overrightarrow{PP_2}.$$

ئەگەر $\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$ (15.3.2 ـ رەسىم (1)) بولسا، ئۇ ھالدا

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP_1}+\frac{1}{3}\ \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$=\overrightarrow{OP_1}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1})=\frac{2}{3}\ \overrightarrow{OP_1}+\frac{1}{3}\ \overrightarrow{OP_2}$$

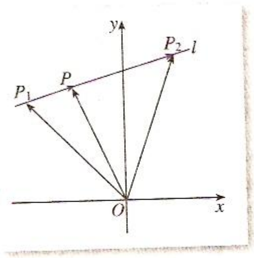
$$=\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\ \frac{2y_1+y_2}{3}\right),$$

يەنى P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى مۇنداق بولىدۇ:

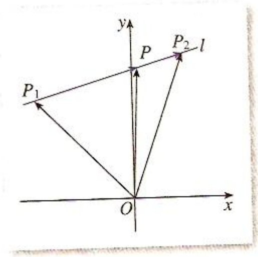
$$\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\ \frac{2y_1+y_2}{3}\right).$$

ئوخشاش يول بىلەن، ئەگەر $\overrightarrow{P_1P}=2\overrightarrow{PP_2}$ (15.3.2 ـ رەسىم (2)) بولسا، ئۇ ھالدا P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى مۇنداق بولىدۇ:

$$\left(\frac{x_1+2x_2}{3},\ \frac{y_1+2y_2}{3}\right).$$



(1)

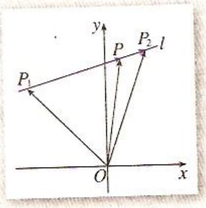


(2)

15.3.2 - رەسىم

ئىزدىنىش

16.3.2 - رەسىمدىكىدەك، $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\ \overrightarrow{PP_2}$ بولغاندا، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى قانداق بولىدۇ؟



16.3.2 - رەسىم

مەشىق

1. $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلارنىڭ كوئوردىناتى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ لارنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $\boldsymbol{a}=(-2, 4)$, $\boldsymbol{b}=(5, 2)$;

(2) $\boldsymbol{a}=(4, 3)$, $\boldsymbol{b}=(-3, 8)$;

(3) $\boldsymbol{a}=(2, 3)$, $\boldsymbol{b}=(-2, -3)$;

(4) $\boldsymbol{a}=(3, 0)$, $\boldsymbol{b}=(0, 4)$.

2. $\boldsymbol{a}=(3, 2)$، $\boldsymbol{b}=(0, -1)$ لار بېرىلگەن، $-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$، $4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ لارنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

3. A، B ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى بېرىلگەن، $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BA}$ لارنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

(1) $A(3, 5)$, $B(6, 9)$;

(2) $A(-3, 4)$, $B(6, 3)$;

(3) $A(0, 3)$, $B(0, 5)$;

(4) $A(3, 0)$, $B(8, 0)$.

4. $A(0, 1)$، $B(1, 0)$، $C(1, 2)$، $D(2, 1)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، AB بىلەن CD نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە ئىسپاتلاڭ.

5. AB كېسىكىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $A(2, 1)$, $B(4, 3)$;

(2) $A(-1, 2)$, $B(3, 6)$;

(3) $A(5, -4)$, $B(3, -6)$.

6. $\overrightarrow{OA}=(2, 3)$، $\overrightarrow{OB}=(6, -3)$ ۋېكتورلار ھەمدە P نۇقتىنىڭ AB كېسىكنى تەڭ ئۈچ بۆلەككە بۆلگۈچى نۇقتا ئىكەنلىكى بېرىلگەن، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

7. $A(2, 3)$، $B(4, -3)$لار ھەمدە P نۇقتا AB كېسىكنىڭ داۋامى ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى، $|\overrightarrow{AP}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

3.2 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنى ئىپادىلەيدىغان يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ باش نۇقتىسى A نىڭ كوئوردىناتى بېرىلگەن، ئۇنىڭ ئاخىرقى نۇقتىسى B نىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $\boldsymbol{a}=(-2, 1)$, $A(0, 0)$;

(2) $\boldsymbol{a}=(1, 3)$, $A(-1, 5)$;

(3) $\boldsymbol{a}=(-2, -5)$, $A(3, 7)$.

2. كوئوردىنات بېشىغا تەسىر قىلغۇچى ئۈچ كۈچ $\boldsymbol{F}_1=(3, 4)$، $\boldsymbol{F}_2=(2, -5)$، $\boldsymbol{F}_3=(3, 1)$ لار بېرىلگەن، كوئوردىنات بېشىغا تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچ $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ نىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

3. $\square ABCD$ نىڭ $A(-1, -2)$، $B(3, -1)$، $C(5, 6)$ چوققىلىرى بېرىلگەن، ئۇنىڭ D چوققىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

4. $A(1, 1)$، $B(-1, 5)$ نۇقتىلار ۋە $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ لار بېرىلگەن، C، D، E نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

5. x قانداق قىممەتنى ئالغاندا، $\boldsymbol{a}=(2, 3)$ بىلەن $\boldsymbol{b}=(x, -6)$ سىزىقداش بولىدۇ؟

6. $A(-2, -3)$، $B(2, 1)$، $C(1, 4)$، $D(-7, -4)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، $\overrightarrow{AB}$ بىلەن $\overrightarrow{CD}$ نىڭ سىزىقداش ياكى سىزىقداش ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ.

7. $O(0, 0)$، $A(1, 2)$، $B(-1, 3)$ نۇقتىلار ۋە $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$ لار بېرىلگەن، A'، B' نۇقتىلار بىلەن $\overrightarrow{A'B'}$ ۋېكتورنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. $O(0, 0)$، $A(1, 2)$، $B(4, 5)$ نۇقتىلار ۋە $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ بېرىلگەن. P نۇقتىنىڭ $t=1$، $t=\frac{1}{2}$، $t=-2$، $t=2$ بولغاندىكى كوئوردىناتىنى ئايرىم - ئايرىم تېپىڭ.

2. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى نۇقتىلارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ

ھەمدە ئىسپاتلاڭ:

(1) $A(1, 2)$, $B(-3, -4)$, $C(2, 3.5)$;

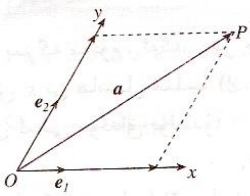
(2) $P(-1, 2)$, $Q(0.5, 0)$, $R(5, -6)$;

(3) $E(9, 1)$, $F(1, -3)$, $G(8, 0.5)$.

3. e_1، e_2 لەرنى تەكشىلىكتىكى بىر گۇرۇپپا ئاساس دەپ پەرەز قىلىپ تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلاڭ:

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ بولغاندا، ھامان $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ بولىدۇ.

4. رەسىمدىكىدەك، Ox، Oy لەرنى تەكشىلىكتە 60° لۇق بۇلۇڭ ھاسىل قىلىپ كېسىشكەن ئىككى سان ئوقى، e_1، e_2 لەرنى ئايرىم - ئايرىم ھالدا x ئوق، y ئوقنىڭ ئوڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش يۆنىلىشتىكى بىرلىك ۋېكتور دەپ پەرەز قىلايلى، ئەگەر ۋېكتور $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$ بولسا، ئۇ ھالدا تەرتىپلىك سانلار جۈپى (x, y) ۋېكتور $\overrightarrow{OP}$ نىڭ كوئوردىنات سىستېمىسى xOy تىكى كوئوردىناتى دەپ ئاتىلىدۇ. $\overrightarrow{OP} = 3e_1 + 2e_2$ دەپ پەرەز قىلىپ،



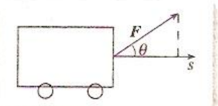
(4 – مىسال ئۈچۈن)

(1) $|\overrightarrow{OP}|$ نىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى تېپىڭ؛

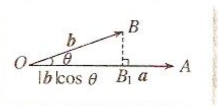
(2) تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىغا ئاساسلانغاندا، بۇ مىسالدىكى ۋېكتورلارنىڭ كوئوردىناتىغا دائىر بەلگىلىمە مۇۋاپىق بولامدۇ؟

4-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار (سانلىق) كۆپەيتمىسى

1-4-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىنىڭ فىزىكىلىق ئارقا كۆرۈنۈشى ۋە ئۇنىڭ مەنىسى



1.4.2 ـ رەسىم



2.4.2 ـ رەسىم

بىزگە مەلۇم، ئەگەر بىر جىسىم $\boldsymbol{F}$ كۈچنىڭ تەسىرىدە ئورۇن يۆتكىلىش $\boldsymbol{s}$ نى ھاسىل قىلسا (1.4.2 ـ رەسىم)، ئۇ ھالدا $\boldsymbol{F}$ كۈچنىڭ ئىشلىگەن ئىشى مۇنداق بولىدۇ:

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

بۇنىڭدىكى θ بولسا $\boldsymbol{F}$ بىلەن $\boldsymbol{s}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى.

ئىش بىر سكالىيار بولۇپ، ئۇ كۈچ بىلەن ئورۇن يۆتكىلىشتىن ئىبارەت ئىككى ۋېكتور تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ. بۇ، بىزگە مۇنداق بىر خىل ئىلھام بېرىدۇ. «ئىش»نى ئىككى ۋېكتور ئۈستىدىكى بىر خىل ئەمەل بېجىرىشنىڭ نەتىجىسى دەپ قاراشقا بولامدۇ ـ يوق؟

بۇنىڭ ئۈچۈن، بىز ۋېكتورلارنىڭ «سكالىيار كۆپەيتمىسى» ئۇقۇمىنى كىرگۈزىمىز.

نۆل بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ بېرىلگەن بولسا، بىز سانلىق مىقدار $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ نى $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ **سكالىيار كۆپەيتمىسى** (ياكى **ئىچكى كۆپەيتمىسى**) (inner product) دەيمىز ۋە ئۇنى $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ قىلىپ يازىمىز، يەنى

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

بۇنىڭدىكى θ بولسا $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى، $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ ($|\boldsymbol{b}|\cos\theta$) ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ $\boldsymbol{b}$ يۆنىلىشتىكى (ۋېكتور $\boldsymbol{b}$ نىڭ $\boldsymbol{a}$ يۆنىلىشتىكى) **پروېكسىيىسى** (projection) دېيىلىدۇ. 2.4.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $OB_1=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. بىز مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز: نۆل ۋېكتور بىلەن خالىغان بىر ۋېكتورنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى 0 بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى بىر سانلىق مىقداردىن ئىبارەت، ئۇنداقتا ئۇ قانداق چاغدا مۇسبەت، قانداق چاغدا مەنپىي بولىدۇ؟

ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەرگە سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق بايقاشقا بولىدۇكى، ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەلنىڭ نەتىجىسى بىر ۋېكتور بولىدۇ، ئەمما ئىككى ۋېكتورنىڭ

2 ـ باب

سكاليار كۆپەيتمىسى بىر سانلىق مىقدار بولۇپ، بۇ سانلىق مىقدارنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى ئىككى ۋېكتورنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولىدۇ.

ئىزدىنىش

ۋېكتورلارنىڭ سكاليار كۆپەيتمىسىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكى يەكۈنلەرگە ئىگە بولالامسىز؟

a ۋە b نى نۆل بولمىغان ۋېكتور دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

(1) $a \perp b \Leftrightarrow a\cdot b=0$.

(2) a بىلەن b ئوخشاش يۆنىلىشلىك بولغاندا، $a\cdot b=|a||b|$؛ a بىلەن b قارىمۇقارشى يۆنىلىشلىك بولغاندا، $a\cdot b=-|a||b|$ بولىدۇ. ئالاھىدە ئەھۋالدا:

$$a\cdot a^{❶}=|a|^2 \text{ ياكى } |a|=\sqrt{a\cdot a}.$$

(3) $|a\cdot b|\leqslant|a||b|$.

❶ $a\cdot a$ دائىم a^2 قىلىپ يېزىلىدۇ.

1 ـ مىسال. $|a|=5$، $|b|=4$، a بىلەن b نىڭ ئارا بۇلۇڭى $\theta=120°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $a\cdot b$ نى تاپايلى.

يېشىش:

$$\begin{aligned} a\cdot b &= |a|\,|b|\cos\theta \\ &=5\times4\times\cos120° \\ &=5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right). \\ &=-10. \end{aligned}$$

ۋېكتورنىڭ پروييېكسىيىسىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، $a\cdot b$ نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىگە ئىگە بولىمىز: **سكاليار كۆپەيتمە $a\cdot b$ ۋېكتور a نىڭ ئۇزۇنلۇقى $|a|$ بىلەن ۋېكتور b نىڭ a يۆنىلىشتىكى پروييېكسىيىسى $|b|\cos\theta$ نىڭ كۆپەيتمىسىگە تەڭ.**

ئىزدىنىش

ئەمەللەر قانۇنى بىلەن ئەمەل بىر ـ بىرىگە زىچ باغلانغان بولىدۇ. ۋېكتورلارنىڭ سكاليار كۆپەيتمىسى كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن، تەبىئىي ھالدا ئۇلارنىڭ قانداق ئەمەللەر قانۇنىنى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقىغا قاراپ بېقىشقا توغرا كېلىدۇ. سىز ۋېكتورلارنىڭ سكاليار كۆپەيتمىسىگە دائىر تۆۋەندىكى ئەمەللەر قانۇنىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

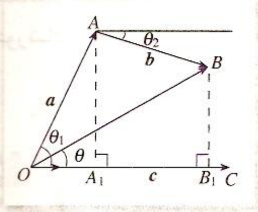
ۋېكتور a، b، c لار ۋە ھەقىقىي سان λ بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا:

(1) $a\cdot b=b\cdot a$;

(2) $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)=a\cdot(\lambda b)$;

(3) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

تۆۋەندە بىز ئەمەللەر قانۇنى (3) نى ئىسپاتلايمىز.



3.4.2 - رەسىم

ئىسپات: 3.4.2 - رەسىمدىكىدەك، خالىغان بىر O نۇقتىنى ئېلىپ، $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ لارنى سىزايلى. چۈنكى $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (يەنى $\overrightarrow{OB}$) نىڭ $\boldsymbol{c}$ يۆنىلىشتىكى پروييېكسىيىسى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لارنىڭ $\boldsymbol{c}$ يۆنىلىشتىكى پروييېكسىيىلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ، يەنى

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{b}|\cos\theta_2,$$

$$\therefore\quad |\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{a}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta_2.$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}.$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

2 - مىسال. بىزگە مەلۇم، خالىغان $a, b\in\mathbf{R}$ لارغا نىسبەتەن ھامان تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

خالىغان $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلارغا نىسبەتەن، مۇشۇنىڭغا ئوخشاش تۆۋەندىكىدەك يەكۈنلەرنى چىقىرىشقا بولامدۇ؟

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

يېشىش:

(1) $$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2;\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2.\end{aligned}$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، يەكۈن كۈچكە ئىگە بولىدۇ.

3 - مىسال. $|\boldsymbol{a}|=6$، $|\boldsymbol{b}|=4$، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى $60°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ نى تاپايلى.

يېشىش:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta-6|\boldsymbol{b}|^2\\&=6^2-6\times4\times\cos60°-6\times4^2\\&=-72.\end{aligned}$$

4 - مىسال. $|\boldsymbol{a}|=3$، $|\boldsymbol{b}|=4$ ھەمدە $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ سىزىقداش ئەمەسلىكى بېرىلگەن. k قانداق قىممەتنى ئالغاندا، ۋېكتور $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ بىلەن $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ ئۆزئارا تىك بولىدۇ؟

يېشىش: $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ بىلەن $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ ئۆزئارا تىك بولۇشنىڭ شەرتى

$$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$$

بولۇشتىن ئىبارەت، يەنى

$$\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=0.$$

$\because\quad \boldsymbol{a}^2=3^2=9,\ \ \boldsymbol{b}^2=4^2=16,$

$\therefore\quad 9-16k^2=0.$

$\therefore\quad k=\pm\dfrac{3}{4}.$

دېمەك، $k=\pm\dfrac{3}{4}$ بولغاندا، $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ بىلەن $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ ئۆز ئارا تىك بولىدۇ.

مەشق

1. $|\boldsymbol{p}|=8$، $|\boldsymbol{q}|=6$، $\boldsymbol{p}$ بىلەن $\boldsymbol{q}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى $60°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$ نى تېپىڭ.

2. $\triangle ABC$ دا، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\triangle ABC$ نىڭ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ ياكى $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ بولغاندىكى شەكلىگە ھۆكۈم قىلىڭ.

3. $|\boldsymbol{a}|=6$، $\boldsymbol{e}$ بىرلىك ۋېكتور ئىكەنلىكى بېرىلگەن. $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{e}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ ئايرىم - ئايرىم $45°$، $90°$، $135°$ قا تەڭ بولغاندا، $\boldsymbol{a}$ نىڭ $\boldsymbol{e}$ يۆنىلىشتىكى پروييېكسىيىسىنى شەكىل سىزىپ ئىپادىلەڭ ھەمدە ئۇنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

2-4-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى، مودېلى ۋە ئارا بۇلۇڭى

ئىزدىنىش

نۆل بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$، $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ بېرىلگەندە، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ نى $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ كوئوردېناتى ئارقىلىق قانداق ئىپادىلەش كېرەك؟

$\because\quad \boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},\ \ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j},$

$\therefore\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})$

$\qquad\qquad =x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2.$

$\because\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,$

$\qquad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,$

$\therefore\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.$

دېمەك، ئىككى ۋېكتورنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى ئۇلارنىڭ ماس كوئوردېناتلىرى كۆپەيتمىسىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ.

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

(1) ئەگەر $\boldsymbol{a}=(x, y)$ بولسا، ئۇ ھالدا $|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$ ياكى $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$ بولىدۇ.

ئەگەر $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنى ئىپادىلەيدىغان يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ باش نۇقتىسى بىلەن ئاخىرقى نۇقتىسىنىڭ كوئوردېناتى ئايرىم - ئايرىم (x_1, y_1)، (x_2, y_2) بولسا، ئۇ ھالدا:

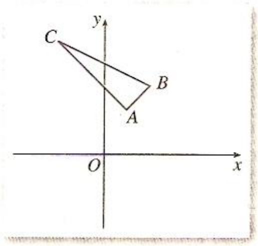
$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

(2) $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$ ، $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.$$

5 - مىسال. $A(1,\ 2)$ ، $B(2,\ 3)$ ، $C(-2,\ 5)$ نۇقتىلار بېرىلگەن. $\triangle ABC$ نىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلايلى ھەمدە ئىسپاتلايلى.

يېشىش: 4.4.2 - رەسىمدىكىدەك، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا $A(1,\ 2)$ ، $B(2,\ 3)$ ، $C(-2,\ 5)$ ئۈچ نۇقتىنى بەلگىلىسەك، $\triangle ABC$ نىڭ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ ئىكەنلىكىنى بايقايمىز. تۆۋەندە بۇنى ئىسپاتلايمىز.



4.4.2 - رەسىم

$$\because\ \overrightarrow{AB}=(2-1,\ 3-2)=(1,\ 1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-2-1,\ 5-2)=(-3,\ 3),$$
$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-3)+1\times3=0,$$
$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن $\triangle ABC$ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىنىڭ نۆل بولۇش - بولماسلىقى، ماس ئىككى كېسىك ياكى تۈز سىزىقنىڭ ئۆزئارا تىك بولۇش - بولماسلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتىكى مۇھىم ئۇسۇللارنىڭ بىرى ھېسابلىنىدۇ.

$\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ لارنى نۆل بولمىغان ۋېكتور، $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$ ، $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$ ، θ نى $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى دەپ پەرەز قىلساق، ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىنىڭ ئېنىقلىمىسى ۋە كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشىگە ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشكىلى بولىدۇ:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.}$$

6 - مىسال. $\boldsymbol{a}=(5,\ -7)$ ، $\boldsymbol{b}=(-6,\ -4)$ دەپ پەرەز قىلىپ، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ نى ۋە $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ نى تاپايلى (1° قىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=5\times(-6)+(-7)\times(-4)\\&=-30+28\\&=-2.\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74},\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=\sqrt{52},$$

ھېسابلىغۇچتىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{74}\times\sqrt{52}}\approx-0.03.$$

ھېسابلىغۇچتىكى $\cos^{-1}$ كۇنۇپكىدىن پايدىلانساق:

$$\theta\approx1.6\ \text{rad}=92^\circ.$$

مەشىق

1. $\boldsymbol{a}=(-3, 4)$، $\boldsymbol{b}=(5, 2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $|\boldsymbol{a}|$، $|\boldsymbol{b}|$، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ لارنى تېپىڭ.

2. $\boldsymbol{a}=(2, 3)$، $\boldsymbol{b}=(-2, 4)$، $\boldsymbol{c}=(-1, -2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$، $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$، $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$، $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$ لارنى تېپىڭ.

3. $\boldsymbol{a}=(3, 2)$، $\boldsymbol{b}=(5, -7)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ نى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تېپىڭ ($1°$ قىچە ئېنىقلىقتا).

$\cos\theta\approx 0.0324$ $\theta\approx 88°$

4.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $|\boldsymbol{a}|=3$، $|\boldsymbol{b}|=4$ ھەمدە $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى $\theta=150°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$، $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$، $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ لارنى تېپىڭ.

$-6\sqrt3$ $\quad 25-12\sqrt3$ $\quad \sqrt{25-12\sqrt3}$

2. $\triangle ABC$ دا، $\boldsymbol{a}=5$، $\boldsymbol{b}=8$، $C=60°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ نى تېپىڭ. -20

3. $|\boldsymbol{a}|=2$، $|\boldsymbol{b}|=5$، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$، $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ لارنى تېپىڭ.

4. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$ نى ئىسپاتلاڭ.

5. ئالدى بىلەن A، B، C لارنى چوققا قىلغان ئۈچبۇلۇڭنى سىزىپ شەكلىنى كۆزىتىڭ، ئاندىن ئىسپاتلاڭ:

(1) $A(-1, -4)$, $B(5, 2)$, $C(3, 4)$;

(2) $A(-2, -3)$, $B(19, 4)$, $C(-1, -6)$;

(3) $A(2, 5)$, $B(5, 2)$, $C(10, 7)$.

6. $|\boldsymbol{a}|=12$، $|\boldsymbol{b}|=9$، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-54\sqrt2$ دەپ پەرەز قىلىپ، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ نى تېپىڭ.

$\theta=135°$

7. $|\boldsymbol{a}|=4$، $|\boldsymbol{b}|=3$، $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ نى تېپىڭ.

$\theta=120°$

8. $|\boldsymbol{a}|=8$، $|\boldsymbol{b}|=10$، $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=16$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ نى تېپىڭ ($1°$ قىچە ئېنىقلىقتا). (ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانسىڭىز بولىدۇ)

$\theta\approx 55°$

9. $A(1, 0)$، $B(5, -2)$، $C(8, 4)$، $D(4, 6)$ لارنى چوققا قىلغان تۆت تەرەپلىكنىڭ تىك تۆت بۇلۇڭلۇق بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

$\overrightarrow{AB}=(4,-2)$ $\overrightarrow{BC}=(3,6)$, $\overrightarrow{DC}=(4,-2)$ $\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

10. $|\boldsymbol{a}|=3$، $\boldsymbol{b}=(1, 2)$ ھەمدە $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}$ نىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

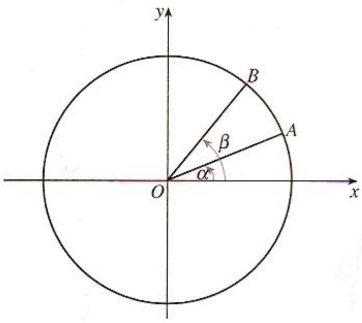
$a(x,y)$ $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=2x\end{cases}$ $a=(\frac{3\sqrt5}{5},\frac{6\sqrt5}{5})$

11. $\boldsymbol{a}=(4, 2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\boldsymbol{a}$ غا تىك بولغان بىرلىك ۋېكتورنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

$b=(x,y)$ $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 4x+2y=0\end{cases}$ $b=(\frac{\sqrt5}{5},-\frac{2\sqrt5}{5})$ 或 $b=(-\frac{\sqrt5}{5},\frac{2\sqrt5}{5})$

B گۇرۇپپا

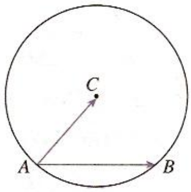
1. $\boldsymbol{a}$ نۆل بولمىغان ۋېكتور ھەمدە $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{c}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$ نى ئىسپاتلاڭ.



(2 - مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، كوئوردىنات بېشىنى چەمبەر مەركىزى، بىرلىك ئۇزۇنلۇقنى رادىئۇس قىلغان چەمبەر ئۇستىدىكى ئىككى نۇقتا $A(\cos\alpha , \sin\alpha)$ ، $B(\cos\beta , \sin\beta)$ بېرىلگەن. A ، B ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ئارقىلىق $\angle AOB$ نىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى ئىپادىلەڭ.

3. خالىغان $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ غا نىسبەتەن، تەڭسىزلىك $(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ نىڭ ھامان كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

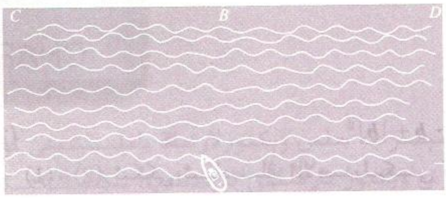


(4 - مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكى C چەمبەرنىڭ رادىئۇسى ياكى AB خوردىسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بېرىلسىلا، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ نىڭ قىممىتىنى تاپقىلى بولامدۇ؟

5. تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ئىنتايىن مۇھىم بىر ئۇقۇم، ئۇنىڭدىن پايدىلىنىپ تەكشىلىكتىكى گېئومېترىيىگە دائىر نۇرغۇن ھۆكۈملۈكلەرنى ئاسانلا ئىسپاتلىغىلى بولىدۇ. مەسىلەن، گوگۇ تېئورېمىسى، رومبىنىڭ دىئاگوناللىرىنىڭ بىر - بىرىگە تىك بولۇشى، تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ دىئاگوناللىرىنىڭ ئۆزئارا تەڭ بولۇشى، كۋادراتنىڭ دىئاگوناللىرىنىڭ بىر - بىرىنى تىك تەڭ بۆلۈشى قاتارلىقلار. بۇلارنى تەپسىلىي ئىسپاتلاڭ.

ۋېكتورلار ئۈستىدىكى ئەمەللەردىن پايدىلىنىپ، ئۈچبۇلۇڭ، تۆت تەرەپلىك، چەمبەر قاتارلىق تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنىڭ باشقا خۇسۇسىيەتلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

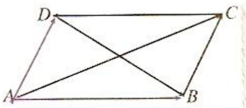


5-2 تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنىڭ قوللىنىلىشىغا دائىر مىساللار

1-5-2 تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى ۋېكتور ئۇسۇلى

ئەمەل بولغانلىقى ئۈچۈنلا، ۋېكتورنىڭ قۇدرىتى چەكسىز بولىدۇ. ئەگەر ئەمەل بىجىرىشكە بولمىسا، ۋېكتور پەقەت يۆنىلىشنى كۆرسىتىدىغان يول بەلگىسى بولۇپ قالىدۇ.

ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەر بىلەن سكاليار كۆپەيتمە ئۈستىدىكى ئەمەل روشەن گېئومېترىيىلىك ئارقا كۆرۈنۈشكە ئىگە بولغانلىقتىن، تەكشىلىكتىكى گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنىڭ نۇرغۇن خۇسۇسىيەتلىرى، مەسىلەن، پاراللېل يۆتكەش، تەڭ بولۇش، ئوخشاشلىق، ئۇزۇنلۇق، ئارا بۇلۇڭ قاتارلىقلارنى ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەر ۋە سكاليار كۆپەيتمە ئارقىلىق ئىپادىلەپ چىقىشقا بولىدۇ. شۇڭا، تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى بەزى مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشقا بولىدۇ. تۆۋەندە بىرنەچچە كونكرېت ئەمەلىي مىسال ئارقىلىق ۋېكتور ئۇسۇلىنىڭ تەكشىلىكتىكى گېئومېترىيىدە قوللىنىلىشىنى چۈشەندۈرىمىز.



1.5.2 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. پاراللېل تۆت تەرەپلىك ۋېكتورلارنى قوشۇش ۋە ئېلىشنى ئىپادىلەيدىغان گېئومېترىيىلىك مودېل. 1.5.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ، سىز پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگونالللىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن قوشنا ئىككى تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بايقىيالامسىز؟

تەھلىل: $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ، $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\boldsymbol{a}|^2,\ |\overrightarrow{AD}|^2=|\boldsymbol{b}|^2.$$

ئۇزۇنلۇققا چېتىلىدىغان مەسىلىلەردە دائىم ۋېكتورنىڭ سكاليار كۆپەيتمىسىنى ئويلىشىمىز، بۇنىڭ ئۈچۈن بىز $|\overrightarrow{AC}|^2$ بىلەن $|\overrightarrow{DB}|^2$ نى ھېسابلايمىز.

يېشىش:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2&=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned} \qquad (1)$$

ئوخشاش يول بىلەن

$$|\overrightarrow{DB}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2. \qquad (2)$$

(1)، (2) ئىككى ئىپادىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى كۆزەتسەك، بايقاشقا بولىدۇكى، (2) + (1) دىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{DB}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)=2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2).$$

يەنى پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ ئىككى دىئاگونالىنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى ئۇنىڭ قوشنا ئىككى تەرىپىنىڭ كۋادراتلىرى يىغىندىسىنىڭ ئىككى ھەسسىسىگە تەڭ بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

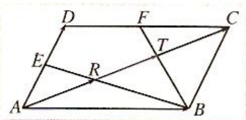
يۇقىرىدىكى مۇناسىۋەتنى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلانماي ئىسپاتلىيالامسىز؟

تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيە كۆپ ھاللاردا ئارىلىق (كېسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى)، ئارا بۇلۇڭ مەسىلىلىرىگە چېتىلىدۇ، ئەمما تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلار ئۈستىدىكى ئەمەللەر، بولۇپمۇ سكالىيار كۆپەيتمە ئاساسلىقى ۋېكتورنىڭ مودېلى بىلەن ۋېكتورلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىغا چېتىلىدۇ، شۇڭا بىز قىسمەن گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلالايمىز. گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا، ئالدى بىلەن ماس نۇقتا، كېسىك، ئارا بۇلۇڭ قاتارلىق گېئومېتىرىيىلىك ئېلېمېنتلارنى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلىۋالىمىز؛ ئاندىن نۇقتا، كېسىك قاتارلىق ئېلېمېنتلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتلەرنى ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر، بولۇپمۇ سكالىيار كۆپەيتمە ئارقىلىق مۇھاكىمە قىلىمىز؛ ئەڭ ئاخىرىدا ھېسابلاش نەتىجىسىنى گېئومېتىرىيىلىك مۇناسىۋەتكە «ئايلاندۇرۇۋېلىپ»، گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنىڭ يەكۈنىگە ئىگە بولىمىز. مانا بۇ تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئۇسۇلى ئارقىلىق ھەل قىلىشتىكى «ئۈچ باسقۇچ»:

(1) تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيە بىلەن ۋېكتورلارنىڭ باغلىنىشىنى ئورنىتىش، مەسىلىدىكى بىر ـ بىرىگە چېتىشلىق گېئومېتىرىيىلىك ئېلېمېنتلارنى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەپ، تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ۋېكتورغا دائىر مەسىلىگە ئايلاندۇرۇش؛

(2) ۋېكتورلار ئۈستىدىكى ئەمەللەر ئارقىلىق گېئومېتىرىيىلىك ئېلېمېنتلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتلەرنى مۇھاكىمە قىلىش، مەسىلەن، ئارىلىق، ئارا بۇلۇڭ مەسىلىلىرى؛

(3) ھېسابلاش نەتىجىسىنى گېئومېتىرىيىلىك مۇناسىۋەتكە «ئايلاندۇرۇش».



2.5.2 ـ رەسىم

2 ـ مىسال. 2.5.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\square ABCD$ دا، E، F نۇقتىلار ئايرىم ـ ئايرىم AD، DC تەرەپلەرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، BE، BF لار ئايرىم ـ ئايرىم AC بىلەن R، T ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ. سىز AR، RT، TC لار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بايقىيالامسىز؟

تەھلىل: R، T لار AC دىئاگونالىنىڭ ئۈستىدىكى ئىككى نۇقتا بولغانلىقتىن، AR، RT، TC لارنىڭ ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتكە ھۆكۈم قىلىش ئۈچۈن، پەقەت ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا AR، RT، TC لار بىلەن AC نىڭ مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلساقلا بولىدۇ.

يۇقىرىقى شەكىلنى ئۈچۈر تېخنىكىسى قوراللىرىدىن پايدىلىنىپ سىزىپ چىقىشقا بولىدۇ، AR، RT، TC لارنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۆلچىسەك، $AR=RT=TC$ بولىدىغانلىقىنى بىلىمىز. پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ چوققىلىرىنى تارتىش ئارقىلىق ھەرىكەتلىك كۆزەتسەك، $AR=RT=TC$ دىن ئىبارەت بۇ قانۇنىيەتنىڭ ئۆزگەرمەيدىغانلىقىنى بايقايمىز، شۇڭا $AR=RT=TC$ بولىدىغانلىقىنى قىياس قىلىمىز.

2 ـ باب

يېشىش: بىرىنچى باسقۇچ، تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيە بىلەن ۋېكتورلارنىڭ باغلىنىشىنى ئورنىتىمىز، مەسىلىدىكى گېئومېتىرىيىلىك ئېلېمېنتلارنى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەپ، تەكشىلىكتىكى گېئومېتىرىيىگە دائىر مەسىلىلەرنى ۋېكتورغا دائىر مەسىلىگە ئايلاندۇرىمىز.

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{AR}=\boldsymbol{r}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ بولىدۇ.

ئىككىنچى باسقۇچ، ۋېكتورلار ئۈستىدىكى ئەمەل ئارقىلىق گېئومېتىرىيىلىك ئېلېمېنتلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

$\overrightarrow{AR}$ بىلەن $\overrightarrow{AC}$ سىزىقداش بولغانلىقتىن، تۆۋەندىكىدەك پەرەز قىلىمىز:

$$\boldsymbol{r}=n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\ n\in\mathbf{R},$$

يەنە

$$\because\quad \overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$\overrightarrow{ER}$ بىلەن $\overrightarrow{EB}$ سىزىقداش بولغانلىقتىن، تۆۋەندىكىدەك پەرەز قىلىمىز:

$$\overrightarrow{ER}=m\overrightarrow{EB}=m\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right),$$

$$\because\quad \overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER},$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+m\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right).$$

$$\therefore\quad n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+m\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right),$$

يەنى

$$(n-m)\boldsymbol{a}+\left(n+\frac{m-1}{2}\right)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار سىزىقداش بولمىغانلىقتىن، يۇقىرىقى ئىپادىنى 0 گە تەڭ قىلىش ئۈچۈن، چوقۇم

$$\begin{cases} n-m=0, \\ n+\dfrac{m-1}{2}=0. \end{cases}$$

بولۇشى كېرەك، بۇنى يەشسەك

$$n=m=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

ئوخشاش يول بىلەن

$$\overrightarrow{TC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

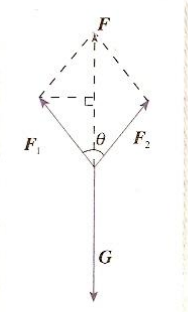
$$\therefore\quad \overrightarrow{RT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

ئۈچىنچى باسقۇچ، ھېسابلاش نەتىجىسىنى گېئومېتىرىيىلىك مۇناسىۋەتكە ئايلاندۇرىمىز:

$$AR=RT=TC.$$

2-5-2 ۋېكتورنىڭ فىزىكىدىكى قوللىنىلىشىغا دائىر مىساللار

3 ـ مىسال. سىز كۈندىلىك تۇرمۇشتا، مۇنداق ئىشلارنى بايقىغانمۇ؟ ئىككى ئادەم بىر ساياھەت سومكىسىنى بىرلىكتە كۆتۈرۈپ ماڭغاندا، ئارا بۇلۇڭ قانچە چوڭ بولسا سەرپ قىلىدىغان كۈچمۇ شۇنچە چوڭ بولىدۇ؛ يالاڭ تورنىك تارتقاندا، ئىككى بىلەكنىڭ ئارا بۇلۇڭى قانچە كىچىك بولسا، سەرپ قىلىدىغان كۈچمۇ شۇنچە ئاز بولىدۇ. سىز بۇ خىل ھادىسىلەرنى ماتېماتىكا نۇقتىسىدىن چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟



3.5.2 ـ رەسىم

تەھلىل: يۇقىرىقى مەسىلىنى 3.5.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك ماتېماتىكىلىق مودېلغا ئابستىراكتلاشقا بولىدۇ. پەقەت $\boldsymbol{F}$، $\boldsymbol{G}$، θ ئۈچىنىڭ ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئېنىق تەھلىل قىلغاندىلا (بۇنىڭدىكى $\boldsymbol{F}$ بولسا $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$ لەرنىڭ تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچى)، مەسىلىنى ماتېماتىكا نۇقتىسىدىن چۈشەندۈرۈشكە بولىدۇ.

يېشىش: $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$ دەپ پەرەز قىلساق، ۋېكتورنىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك قائىدىسى، كۈچنىڭ تەڭپۇڭلۇقى ۋە تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭغا دائىر بىلىملەرگە ئاساسەن، تۆۋەندىكىنى بىلەلەيمىز:

$$|\boldsymbol{F}_1|=\frac{|\boldsymbol{G}|}{2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

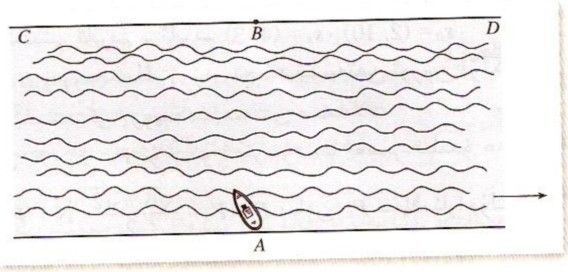
يۇقىرىقى ئىپادىدىن بايقىيالايمىزكى: θ بۇلۇڭ 0° تىن 180° قا تەدرىجىي چوڭايغاندا، $\frac{\theta}{2}$ بۇلۇڭ 0° تىن 90° قا تەدرىجىي چوڭىيىپ، $\cos\frac{\theta}{2}$ نىڭ قىممىتى چوڭدىن تەدرىجىي كىچىكلەيدۇ، شۇڭا $|\boldsymbol{F}_1|$ كىچىكتىن تەدرىجىي چوڭىيىدۇ، يەنى $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$ نىڭ ئارىسىدىكى ئارا بۇلۇڭ قانچە چوڭ بولسا، سەرپ قىلىدىغان كۈچمۇ شۇنچە چوڭ بولىدۇ، ئارا بۇلۇڭ قانچە كىچىك بولسا، سەرپ قىلىدىغان كۈچمۇ شۇنچە ئاز بولىدۇ.

ئىزدىنىش

(1) θ قانداق قىممەتنى ئالغاندا $|\boldsymbol{F}_1|$ ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟ ئەڭ كىچىك قىممىتى قانچە؟

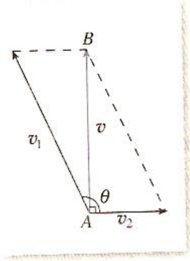
(2) $|\boldsymbol{F}_1|$ نىڭ $|\boldsymbol{G}|$ گە تەڭ بولۇشى مۇمكىنمۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

4 ـ مىسال. 4.5.2 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر دەريانىڭ ئىككى قىرغىقى ئۆزئارا پاراللېل بولۇپ، دەريانىڭ كەڭلىكى $d=500\,\mathrm{m}$ كېلىدۇ، بىر كېمە A ئورۇندىن يولغا چىقىپ دەريانىڭ قارشى قىرغىقىغا قاراپ ماڭدى. ئەگەر كېمىنىڭ تېزلىكى $|\boldsymbol{v}_1|=10\,\mathrm{km/h}$، سۇنىڭ ئېقىش تېزلىكى $|\boldsymbol{v}_2|=2\,\mathrm{km/h}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، يۈرۈش مۇساپىسى ئەڭ قىسقا بولغاندا، قانچىلىك ۋاقىت كېتىدۇ ($0.1\,\mathrm{min}$ قىچە ئېنىقلىقتا)؟



4.5.2 ـ رەسىم

تەھلىل: ئەگەر سۇ تىنچ ھالەتتە بولسا، ئۇ ھالدا كېمە پەقەت قارشى قىرغاققا تىك بولغان يۆنىلىشتە ماڭسىلا، يۇرۇش مۇساپىسى ئەڭ قىسقا بولۇپ، كېتىدىغان ۋاقىتمۇ ئەڭ ئاز بولىدۇ. سۇنىڭ ئېقىش تېزلىكىنى ئويلاشقاندا، كېمىنىڭ يۇرۇش مۇساپىسى ئەڭ قىسقا بولۇش ئۈچۈن، كېمىنىڭ تېزلىكى بىلەن سۇنىڭ ئېقىش تېزلىكىنىڭ يىغىندى تېزلىكى $\boldsymbol{v}$ چوقۇم قارشى قىرغاققا تىك بولۇشى كېرەك (5.5.2 ـ رەسىمدىكىدەك).



5.5.2 ـ رەسىم

يېشىش:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2 - |\boldsymbol{v}_2|^2} = \sqrt{96} \quad (\mathrm{km/h}),$$

$$\therefore \quad t = \frac{d}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{0.5}{\sqrt{96}} \times 60 \approx 3.1(\mathrm{min}).$$

جاۋابى: كېمىنىڭ يۇرۇش مۇساپىسى ئەڭ قىسقا بولغاندا، 3.1 min ۋاقىت كېتىدۇ.

5.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $A(1, 0)$ نۇقتا، تۈز سىزىق l: $y = 2x - 6$ ۋە l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى بىر R نۇقتا بېرىلگەن. ئەگەر $\overrightarrow{RA} = 2\overrightarrow{AP}$ بولسا، P نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ. y=2x

2. $\triangle ABC$ دا، D، E، F لار ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا AB، BC، CA لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، BF بىلەن CD ئۆزئارا O نۇقتىدا كېسىشىدۇ. $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$ دەپ پەرەز قىلىپ،

(1) A، O، E ئۈچ نۇقتىنىڭ بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى ھەمدە $\dfrac{AO}{OE} = \dfrac{BO}{OF} = \dfrac{CO}{OD} = 2$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ؛

(2) $\overrightarrow{AO}$ ۋېكتورنى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.

3. A، B ئىككى زەررىچە ئوخشاش بىر نۇقتىدىن قويۇپ بېرىلگەن بولۇپ، ئۇلارنىڭ مەلۇم بىر

پەيتتىكى ئورۇن يۆتكىلىشى ئايرىم - ئايرىم $\boldsymbol{s}_A=(4, 3)$، $\boldsymbol{s}_B=(2, 10)$.

(1) شۇ پەيتتىكى B زەررىچىنىڭ A زەررىچىگە نىسبەتەن ئورۇن يۆتكىلىشى $\boldsymbol{s}$ نى يېزىڭ؛

(2) $\boldsymbol{s}$ نىڭ $\boldsymbol{s}_A$ يۆنىلىشتىكى پرويېكسىيىسىنى ھېسابلاڭ.

4. تەكشىلىكتىكى $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$، $\boldsymbol{F}_3$ ئۈچ كۈچ بىر نۇقتىغا تەسىر قىلىدۇ ھەمدە تەڭپۇڭ ھالەتتە تۇرىدۇ. ئەگەر $|\boldsymbol{F}_1| = 1\mathrm{N}$، $\boldsymbol{F}_2=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\mathrm{N}$، $\boldsymbol{F}_1$ بىلەن $\boldsymbol{F}_2$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى $45°$ بولسا، (1) $\boldsymbol{F}_3$ نىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى تېپىڭ؛ (2) $\boldsymbol{F}_3$ بىلەن $\boldsymbol{F}_1$ نىڭ ئارا بۇلۇڭىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. دەسلەپكى تېزلىكىنى v_0، ئېتىش بۇلۇڭىنى θ قىلىپ چويۇن توپ ئاتقاندا، چويۇن توپنىڭ يۇقىرىغا ئۆرلىگەن ئەڭ چوڭ ئېگىزلىكى ۋە ئەڭ چوڭ ئېتىلىش ئارىلىقى قانچە بولىدۇ؟

2. بىر دەريانىڭ ئىككى قىرغىقى ئۆزئارا پاراللېل بولۇپ، دەريانىڭ كەڭلىكى $d=500\,\mathrm{m}$ كېلىدۇ، بىر كېمە A ئورۇندىن چىقىپ دەريانىڭ قارشى قىرغىقىغا قاراپ ماڭدى. كېمىنىڭ تىنچ سۇدىكى تېزلىكى $|v_1| = 10\,\mathrm{km/h}$، سۇنىڭ ئېقىش تېزلىكى $|v_2| = 2\,\mathrm{km/h}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. كېمىنىڭ يۈرۈش ۋاقتى ئەڭ قىسقا بولۇش ئۈچۈن، كېمىنىڭ يۈرۈش ئارىلىقى بىلەن يىغىندى تېزلىكنىڭ نىسبەت قىممىتى چوقۇم ئەڭ كىچىك بولۇشى كېرەك. بىز بۇنى مۇنداق ئۈچ خىل ئەھۋالغا بۆلۈپ مۇزاكىرە قىلىمىز:

(1) كېمە سۇنىڭ ئېقىش يۆنىلىشىگە قارشى يۆنىلىشتە يۈرۈپ، دەريا ئېقىنى بىلەن كەڭ بۇلۇڭ ھاسىل قىلغاندا؛

(2) كېمە سۇنىڭ ئېقىش يۆنىلىشى بويىچە يۈرۈپ، دەريا ئېقىنى بىلەن تار بۇلۇڭ ھاسىل قىلغاندا؛

(3) كېمە قارشى قىرغاققا تىك يۆنىلىشتە يۈرۈپ، دەريا ئېقىسى بىلەن تىك بۇلۇڭ ھاسىل قىلغاندا.

ساۋاقداشلار، يۇقىرىقى ئۈچ خىل ئەھۋالنى ھېسابلاپ كۆرۈڭلار، كېمە قارشى قىرغاققا تىك يۆنىلىشتە يۈرۈپ، دەريا ئېقىنى بىلەن تىك بۇلۇڭ ھاسىل قىلغاندا، كېتىدىغان ۋاقىت ئەڭ ئاز بولامدۇ؟

3. تەكشىلىكتىكى خالىغان ۋېكتور $\overrightarrow{AB}=(x, y)$ بېرىلگەن بولۇپ، $\overrightarrow{AB}$ ۋېكتورنى ئۇنىڭ باش نۇقتىسى ئەتراپىدا سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە θ بۇلۇڭ ئايلاندۇرغاندا ۋېكتور $\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$ كېلىپ چىقسا، B نۇقتىنى A نۇقتا ئەتراپىدا سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە θ بۇلۇڭ ئايلاندۇرۇشتىن P نۇقتا كېلىپ چىقىدۇ دەيمىز.

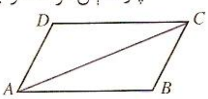
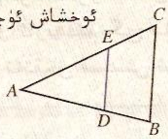
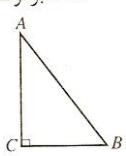
(1) تەكشىلىكتىكى $A(1, 2)$، $B(1+\sqrt{2},\ 2-2\sqrt{2})$ نۇقتىلار بېرىلگەن. B نۇقتىنى A نۇقتا ئەتراپىدا سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ يۆنىلىشى بويىچە $\dfrac{\pi}{4}$ ئايلاندۇرۇشتىن كېلىپ چىققان P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

(2) تەكشىلىكتىكى ئەگرى سىزىق C نىڭ ئۈستىدىكى ھەربىر نۇقتىنى كوئوردىنات بېشى ئەتراپىدا سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە $\dfrac{\pi}{4}$ ئايلاندۇرۇشتىن كېلىپ چىققان نۇقتىلارنىڭ ترايېكتورىيىسىنى ئەگرى سىزىق $x^2-y^2=3$ دەپ پەرەز قىلىپ، ئەسلىدىكى ئەگرى سىزىق C نىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2 ـ باب

ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) ۋە شەكىللەرنىڭ خۇسۇسىيىتى

ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) بىلەن گېئومېتىرىيىلىك شەكىللەرنىڭ خۇسۇسىيىتى زىچ باغلىنىشلىق. ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) نى شەكىل ئارقىلىق ئاددىي ۋە ئېنىق ئىپادىلىگىلى بولىدۇ، ھالبۇكى، شەكىللەرنىڭ بەزى خۇسۇسىيەتلىرىنى يەنە ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) دە ئەكس ئەتتۈرگىلى بولىدۇ. مەسىلەن، پاراللېل تۆت تەرەپلىك ۋېكتورلارنى قوشۇش ۋە ئېلىشنى ئىپادىلەيدىغان گېئومېتىرىيىلىك مودېل بولۇپ، ۋېكتورلارنى قوشۇش ۋە ئۇنىڭ ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى $a+b=b+a$ ئارقىلىق پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ قارىمۇقارشى تەرەپلىرىنىڭ پاراللېللىقى ۋە ئۈچبۇلۇڭلارنىڭ تەڭلىكىنى ئىپادىلەشكە بولىدۇ. بۇ، گېئومېتىرىيىلىك شەكىللەر، گېئومېتىرىيىلىك ئالماشتۇرۇش، ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر ۋە ئەمەللەر قانۇنىنى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ بىرلىككە كەلتۈرگىلى بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ. مۇلاھىزە قىلىپ بېقىڭ، تۆۋەندىكى جەدۋەلدە بۇ خىل ئەھۋال ئەكس ئەتتۈرۈلگەنمۇ ـ يوق؟

ۋېكتورلارنىڭ ئەمەللەر قانۇنى	ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر	گېئومېتىرىيىلىك ئالماشتۇرۇش	گېئومېتىرىيىلىك شەكىللەر
ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى: $a+b=b+a$ گۇرۇپپىلاش قانۇنى: $a+(b+c)=(a+b)+c$	قوشۇش	پاراللېل يۆتكەش	پاراللېل تۆت تەرەپلىك 
تارقىتىش قانۇنى: $k(a+b)=ka+kb$	سانىنى ۋېكتورغا كۆپەيتىش	ئوخشاشلىق	ئوخشاش ئۈچبۇلۇڭلار 
ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى: $a\cdot b=b\cdot a$ تارقىتىش قانۇنى: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	سكالىيار كۆپەيتمە	تىكلىك	تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ 

ۋېكتور قورال سۈپىتىدە گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىپ، گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشنىڭ يېڭى ئۇسۇلىنى ۋۇجۇدقا كەلتۈردى. ئېۋكلىد گېئومېتىرىيىسى باشقا قوراللارنى ئىشلەتمەي، پەقەت ئاساسىي لوگىكىلىق پرىنسىپ (ئەينىيەت قانۇنى، زىددىيەت قانۇنى، ئۈچىنچىسىنى ئىستىسنا قىلىش قانۇنى قاتارلىقلار)نى ئاساس قىلىپ، ئاساسىي پاكىت (ئاكسىئوما) لاردىن چىقىپ، دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە چىقىرىش ئارقىلىق گېئومېتىرىيىلىك مۇناسىۋەت ئورنىتىدۇ، شۇڭا ئۇنىڭدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان گېئومېتىرىيىلىك

ئاساسلار ناھايىتى پۇختا ۋە نەپىس بولۇپ، كىشىگە گۈزەللىك تۇيغۇسى ۋە ھۇزۇر ئاتا قىلىدۇ، ئەمما ئۇنىڭدا ئومۇمىي قانۇنىيەت يوق، ئۇنىڭ ئۈستىدە پىكىر يۈرگۈزۈش بىرقەدەر قىيىن بولۇپ، كۆپ ھاللاردا كىشىلەرنىڭ ئەقلىي قابىلىيىتىگە قارىتا ئىنتايىن چوڭ خىرىس پەيدا قىلىدۇ (بەلكىم ئېۋكلىد گېئومېتىرىيىسىنىڭ سېھرىي كۈچىمۇ دەل مۇشۇنىڭدا بولۇشى مۇمكىن). شۇڭا، گېئومېتىرىيىنى تەتقىق قىلىش قورالى ئۈستىدە ئىزدىنىش، شۇ ئارقىلىق شەكىللەرنىڭ خۇسۇسىيىتى ۋە قانۇنىيىتىنى تېخىمۇ ياخشى ئىگىلەپ، گېئومېتىرىيە تەتقىقاتىنىڭ تەرەققىياتىنى ئىلگىرى سۈرۈش ماتېماتىكلارنىڭ بىر غايىسىگە ئايلاندى.

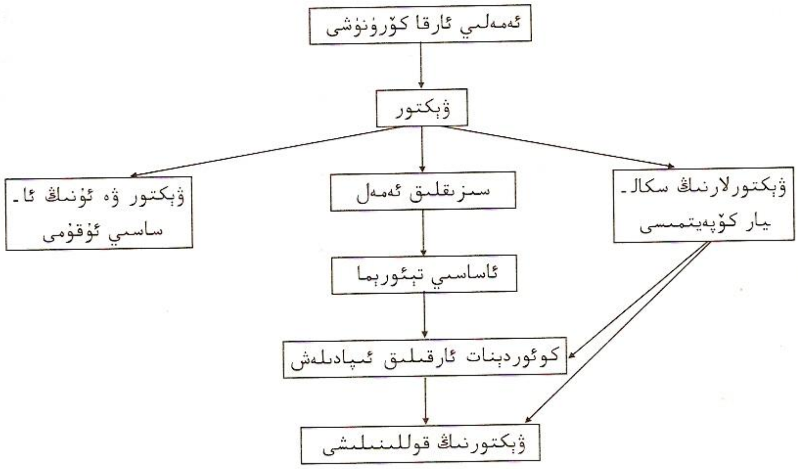
ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) بىلەن گېئومېتىرىيىلىك شەكىللەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، شەكىللەر ئۈستىدىكى تەتقىقات ئۇنۇملۇك ھېسابلايدىغان سەۋىيىگە يېتىپ، سىنتېزلىق گېئومېتىرىيىدىن ۋېكتورلۇق گېئومېتىرىيىگە بۇرۇلۇش ئەمەلگە ئاشۇرۇلدى. ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) ۋېكتور بىلەن گېئومېتىرىيە، ئالگېبرانى ئورگانىك ھالدا بىرلەشتۈردى.

گېئومېتىرىيىلىك مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئۇسۇلى ئارقىلىق ھەل قىلىشنىڭ ئاساسىي جەريانى مۇنداق: ئاۋۋال بىر گېئومېتىرىيىلىك مىقدارنى ئالگېبرالاشتۇرۇش، يەنى ئورۇن يۆتكىلىشتىن ئىبارەت بۇ ئاساسىي گېئومېتىرىيىلىك مىقدارنى ئابستراكسىيىلەش ئارقىلىق ۋېكتور ئۇقۇمىغا ئىگە بولۇش؛ ئاندىن ئېۋكلىد بوشلۇقىغا خاس بولغان پاراللېل يۆتكەش، تەڭ بولۇش، ئوخشاشلىق ۋە گوگۇ تېئورېمىسى قاتارلىق ئاساسىي خۇسۇسىيەتلەرنى قوللىنىپ، ۋېكتورلارنى قوشۇش (ئېلىش)، ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش ۋە سكالىيار كۆپەيتمىدىن ئىبارەت ئۈچ خىل ۋېكتور ئەمىلىنى كىرگۈزۈش ھەمدە ئېۋكلىد گېئومېتىرىيىسىنىڭ كۆرسەتمىلىكلىكى بىلەن ۋېكتور ئۈستىدىكى ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) نى ئورگانىك بىرلەشتۈرۈپ، كۆرسەتمىلىك گېئومېتىرىيىلىك مۇناسىۋەتلەرنى ئالگېبرالاشتۇرۇش، ئابستراكت ئەمەل ۋە ئەمەللەر قانۇنىنى كۆرسەتمىلىك قىلىش كېرەك، شۇنداق قىلغاندا سان بىلەن شەكىلنى ئورگانىك بىرلەشتۈرگىلى بولىدۇ. ئەمەللەر بىلەن ئەمەللەر قانۇنى ۋېكتورنىڭ جېنى بولۇپ، سان بىلەن شەكىلنى تۇتاشتۇرىدىغان ۋاستە، ئۇ ئەمەللەر (ئەمەللەر قانۇنى) بىلەن گېئومېتىرىيىلىك شەكىللەر ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەتنى تۇرغۇزۇپ، بىزنى گېئومېتىرىيىنى ئەمەللەر ئارقىلىق تەتقىق قىلىش ئىمكانىيىتىگە ئىگە قىلدى.

2 ـ باب

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. ماتېماتىكىدا تەتقىق قىلىنىدىغان ۋېكتور پەقەت چوڭ ـ كىچىكلىك ۋە يۆنىلىشكە ئىگە بولۇپ، فىزىكىدا تەتقىق قىلىنىدىغان ۋېكتور بىلەن ئوخشىشىپ كەتمەيدۇ. ئۇنداق بولسا، ماتېماتىكا بىلەن فىزىكىدىكى ۋېكتور ئۇقۇمىنى سېلىشتۇرۇپ، ئۇلارنىڭ پەرقى ۋە ئوخشاشلىقىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

2. كۆچلەرنىڭ بىرىكمىسى بىلەن ئورۇن يۆتكىلىشنىڭ بىرىكمىسىدىن ئىلھاملىنىپ، سانلار ئۇستىدىكى ئەمەللەرگە سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلىنى كىرگۈزدۇق؛ قارىمۇقارشى ۋېكتورلارغا ئېنىقلىما بەرگەندىن كېيىن، قوشۇش ئەمىلى نۇقتىسىدىن ئېلىش ئەمىلىنى كىرگۈزۈپ، ئېلىش ئەمىلىگە بىر ۋېكتورنىڭ قارىمۇقارشى ۋېكتورىنى قوشۇش دەپ ئېنىقلىما بەردۇق؛ ئاندىن يەنە ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلىنىڭ نۇقتىسىدىن ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش ئەمىلىنى كىرگۈزدۇق. بۇ ئەمەللەر ۋېكتورلار ئۇستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەر دېيىلىدۇ. ۋېكتورغا ئەمەل كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن، ۋېكتور ياخشى ئەمەللەر خۇسۇسىيىتىگە ئىگە بولغان بىر سىستېمىغا ئايلاندى. ئۇنداق بولسا، ۋېكتورلار ئۇستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەر بىلەن سانلارنى قوشۇش، ئېلىش ۋە كۆپەيتىش ئەمەللىرى ئارىسىدىكى باغلىنىش ۋە پەرقىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

3. ئەمەللەر قانۇنى ھېسابلاشنىڭ جېنى. سىز ئەمەلىي مىساللار ئارقىلىق ۋېكتورلار ئۇستىدىكى سىزىقلىق ئەمەللەر بىلەن سكالىيار كۆپەيتمە ئەمىلىنىڭ قانداق ئەمەللەر قانۇنىغا ئىگە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟ بۇ ئەمەللەر قانۇنىنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسى نېمە؟

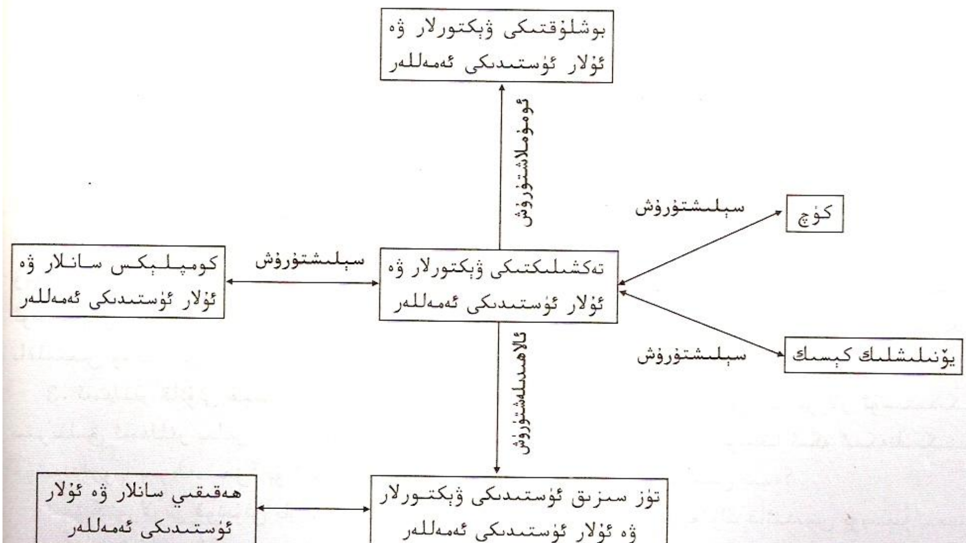
4. ۋېكتورلارنى قوشۇش پاراللېل تۆت تەرەپلىك قائىدىسى ياكى ئۈچبۇلۇڭ قائىدىسى بويىچە بېجىرىلىدۇ، بۇ ئىككى قائىدە بىردەكلىككە ئىگە. پاراللېل تۆت تەرەپلىك (ئۈچبۇلۇڭ) ۋېكتورلارنى قوشۇش ۋە ئېلىشنى ئىپادىلەيدىغان گېئومېتىرىيىلىك مودېل، ئۇنىڭدىن پايدىلىنىپ ۋېكتورلار ئۇستىدىكى

سىزىقلىق ئەمەللەرنى ئاسانلا مۇھاكىمە قىلغىلى بولىدۇ. قېنى ساۋاقداشلار، ئۈچبۇلۇڭ ۋە پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىنى ئەسلەپ كۆرۈڭلار ھەمدە بۇ خۇسۇسىيەتلەر بىلەن ۋېكتورلار ۋە ئۇلار ئۈستىدىكى ئەمەللەرنىڭ مۇناسىۋىتى ئۈستىدە ئىزدىنىڭلار.

5. تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئاساسىي تېئورېما ۋېكتورلارنى كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلەشنىڭ نەزەرىيىۋى ئاساسى. تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى x ئوق، y ئوقلارنىڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش بولغان بىرلىك ۋېكتور ئۇنىڭ بىر گۇرۇپپا ئورتوگونال ئاساسى بولۇپ، تەكشىلىكتىكى ھەرقانداق بىر ۋېكتورنى بىر جۈپ تەرتىپلىك ھەقىقىي سان (x, y) ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ. بۇنىڭ بىلەن ۋېكتورلارنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى بىلەن نۇقتىنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشىنىڭ ماس مۇناسىۋىتى ئورنىتىلىپ، ۋېكتور (كوئوردېنات بېشىنى باشلىنىش نۇقتىسى قىلغان يۆنىلىشلىك كېسىك) بىلەن نۇقتا ماسلاشتۇرۇلدى.

6. ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى ۋېكتورلار ئۈستىدىكى سىزىقلىق ئەمەلگە ئوخشىمايدۇ، چۈنكى، ئۇنى ھېسابلاشنىڭ نەتىجىسى ۋېكتور بولماستىن بەلكى، سان بولىدۇ. ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى ئارىلىق، ئارا بۇلۇڭ قاتارلىقلار بىلەن زىچ باغلىنىشلىق بولۇپ، ئارىلىق، ئارا بۇلۇڭلارغا چېتىلىدىغان بەزى گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ئۇنىڭدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغىلى بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، ئەمەلىي مىساللار ئارقىلىق تەكشىلىكتىكى گېئومېترىيىگە دائىر مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئۇسۇلى بىلەن ھەل قىلىشنىڭ «ئۈچ باسقۇچى» نى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

7. تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلار ۋە ئۇلار ئۈستىدىكى ئەمەللەر بوشلۇقتىكى ۋېكتورلار ۋە ئۇلار ئۈستىدە ئەمەللەر بىلەن زىچ باغلىنىشلىق بولۇپ، سان ۋە سانلار ئۈستىدىكى ئەمەللەر بىلەنمۇ بىۋاسىتە مۇناسىۋەتلىك، شۇنداقلا باشقا پەنلەر (بولۇپمۇ فىزىكا) دىمۇ كەڭ قوللىنىلىشقا ئىگە. بۇ خىل باغلىنىشنى تۆۋەندىكى سخېما ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ.



تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملەرنىڭ توغرا - خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$; (√)

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; (√)

(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$; (×)

(4) $0\overrightarrow{AB}=0$. (×)

2. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

(1) ئەگەر $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار ئىككى بىرلىك ۋېكتور بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى تۆت يەكۈننىڭ ئىچىدە توغرا بولغىنى (D).

(A) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ (B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$

(C) $\boldsymbol{a}^2\neq\boldsymbol{b}^2$ (D) $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$

(2) خالىغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لارغا نىسبەتەن، تۆۋەندىكى ھۆكۈملەرنىڭ ئىچىدە توغرا بولغىنى (B).

(A) ئەگەر $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$ نى قانائەتلەندۈرسە ھەمدە $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ ئوخشاش يۆنىلىشلىك بولسا، ئۇ ھالدا $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ بولىدۇ.

(B) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

(C) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|$

(D) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

(3) تۆت تەرەپلىك $ABCD$ دا، ئەگەر $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ بولسا، ئۇ ھالدا (D) بولىدۇ.

(A) $ABCD$ تىك تۆتبۇلۇڭ (B) $ABCD$ رومبا

(C) $ABCD$ كۋادرات (D) $ABCD$ پاراللېل تۆت تەرەپلىك

(4) $\boldsymbol{a}$ نى نۆل بولمىغان ۋېكتور، λ نى نۆل بولمىغان ھەقىقىي سان دەپ پەرەز قىلساق، تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنىڭ ئىچىدە توغرا بولغىنى (C).

(A) $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\lambda\boldsymbol{a}$ - قارىمۇقارشى يۆنىلىشلىك بولىدۇ

(B) $|-\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

(C) $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\lambda^2\boldsymbol{a}$ ئوخشاش يۆنىلىشلىك بولىدۇ

(D) $|-\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot\boldsymbol{a}$

(5) M نى $\square ABCD$ نىڭ دىئاگونالللىرىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى، O نى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=$ (D) بولىدۇ.

(A) $\overrightarrow{OM}$ (B) $2\overrightarrow{OM}$ (C) $3\overrightarrow{OM}$ (D) $4\overrightarrow{OM}$

(6) تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپا ۋېكتورلارنىڭ ئىچىدە، ئاساس قىلىشقا بولىدىغىنى (B).

(A) $e_1=(0, 0)$, $e_2=(1, -2)$ ✓(B) $e_1=(-1, 2)$, $e_2=(5, 7)$

(C) $e_1=(3, 5)$, $e_2=(6, 10)$ (D) $e_1=(2, -3)$, $e_2=\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ھەمدە $\overrightarrow{AC}=a$ ، $\overrightarrow{BD}=b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AD}$ لارنى ئايرىم - ئايرىم a ، b لار ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.
$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(a-b)$, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(a+b)$

4. $ABCDEF$ نىڭ مۇنتىزىم ئالتە تەرەپلىك ھەمدە $\overrightarrow{AC}=a$ ، $\overrightarrow{BD}=b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\overrightarrow{DE}$ ، $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{EF}$ ، $\overrightarrow{FA}$ ، $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CE}$ لارنى ئايرىم - ئايرىم a ، b لار ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.

5. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، O نۇقتا كوئوردىنات بېشى ئىكەنلىكى ھەمدە $A(-3, -4)$ ، $B(5, -12)$ ئىككى نۇقتا بېرىلگەن.

(1) $\overrightarrow{AB}$ نىڭ كوئوردىناتى بىلەن $|\overrightarrow{AB}|$ نى تېپىڭ؛

(2) ئەگەر $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ بولسا، $\overrightarrow{OC}$ ۋە $\overrightarrow{OD}$ نىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ؛

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ نى تېپىڭ. $(2,-16)$ $(-8,8)$

6. $A(0, 1)$ ، $B(1, 0)$ ، $C(1, 2)$ ، $D(2, 1)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، ۋېكتور $\overrightarrow{AB}$ بىلەن $\overrightarrow{CD}$ نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە ئىسپاتلاڭ.

7. $A(1, 1)$ ، $B(-1, 0)$ ، $C(0, 1)$ نۇقتىلار بېرىلگەن، $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان $D(x, y)$ نۇقتىنى تېپىڭ.
$D(-2,0)$

8. n قانداق قىممەتنى ئالغاندا، ۋېكتور $a=(n, 1)$ بىلەن $b=(4, n)$ سىزىقداش ھەمدە ئوخشاش يۆنىلىشلىك بولىدۇ؟
$n=2$

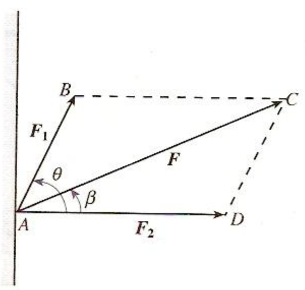
9. $a=(1, 0)$ ، $b=(1, 1)$ ، $c=(-1, 0)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $c=\lambda a+\mu b$ نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان λ بىلەن μ نى تېپىڭ. $\lambda=-1, \mu=0$

10. $\triangle ABC$ نىڭ چوققىلىرىنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم - ئايرىم $A(1, 1)$ ، $B(4, 1)$ ، $C(4, 5)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos A$ ، $\cos B$ ، $\cos C$ لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.
$\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=0$, $\cos C=\frac{4}{5}$

11. بىرلىك ۋېكتور m بىلەن n نىڭ ئارا بۇلۇڭى $60°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $(2n-m)\perp m$ نى ئىسپاتلاڭ ھەمدە ئۇنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىنى چۈشەندۈرۈڭ.
$(2n-m)\cdot m=2n\cdot m-m^2=2\cos 60°-1=0$
$(2n-m)\perp m$

12. $a=(1, 0)$ ، $b=(1, 1)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، λ قانداق قىممەتنى ئالغاندا، $a+\lambda b$ بىلەن a تىك بولىدۇ؟
$\lambda=-1$

13. $|a|=\sqrt{3}$ ، $|b|=2$ ، a بىلەن b نىڭ ئارا بۇلۇڭى $30°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $|a+b|$ ، $|a-b|$ نى تېپىڭ.
$|a+b|=\sqrt{13}$, $|a-b|=1$



(14 – مىسال ئۈچۈن)

14. رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، تىرەك A ئىككى كۈچ F_1 ، F_2 نىڭ تەسىرىگە ئۇچرايدۇ، $|F_1|=40\,N$ بولۇپ، ئۇنىڭ گورىزونتال سىزىق بىلەن θ بۇلۇڭ ھاسىل قىلىدىغانلىقى؛ $|F_2|=70\,N$ بولۇپ، ئۇنىڭ گورىزونتال يۆنىلىشتە ئىكەنلىكى؛ ئىككى كۈچنىڭ تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچىنىڭ $|F|=100\,N$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، θ بۇلۇڭنى ۋە تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچ F بىلەن گورىزونتال سىزىق ئارىسىدىكى بۇلۇڭ β نى تېپىڭ.
$\cos\theta=\frac{5}{8}$, $\cos\beta=\frac{19}{20}$

B گۇرۇپپا

1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

(1) $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا ( ) بولىدۇ.

(A) A، B، D ئۈچ نۇقتا سىزىقداش

(B) A، B، C ئۈچ نۇقتا سىزىقداش

(C) B، C، D ئۈچ نۇقتا سىزىقداش

(D) A، C، D ئۈچ نۇقتا سىزىقداش

(2) $ABCD$ كۋادراتنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا ( ) = $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ بولىدۇ.

(A) 0　　(B) 3　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $2\sqrt{2}$

(3) $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$، $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$ ھەمدە تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا ( ) بولىدۇ.

(A) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$　　(B) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

(C) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$　　(D) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

(4) D، E، F لار ئايرىم - ئايرىم ھالدا $\triangle ABC$ نىڭ BC، CA، AB تەرەپلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ھەمدە $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى تەڭلىكلەرنىڭ ئىچىدە توغرا بولغىنىنىڭ سانى ( ).

① $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; ② $\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; ③ $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; ④ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(5) $\boldsymbol{e}_1$، $\boldsymbol{e}_2$ لەر ئارا بۇلۇڭى 60° بولغان ئىككى بىرلىك ۋېكتور بولسا، ئۇ ھالدا $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$، $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ لارنىڭ ئارا بۇلۇڭى ( ) بولىدۇ.

(A) 30°　　(B) 60°　　(C) 120°　　(D) 150°

(6) ئەگەر ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لارنىڭ ئىككى - ئىككىدىن ھاسىل قىلغان بۇلۇڭلىرى ئۆزئارا تەڭ ھەمدە $|\boldsymbol{a}|=1$، $|\boldsymbol{b}|=1$، $|\boldsymbol{c}|=3$ بولسا، ئۇ ھالدا ( ) = $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ بولىدۇ.

(A) 2　　(B) 5　　(C) 2 ياكى 5　　(D) $\sqrt{2}$ ياكى $\sqrt{5}$

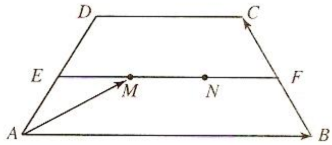
(7) تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ ABC نىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1، $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$ بولسا، ئۇ ھالدا ( ) = $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ بولىدۇ.

(A) 3　　(B) -3　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) $-\frac{3}{2}$

2. ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ نۆل بولمىغان ۋېكتور ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ نى ئىسپاتلاڭ ھەمدە ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى چۈشەندۈرۈڭ.

3. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$ نى ئىسپاتلاڭ ھەمدە ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى چۈشەندۈرۈڭ.

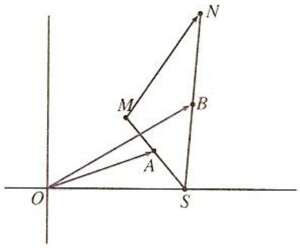
4. رەسىمدىكىدەك، تۆت تەرەپلىك $ABCD$ تەڭ يانلىق تراپېتسىيە بولۇپ، E، F لار ئايرىم - ئايرىم AD، BC يانلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، M، N لار EF كېسىنىڭ ئۈستىدىكى ئىككى نۇقتا ھەمدە $EM = MN = NF$، ئاستىنقى ئاساسى ئۈستۈنكى ئاساسىنىڭ ئىككى ھەسسىسىگە تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئەگەر $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$ بولسا، $\overrightarrow{AM}$ نى تېپىڭ.



(4 ـ مىسال ئۇچۇن)

5. $\overrightarrow{OP_1}$، $\overrightarrow{OP_2}$، $\overrightarrow{OP_3}$ ۋېكتورلارنىڭ $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0}$، $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1$ دىن ئىبارەت شەرتلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى بېرىلگەن، $\triangle P_1P_2P_3$ نىڭ مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

6. رەسىمدىكىدەك، $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$، خالىغان M نۇقتىنىڭ A نۇقتىغا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى S، S نۇقتىنىڭ B نۇقتىغا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى N ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ۋېكتور $\overrightarrow{MN}$ نى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.



(6 ـ مىسال ئۇچۇن)

7. بىر ئادەمنىڭ تىنچ سۇدىكى ئۈزۈش تېزلىكى $4\sqrt{3}$ km/h بولۇپ، ئۇ ئېقىم تېزلىكى 4 km/h بولغان دەريادا سۇ ئۈزگەن.

(1) ئەگەر ئۇ دەريانىڭ قارشى قىرغىقىغا قاراپ تىك يۆنىلىشتە ئۈزسە، ئۇ ھالدا ئۇ ئەمەلىيەتتە قايسى يۆنىلىشنى بويلاپ ئۈزگەن بولىدۇ؟ ئەمەلىيەتتىكى ئۈزۈش تېزلىكى قانچە؟

(2) ئۇ قايسى يۆنىلىشكە قاراپ ئۈزسە، ئاندىن دەريا ئېقىمىغا تىك بولغان يۆنىلىشنى بويلاپ ئۈزگەن بولىدۇ؟ ئەمەلىيەتتىكى ئۈزۈش تېزلىكى قانچە؟

8. $\triangle ABC$ دا، ئەگەر $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ بولسا، ئۇ ھالدا O نۇقتا $\triangle ABC$ نىڭ قايسى ئورنىدا بولىدۇ؟

9. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى ۋېكتورلارنى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، بۇ، بىزنى ۋېكتورنى ئانالىتىك گېئومېترىيىنى تەتقىق قىلىدىغان قورال قىلىپ ئىشلىتىش ئويىغا كەلتۈرىدۇ. رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α ($\alpha \neq 90^\circ$) بولسۇن. l ئۈستىدىن ئوخشاش بولمىغان $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ ئىككى نۇقتىنى ئېلىپ، ۋېكتور $\overrightarrow{P_1P_2}$ نىڭ يۆنىلىشنى يۇقىرىغا قارايدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ۋېكتور $\overrightarrow{P_1P_2}$ نىڭ كوئوردېناتى (x_2-x_1, y_2-y_1) بولىدۇ.

كوئوردىنات بېشى ئارقىلىق ۋېكتور $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{P_1P_2}$ نى سىزساق، ئۇ ھالدا P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (x_2-x_1, y_2-y_1) بولۇپ، OP تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى α بولىدۇ. تانگېنس فۇنكسىيىسىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

گە ئېرىشىمىز، بۇ دەل «ماتېماتىكا②» دە كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يانتۇلۇق فورمۇلىسىدۇر. يۇقىرىقى كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانى «ماتېماتىكا ②» دىكى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا قارىغاندا ئاددىي. ئۇنداق بولسا، تۈز سىزىققا دائىر مەسىلىلەرنى ۋېكتورنى قورال قىلىش ئارقىلىق مۇھاكىمە قىلالامسىز؟ مەسىلەن:

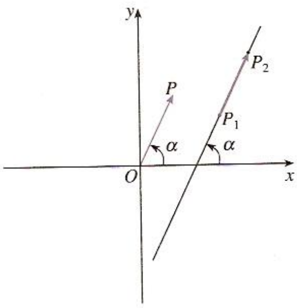
(1) $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن، ۋېكتور $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$ غا پاراللېل بولغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى؛

(2) ۋېكتور (A, B) بىلەن تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ نىڭ مۇناسىۋىتى؛

(3) تۈز سىزىق l_1 بىلەن l_2 نىڭ تەڭلىمىسىنى ئايرىم - ئايرىم

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $l_1 \perp l_2$، $l_1 /\!/ l_2$ بولۇشىنىڭ شەرتى ئايرىم - ئايرىم قانداق بولىدۇ؟ ئەگەر ئۇلار ئۆزئارا كېسىشسە، ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىنى تېپىش فورمۇلىسىغا قانداق ئېرىشكىلى بولىدۇ؟



(9 - مىسال ئۈچۈن)

(4) $P_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن تۈز سىزىق $Ax+By+C=0$ گىچە بولغان ئارىلىق فورمۇلىسىنى قانداق كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ؟

3 ـ باب

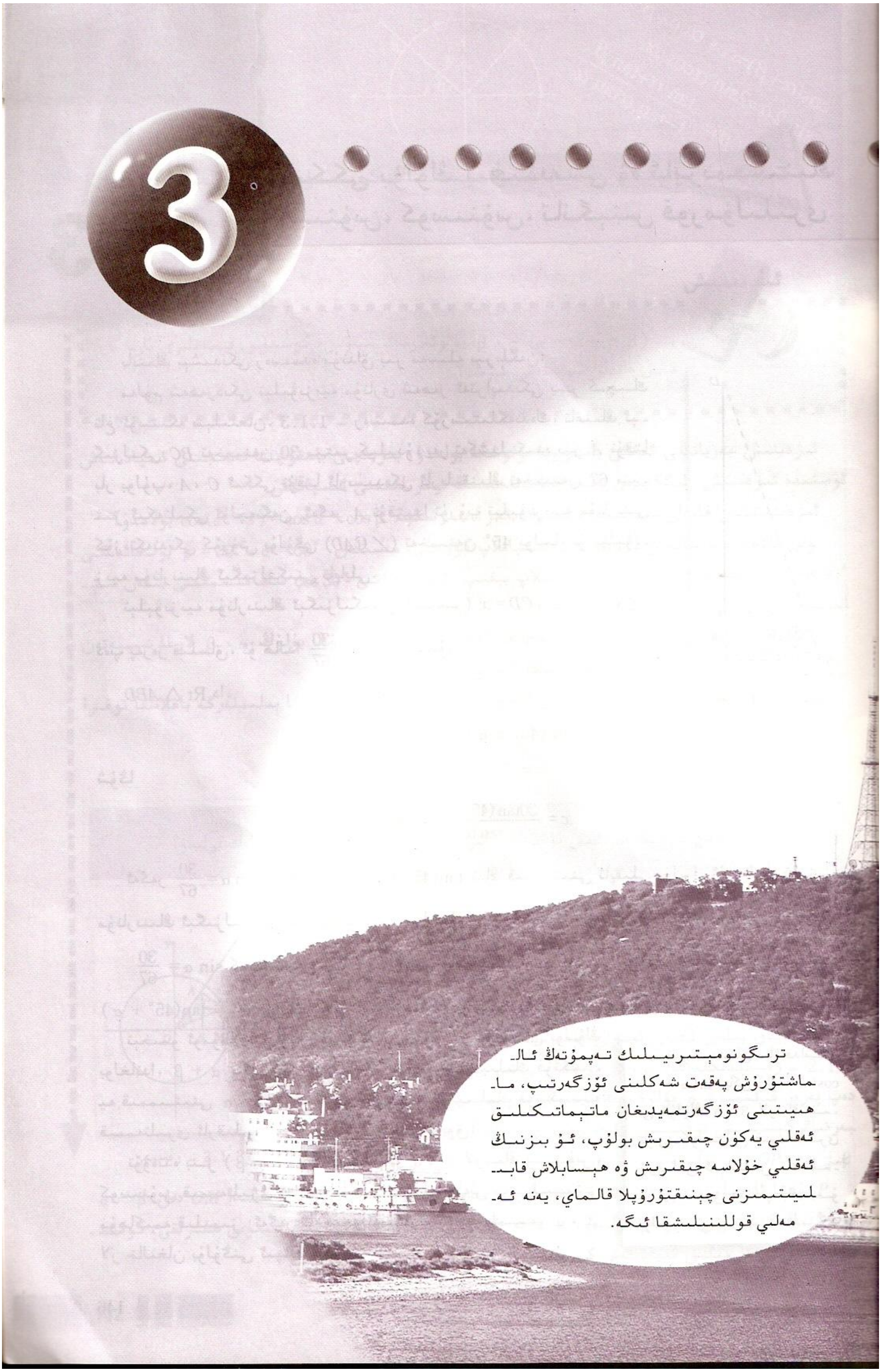
ترىگونومېترىيىلىك تەپمۇتەڭ ئالماشتۇرۇش

1-3 ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس، تانگېنس فورمۇلىلىرى

2-3 ئاددىي ترىگونومېترىيىلىك تەپمۇتەڭ ئالماشتۇرۇش

ئالماشتۇرۇش ماتېماتىكىدىكى مۇھىم قورال، بىز تولۇقسىز ئوتتۇرىدا ئالگېبرالىق ئالماشتۇرۇشنى ئۆگەنگەن، ماتېماتىكا 4 نىڭ 1 ـ بابىدىمۇ ئوخشاش بۇلۇڭنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىنى ئالماشتۇرۇشنى ئۆگەندۇق، مۇشۇ ئاساستا، بۇ بابتا ئىككى بۇلۇڭنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىنى ئالماشتۇرۇشنى ئۆگىنىمىز. ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇشتا پەقەت شەكلى ئۆزگىرىپ، ماھىيىتى ئۆزگەرمەيدىغانلىقتىن، ئۇ، كۆرۈنۈشى ئوخشاش بولمىغان، ئەمما ماھىيىتى ئوخشاش بولغان بەزى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرى ئارىسىدىكى ئىچكى باغلىنىشىنى ئېچىپ بېرىپ، بىزنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىنى ئاددىيلاشتۇرۇشىمىزغا ياردەم بېرىدۇ، شۇنىڭ بىلەن تېخىمۇ قۇلايلىق ۋە ئۇنۇملۇك تەتقىق قىلىش ئىمكانىيىتىگە ئىگە بولىمىز.

ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇش ئالماشتۇرۇش ئوبيېكتى، ئالماشتۇرۇش نىشانى، ئالماشتۇرۇش ئاساسى ۋە ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلى قاتارلىق ئامىللارنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس ۋە تانگېنس فورمۇلىلىرى ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇشنىڭ ئاساسى. بۇ فورمۇلىلار ئۇستىدە ئىزدىنىش ۋە بۇ فورمۇلىلاردىن پايدىلىنىپ ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇش ئېلىپ بېرىش ئارقىلىق، ئالماشتۇرۇش نىشانىنى قانداق مۆلچەرلەش، ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسىنى قانداق تاللاش، ئالماشتۇرۇش ئۇسۇلىنى قانداق لايىھىلەش قاتارلىق جەھەتلەردىن مۇلاھىزە يۈرگۈزىمىز، بۇلار بىزنىڭ ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىش ۋە ھېسابلاش قابىلىيىتىمىزنىڭ تېخىمۇ يۇقىرى كۆتۈرۈلۈشىگە ياردەم بېرىدۇ.



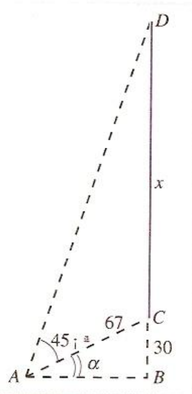
ترىگونومېترىيىلىك تەپمۇتەڭ ئالماشتۇرۇش پەقەت شەكلىنى ئۆزگەرتىپ، ماھىيىتىنى ئۆزگەرتمەيدىغان ماتېماتىكىلىق ئەقلىي يەكۈن چىقىرىش بولۇپ، ئۇ بىزنىڭ ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىش ۋە ھېسابلاش قابىلىيىتىمىزنى چېنىقتۇرۇپلا قالماي، يەنە ئەمەلىي قوللىنىلىشقا ئىگە.

CHAPTER 3

1-3 ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس، تانگېنس فورمۇللىرى

بابنىڭ بېشىدىكى رەسىمدە مۇنداق بىر مەسىلە بېرىلگەن:

مەلۇم شەھەردىكى تېلېۋىزىيە مۇنارى شەھەر ئەتراپىدىكى بىر كىچىك تاغ ئۈستىگە سېلىنغان. 1.1.3 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، تاغنىڭ ئېگىزلىكى BC تەخمىنەن 30 مېتىر كېلىدۇ، يەر تەكشىلىكىدە بىر A نۇقتا بار بولۇپ، A، C ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنىڭ تەخمىنەن 67 مېتىر ئىكەنلىكى ئۆلچەنگەن. ئەگەر A نۇقتىدا تۇرۇپ تېلېۋىزىيە مۇنارىنى كۆزەتكەندىكى كۆرۈش بۇلۇڭى ($\angle CAD$) تەخمىنەن $45°$ بولسا، بۇ تېلېۋىزىيە مۇنارىنىڭ ئېگىزلىكىنى تاپايلى.



رەسىم ـ 1.1.3

تېلېۋىزىيە مۇنارىنىڭ ئېگىزلىكىنى (مېتىر) $CD=x$ ، $\angle CAB=\alpha$

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ هالدا $\sin\alpha=\frac{30}{67}$ بولىدۇ.

$\mathrm{Rt}\triangle ABD$ دا،

$$\tan(45°+\alpha)=\frac{x+30}{30}\tan\alpha,$$

شۇڭا

$$x=\frac{30\tan(45°+\alpha)}{\tan\alpha}-30.$$

ئەگەر $\sin\alpha=\frac{30}{67}$ گە ئاساسەن $\tan(45°+\alpha)$ نىڭ قىممىتىنى تاپقىلى بولسا، ئۇ هالدا تېلېۋىزىيە مۇنارىنىڭ ئېگىزلىكىنى تېپىش چىقىشقا بولىدۇ.

$\sin\alpha=\frac{30}{67}$ گە ئاساسەن $\tan(45°+\alpha)$ نىڭ قىممىتىنى تاپقىلى بولامدۇ؟ باشقىچە ئېيتقاندا، $\tan(45°+\alpha)$ نى $\sin\alpha$ ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولامدۇ؟

قىزىقىدىغان ساۋاقداشلار $\cos(\alpha+\beta)$ ياكى $\sin(\alpha+\beta)$ نى بۇلۇڭ α، β لارنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس قىممەتلىرى ئارقىلىق ئىپادىلەش مەسىلىسىنى تەتقىق قىلىپ باقسىمۇ بولىدۇ.

تېخىمۇ ئومۇملاشتۇرۇپ ئېيتقاندا، α، β لار خالىغان بۇلۇڭ بولغاندا، $\alpha+\beta$ ياكى $\alpha-\beta$ نىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتىنى α، β لارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممەتلىرى ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولامدۇ ـ يوق؟

تۆۋەندە بىز $\cos(\alpha-\beta)$ نى بۇلۇڭ α، β لارنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس قىممەتلىرى ئارقىلىق قانداق ئىپادىلەش مەسىلىسىنى مۇهاكىمە قىلىمىز. ئەگەر ئالاهىدە ئەسكەرتىش بېرىلمىسە، α، β لار خالىغان بۇلۇڭنى ئىپادىلەيدۇ.

3 - باب

1-1-3 ئىككى بۇلۇڭ ئايرىمىسىنىڭ كوسىنۇس فورمۇلىسى

ئىزدىنىش

$\cos(\alpha - \beta)$ نى α ، β بۇلۇڭلارنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس قىممەتلىرى ئارقىلىق قانداق ئىپادىلەش كېرەك؟

ئىزدىنىش جەريانىنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈشكە بولىدۇ، بىرىنچى باسقۇچتا نەتىجىنى ئىپادىلەش ئۇستىدە ئىزدىنىش، ئىككىنچى باسقۇچتا نەتىجىنىڭ توغرىلىقىنى ئىسپاتلاش.

ئىزدىنىشتىن قانداق نەتىجىگە ئىگە بولدىڭىز؟ سىزنىڭچە $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha - \cos\beta$ بولامدۇ؟ بۇنى ئالاھىدە مىسالدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاپ كۆرەيلى. مەسىلەن، $\alpha = 60°$ ، $\beta = 30°$ بولغاندىكى $\cos 60° - \cos 30°$ نىڭ قىممىتىنى ھېسابلاپ بېقىپ، ئاندىن ئۇنى $\cos 30°$ نىڭ قىممىتى بىلەن سېلىشتۇرايلى.

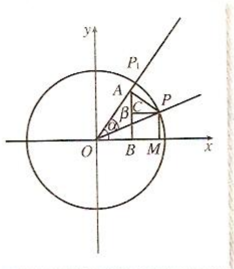
بايقاشقا بولىدۇكى، $\cos(60° - 30°) \neq \cos 60° - \cos 30°$، شۇڭا بۇلۇڭ α ، β لارغا نىسبەتەن $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha - \cos\beta$ كۆچكە ئىگە ئەمەس.

روشەنكى، توغرا نەتىجىگە ئىگە بولۇش ئۈچۈن، ئىلگىرى ئۆگەنگەن باشقا بىلىملەرگە باغلاشقا توغرا كېلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

سىزنىڭچە، ماس ئىپادىگە ئېرىشىش ئۈچۈن ئىلگىرى ئۆگەنگەن قايسى بىلىملەر كېرەك بولىدۇ؟

بۇ يەردە چېتىلىدىغىنى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە مەسىلىسى، يەنى $\alpha - \beta$ بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇسى مەسىلىسى بولغانلىقتىن، بىرلىك چەمبەردىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە سىزىقى ياكى ۋېكتورغا دائىر بىلىملەرگە باغلاپ مۇزاكىرە قىلىشقا بولىدۇ.



2.1.3 - رەسىم

بىز ئالدى بىلەن ئاددىي ئەھۋال ئۈستىدە مۇزاكىرە ئېلىپ بارايلى. 2.1.3 - رەسىمدىكىدەك، α ، β بۇلۇڭلارنى تار بۇلۇڭ ھەمدە $\beta < \alpha$ دەپ پەرەز قىلىمىز. α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى P_1 بولۇپ، $\angle POP_1 = \beta$ بولسا، ئۇ ھالدا $\angle xOP = \alpha - \beta$ بولىدۇ.

P نۇقتىدا ئارقىلىق x ئوققا PM تىكنى يۈرگۈزسەك (تىك ئاساسى M)، ئۇ ھالدا OM دەل $\alpha - \beta$ بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس سىزىقى بولىدۇ. بۇ يەردە، OM نى α ، β بۇلۇڭلارنىڭ سىنۇس سىزىقى، كوسىنۇس سىزىقى ئارقىلىق ئىپادىلەش كېرەك.

P نۇقتا ئارقىلىق OP_1 غا PA تىكنى يۈرگۈزسەك، تىك ئاساسى A بولىدۇ. Aنۇقتا ئارقىلىق x ئوق-قا AB تىكنى يۈرگۈزسەك تىك ئاساسى B بولىدۇ. P نۇقتا ئارقىلىق AB غا PC تىكنى يۈرگۈزسەك، تىك ئاساسى C بولىدۇ. ئۇ هالدا

OA بولسا $\cos\beta$ نى، AP بولسا $\sin\beta$ نى ئىپادىلەيدۇ ھەمدە $\alpha = \angle P_1Ox = \angle PAC$ بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن

$$\begin{aligned} OM &= OB + BM \\ &= OB + CP \\ &= OA\cos\alpha + AP\sin\alpha \\ &= \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha . \end{aligned}$$

دىققەت قىلىشقا تېگىشلىكى شۇكى، يۇقىرىقى نەتىجە α، β، $\alpha-\beta$ لارنىڭ ھەممىسى تار بۇلۇڭ ھەمدە $\alpha > \beta$ بولغان ئەھۋالدا كېلىپ چىققان. بۇ نەتىجىنىڭ α، β بۇلۇڭلار خالىغان بۇلۇڭ بولغاندىمۇ كۆچكە ئىگە بولىدىغان - بولمايدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈش ئۈچۈن، يەنە نۇرغۇن كېڭەيتىش خىزمەتلىرىنى ئىشلىشىمىز كېرەك، ئۇنىڭ ئۈستىگە بۇ كېڭەيتىش خىزمىتىنىڭ جەريانىمۇ بىرقەدەر مۇرەككەپ. ساۋاقداشلار ئۆزلىرى سىناپ باقسا بولىدۇ.

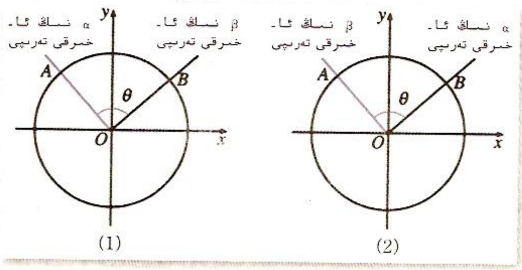
تۆۋەندە ۋېكتورغا دائىر بىلىملەرنى قوللىنىپ ئىزدىنىش ئېلىپ بارىمىز.

3.1.3 - رەسىمدىكىدەك، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى xOy تا بىرلىك چەمبەر O نى سىزىپ، Ox نى باشلىنىش تەرىپى قىلىپ بۇلۇڭ α، β لارنى سىزساق ھەمدە ئۇلارنىڭ ئاخىرقى تەرىپى بىلەن بىرلىك چەمبەر O نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنى ئايرىم - ئايرىم A، B دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا

$$\overrightarrow{OA} = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \overrightarrow{OB} = (\cos\beta, \sin\beta).$$

ۋېكتورلارنىڭ سكاليار كۆپەيتمىسىنىڭ كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشىگە ئاساسەن مۇنداق بولىدۇ:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta . \end{aligned}$$



3.1.3 - رەسىم

$\overrightarrow{OA}$ بىلەن $\overrightarrow{OB}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭىنى θ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos\theta = \cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta .$$

ۋېكتور قورالىدىن پايدىلىنىپ ئىزدىنىش جەريانى نېمىدېگەن ئاددىي - ھە!

يەنە بىر تەرەپتىن، 3.1.3 - رەسىم (1) دىن بىلىشكە بولىدۇكى، $\alpha = 2k\pi + \beta + \theta$؛ 3.1.3 - رەسىم (2) دىن بىلىشكە بولىدۇكى، $\alpha = 2k\pi + \beta - \theta$. شۇنىڭ بىلەن

$$\alpha - \beta = 2k\pi \pm \theta, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

شۇڭا،

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta .$$

يەنە

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta .$$

شۇڭا، خالىغان بۇلۇڭ α ، β لارغا نىسبەتەن مۇنداق بولىدۇ:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta .} \qquad (C_{(\alpha-\beta)})$$

بۇ فورمۇلىدا خالىغان بۇلۇڭ α ، β لارنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس قىممىتى بىلەن ئۇلارنىڭ ئايرىمىسى $\alpha-\beta$ نىڭ كوسىنۇس قىممىتى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت بېرىلگەن. بۇ فورمۇلا ئايرىما بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس فورمۇلىسى دېيىلىدۇ ۋە قىسقارتىپ $C_{(\alpha-\beta)}$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$ غا ئىگە بولغاندىن كېيىن، $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\sin\alpha$ ، $\sin\beta$ لارنىڭ قىممىتىنى بىلسەكلا، $\cos(\alpha-\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تاپالايمىز.

1 - مىسال. ئايرىما بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ $\cos 15^\circ$ نىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

1 - خىل يېشىش ئۇسۇلى:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &=\cos(45^\circ-30^\circ)\\ &=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\ &=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

2 - خىل يېشىش ئۇسۇلى:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &=\cos(60^\circ-45^\circ)\\ &=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

مۇلاھىزە ؟

بۇ مىسالنى ئىشلىگەندىن كېيىن، $\sin 75^\circ$ نىڭ قىممىتىنى تاپالامسىز؟

2 - مىسال. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ، $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ ، $\cos\beta=-\frac{5}{13}$ ، β ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos(\alpha-\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$ بىلەن بۇ مىسالنىڭ شەرتىنى باغلىغاندا، $\cos(\alpha-\beta)$ نى ھېسابلاش ئۈچۈن قانداق تەييارلىقلارنى قىلىش كېرەك؟

يېشىش: $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ، $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5};$$

يەنە $\cos\beta=-\frac{5}{13}$، β نىڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكىدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}.$$

شۇڭا

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)$$
$$=-\frac{33}{65}.$$

تەپەككۇرنىڭ تەرتىپلىكلىكى ۋە ئىپادىلەشنىڭ سىستېمىلىقلىقى تىرىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇشنىڭ ئاساسىي تەلىپى.

مەشىق

1. فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$ دىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$;

(2) $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$.

2. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$، $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. $\sin\theta=\frac{15}{17}$، θ نىڭ ئىككىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$، $\alpha\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$، $\cos\beta=\frac{3}{4}$، $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos(\beta-\alpha)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

2-1-3 ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس، تانگېنس فورمۇلىلىرى

مۇلاھىزە ؟

فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$ دىن چىقىپ، ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىنىڭ تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيەلىرىنىڭ باشقا فورمۇلىلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

تۆۋەندە فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$نى ئاساس قىلىپ باشقا فورمۇلىلارنى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز.

3 ـ باب

مەسىلەن، $\cos(\alpha-\beta)$ بىلەن $\cos(\alpha+\beta)$ نى سېلىشتۇرساق ھەمدە $\alpha+\beta$ بىلەن $\alpha-\beta$ ئارىسىدىكى باغلىنىش $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$ غا دىققەت قىلساق، ئۇ ھالدا فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos[\alpha-(-\beta)]\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

شۇنىڭ بىلەن، ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسىنىڭ كوسىنۇس فورمۇلىسىغا ئىگە بولدۇق، ئۇ قىسقارتىپ $C_{(\alpha+\beta)}$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

بۇ يەردە قوللىنىلىدىغىنى قوشۇش بىلەن ئېلىشنىڭ باغلىنىشى بولۇپ، نامەلۇمنى ئالماشتۇرۇش قارىشى ئارقىلىقمۇ مۇزاكىرە قىلىشقا بولىدۇ: فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$ خالىغان α، β لار ئۈچۈن كۈچكە ئىگە بولغانلىقتىن، ئۇنىڭدىكى β نى $-\beta$ غا ئالماشتۇرساقمۇ فورمۇلا چوقۇم كۈچكە ئىگە بولىدۇ. بۇنىڭدىن فورمۇلا $C_{(\alpha+\beta)}$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ.

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.} \qquad (C_{(\alpha+\beta)})$$

ئىزدىنىش

يۇقىرىدا ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىنىڭ كوسىنۇس فورمۇلىسىغا ئىگە بولدۇق. ھاسىلىۋى فورمۇلا 5 (ياكى 6) دىن پايدىلىنىپ سىنۇس، كوسىنۇسلارنى بىر ـ بىرىگە ئايلاندۇرغىلى بولىدىغانلىقى بىزگە مەلۇم. ئۇنداق بولسا، $C_{(\alpha+\beta)}$، $C_{(\alpha-\beta)}$ ۋە ھاسىلىۋى فورمۇلا 5. (ياكى 6) لەرگە ئاساسەن، $\sin(\alpha+\beta)$، $\sin(\alpha-\beta)$ لارنىڭ خالىغان بۇلۇڭ α، β لارنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس قىممەتلىرى بىلەن ئىپادىلەنگەن فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

كەلتۈرۈپ چىقارغان نەتىجىڭىزنى تۆۋەندىكى رامكا ئىچىگە تولدۇرۇڭ:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)= \\ &\sin(\alpha-\beta)= \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}&(S_{(\alpha+\beta)})\\ &(S_{(\alpha-\beta)})\end{aligned}$$

ئىزدىنىش

تانگېنس فۇنكسىيىسى بىلەن سىنۇس، كوسىنۇس فۇنكسىيىلىرىنىڭ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، $C_{(\alpha\pm\beta)}$، $S_{(\alpha\pm\beta)}$ لارنى چىقىش قىلغان ھالدا، $\tan(\alpha+\beta)$، $\tan(\alpha-\beta)$ لارنىڭ خالىغان بۇلۇڭ α، β لارنىڭ تانگېنسى بىلەن ئىپادىلەنگەن فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

CHAPTER 3

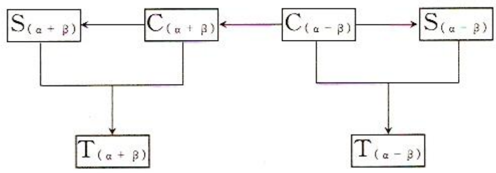
ئىزدىنىش نەتىجىڭىزنى تۆۋەندىكى رامكا ئىچىگە تولدۇرۇڭ:

$\tan(\alpha+\beta)=$	$(T_{(\alpha+\beta)})$
$\tan(\alpha-\beta)=$	$(T_{(\alpha-\beta)})$

فورمۇلا $S_{(\alpha+\beta)}$، $C_{(\alpha+\beta)}$، $T_{(\alpha+\beta)}$ لاردا خالىغان بۇلۇڭ α، β لارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتى بىلەن ئۇلارنىڭ يىغىندى بۇلۇڭى $\alpha+\beta$ نىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە قىممىتى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت بېرىلگەن. قۇلايلىق بولۇش ئۈچۈن، بىز بۇ ئۈچ فورمۇلىنى **يىغىندى بۇلۇڭ فورمۇلىسى** دەپ ئاتايمىز.

مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، فورمۇلا $S_{(\alpha-\beta)}$، $C_{(\alpha-\beta)}$، $T_{(\alpha-\beta)}$ لارنى **ئايرىما بۇلۇڭ فورمۇلىسى** دەپ ئاتايمىز.

يۇقىرىقى كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانىدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇلۇڭلارنىڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىغا دائىر بۇ 6 ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە فورمۇلىسى ئارىسىدا زىچ لوگىكىلىق باغلىنىش مەۋجۇت. بۇ خىل باغلىنىشنى رامكىلىق سىخېما ئارقىلىق تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:



بۇ 6 فورمۇلىنىڭ باشقا لوگىكىلىق باغلىنىشىنىڭ رامكىلىق سىخېمىسىنى سىزىپ چىقالامسىز؟

3 ـ مىسال. $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$، α نىڭ تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$، $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$، $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ لارنىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

يېشىش: $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ ۋە α نىڭ تۆتىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكىگە ئاساسەن:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},$$

شۇڭا

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}.$$

شۇنىڭ بىلەن مۇنداق بولىدۇ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{10};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{10};$$

$$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}$$
$$=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}=-7.$$

مۇلاھىزە ؟

يۇقىرىقىلاردىن كۆرۈشكە بولىدۇكى، بۇ مىسالنىڭ شەرتى ئاستىدا $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ بولىدۇ. ئۇنداق بولسا خالىغان α بۇلۇڭغا نىسبەتەن بۇ تەڭلىك كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ ئەگەر كۈچكە ئىگە بولسا، قانچە خىل ئۇسۇل ئارقىلىق ئىسپاتلاپ بېرەلەيسىز؟

4 - مىسال. يىغىندى (ئايرىما) بۇلۇڭ فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى ھېسابلاڭ:

(1) $\sin 72^\circ\cos 42^\circ-\cos 72^\circ\sin 42^\circ$;

(2) $\cos 20^\circ\cos 70^\circ-\sin 20^\circ\sin 70^\circ$;

(3) $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$.

تەھلىل: يىغىندى بۇلۇڭ بىلەن ئايرىما بۇلۇڭ فورمۇلىسىدا $\alpha\pm\beta$ نىڭ تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرى α، β بۇلۇڭلارنىڭ تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىگە ئايلاندۇرۇلغان. ئەگەر بۇنىڭ ئەكسىچە، فورمۇلىنى ئوڭدىن سولغا قاراپ قوللانساق، يۇقىرىقى تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىنى ئاددىيلاشتۇرالايمىز.

يېشىش: (1) $S_{(\alpha-\beta)}$ فورمۇلىدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\sin 72^\circ\cos 42^\circ-\cos 72^\circ\sin 42^\circ$$
$$=\sin(72^\circ-42^\circ)$$
$$=\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{2};$$

(2) $C_{(\alpha+\beta)}$ فورمۇلىدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\cos 20^\circ\cos 70^\circ-\sin 20^\circ\sin 70^\circ$$
$$=\cos(20^\circ+70^\circ)$$

CHAPTER 3

$= \cos 90^\circ$

$= 0;$

(3) فورمۇلا $T_{(\alpha+\beta)}$ ۋە $\tan 45^\circ = 1$ دىن تۈۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 15^\circ}$$

$$= \tan(45^\circ + 15^\circ)$$

$$= \tan 60^\circ$$

$$= \sqrt{3}.$$

بىز ئىككى بۇلۇڭ يىغىندىسى ۋە ئايرىمىسىنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە فورمۇلىلىرىغا ئىگە بولغاندىن كېيىن، بابنىڭ بېشىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان مەسىلىنى ھەل قىلالايمىز.

$\sin\alpha = \frac{30}{67}$ دىن $\cos\alpha \approx \frac{60}{67}$ كېلىپ چىقىدۇ، شۇڭا $\tan\alpha \approx \frac{1}{2}$. شۇنىڭ بىلەن

$$\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{\tan 45^\circ + \tan\alpha}{1-\tan 45^\circ \tan\alpha}$$

$$= \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

$$\approx \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

شۇنىڭ بىلەن $x \approx \frac{30\times 3}{\frac{1}{2}} - 30 = 150$.

شۇنىڭ ئۈچۈن بۇ تېلېۋىزىيە مۇنارىنىڭ ئېگىزلىكى تەخمىنەن 150 مېتىر.

مەشىق

1. يىغىندى (ئايرىما) بۇلۇڭ فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\sin 15^\circ$; (2) $\cos 75^\circ$;

(3) $\sin 75^\circ$; (4) $\tan 15^\circ$.

2. $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. $\sin\theta = -\frac{12}{13}$، θ نىڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. $\tan\alpha = 3$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\sin 72^\circ \cos 18^\circ + \cos 72^\circ \sin 18^\circ$;

(2) $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ$;

(3) $\dfrac{\tan 12^\circ + \tan 33^\circ}{1 - \tan 12^\circ \tan 33^\circ}$;

(4) $\cos 74^\circ \sin 14^\circ - \sin 74^\circ \cos 14^\circ$;

(5) $\sin 34^\circ \sin 26^\circ - \cos 34^\circ \cos 26^\circ$;

(6) $\sin 20^\circ \cos 110^\circ + \cos 160^\circ \sin 70^\circ$.

6. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$;

(2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$;

(3) $\sqrt{2}(\sin x - \cos x)$;

(4) $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{6}\sin x$.

7. $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha - \cos(\beta-\alpha)\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$، β نىڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بې-رىلگەن، $\sin\left(\beta + \dfrac{5\pi}{4}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3-1-3 ئىككى ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭنىڭ سىنۇس، كوسىنۇس ۋە تانگېنس فورمۇلىلىرى

بىز فورمۇلا $C_{(\alpha-\beta)}$ نى ئاساس قىلىپ، ئالتە دانە يىغىندى (ئايرىما) بۇلۇڭ فورمۇلىسىغا ئېرىشتۇق، تۆۋەندە يىغىندى (ئايرىما) بۇلۇڭ فورمۇلىسىنى ئاساس قىلىپ ئىككى ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز.

ئىزدىنىش

$S_{(\alpha\pm\beta)}$، $C_{(\alpha\pm\beta)}$، $T_{(\alpha\pm\beta)}$ لاردىن پايدىلىنىپ $\sin 2\alpha$، $\cos 2\alpha$، $\tan 2\alpha$ لەرنىڭ فورمۇلىلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

كەلتۈرۈپ چىقارغان نەتىجىڭىزنى تۆۋەندىكى رامكا ئىچىگە تولدۇرۇڭ:

$\sin 2\alpha =$ $(S_{2\alpha})$

$\cos 2\alpha =$ $(C_{2\alpha})$

$\tan 2\alpha =$ $(T_{2\alpha})$

CHAPTER 3

يۇقىرىدا ئىگە بولغان ئىككى ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس فورمۇلىسى ($C_{2\alpha}$) دا، ئەگەر ئىپادىدە پەقەت α نىڭ سىنۇس (كوسىنۇس) ىلا بولۇش تەلەپ قىلىنسا، ئۇ ھالدا يەنە تۆۋەندىكىگە ئېرىشكىلى بولىدۇ:

$$\cos 2\alpha =$$
$$\cos 2\alpha =$$

يۇقىرىدىكى فورمۇلىلار **ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ فورمۇلىسى** ❶ دەپ ئاتىلىدۇ. ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ فورمۇلىسى α نىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسى بىلەن 2α نىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئىپادىلەپ بېرىدۇ.

❶ بۇ يەردىكى «ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ» دېگەن سۆز «ئىككى ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ» نى كۆرسىتىدۇ، ئەمما «ئۈچ ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ» دېگەن ئاتالغۇلارغا دۇچ كەلگەندە، «ئۈچ» نى قىسقارتىۋېتىشكە بولمايدۇ.

«ھەسسىلىك» ئىككى مىقدار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى تەسۋىرلەيدۇ، 2α نى α نىڭ ئىككى ھەسسىسى، 4α نى 2α نىڭ ئىككى ھەسسىسى، $\frac{\alpha}{2}$ نى $\frac{\alpha}{4}$ نىڭ ئىككى ھەسسىسى دېيىمىز، بۇ يەردە نامەلۇمنى ئالماشتۇرۇش ئىدىيىسى مەۋجۇت.

5 - مىسال. $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$، $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin 4\alpha$، $\cos 4\alpha$، $\tan 4\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

تەھلىل: شەرتتە 2α نىڭ سىنۇسىنىڭ قىممىتى بېرىلگەن، 2α نىڭ ئىككى ھەسسىسى 4α بولىدىغانلىقتىن، ئىككى ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ مۇھاكىمە قىلىشقا بولىدۇ.

يېشىش: $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi .$$

يەنە $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$ بولغانلىقتىن،

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

شۇنىڭ بىلەن

$$\begin{aligned} \sin 4\alpha &= \sin[2\times(2\alpha)] \\ &= 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\ &= 2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= \cos[2\times(2\alpha)] \\ &= 1-2\sin^2 2\alpha \\ &= 1-2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}; \end{aligned}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}$$

$$= \left(-\frac{120}{169}\right) \times \frac{169}{119} = -\frac{120}{119}.$$

6 ـ مىسال. $\triangle ABC$ دا، $\cos A = \frac{4}{5}$ ، $\tan B = 2$ بولسا، $\tan\ (2A + 2B)$ نىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

$2A + 2B$ بىلەن A، B لار ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت ھاسىل قىلىشقا بولىدۇ؟

1 ـ خىل يېشىش ئۇسۇلى: $\triangle ABC$ دا،

$\cos A = \frac{4}{5}$ ، $0 < A < \pi$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

شۇڭا، $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ ،

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}.$$

يەنە $\tan B = 2$ بولغانلىقتىن،

$$\tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

شۇنىڭ بىلەن،

$$\tan\ (2A + 2B) = \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A \tan 2B}$$

$$= \frac{\frac{24}{7} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{24}{7} \times \left(-\frac{4}{3}\right)}$$

$$= \frac{44}{117}.$$

2 ـ خىل يېشىش ئۇسۇلى: $\triangle ABC$ دا،

$\cos A = \frac{4}{5}$ ، $0 < A < \pi$ دىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

شۇڭا، $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ ،

يەنە $\tan B = 2$ بولغانلىقتىن،

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}+2}{1-\frac{3}{4}\times 2}$$
$$=-\frac{11}{2}.$$

شۇنىڭ بىلەن،

$$\tan(2A+2B)=\tan[2(A+B)]$$
$$=\frac{2\tan(A+B)}{1-\tan^2(A+B)}$$
$$=\frac{2\times\left(-\frac{11}{2}\right)}{1-\left(-\frac{11}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{44}{117}.$$

مەشىق

1. $\cos\frac{\alpha}{8}=-\frac{4}{5}$، $8\pi<\alpha<12\pi$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\frac{\alpha}{4}$، $\cos\frac{\alpha}{4}$، $\tan\frac{\alpha}{4}$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

2. $\sin(\alpha-\pi)=\frac{3}{5}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos 2\alpha$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$، $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan\alpha$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. $\tan 2\alpha=\frac{1}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan\alpha$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;

(2) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

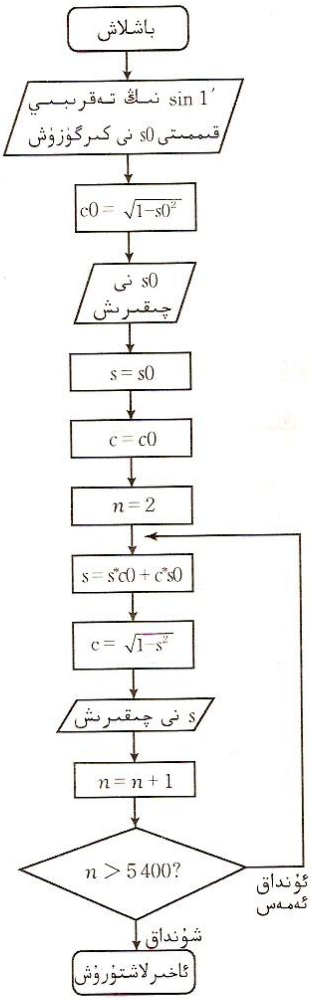
(3) $\frac{\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$;

(4) $2\cos^2 22.5^\circ-1$.

3 ـ باب

ئۈچۈر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

ئۈچۈر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلى تۈزۈش



«ماتېماتىكا①» دە بىز بىلگەن ئوقۇش ۋە مۇلاھىزىدىكى «لوگارىفمىنىڭ كەشىپ قىلىنىشى» دا، ناپىرنىڭ لوگارىفمىدىن پايدىلىنىپ، ھەر $1'$ ئارىلىق تاشلاپ، $0^\circ \sim 90^\circ$ ئارىلىقىدىكى بۇلۇڭلارنىڭ سەككىز خانىلىق ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلىنى تۈزۈپ چىققانلىقى ئوتتۇرىغا قويۇلغان. شۇنداق دېيىشكە بولىدۇكى، ناپىر ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلى تۈزۈشتىن ئىبارەت بۇ زور خىزمەتنى يالغۇز قولدا ھېسابلاشقا تايىنىپ ئىشلەپ چىققان بولۇپ، بۇ، ئۇنىڭ كۈچلۈك ئىرادىسى ۋە پەن ـ تېخنىكا ئۈچۈن ئۆزىنى بېغىشلاشتەك روھىنى نامايان قىلىدۇ. بىز بۈگۈنكى كۈندە، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ۋە ئالگورىزمغا دائىر ئۆگەنگەن بىلىملىرىمىزدىن پايدىلىنىپ، كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە ئىنتايىن توغرا بولغان ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلىنى تۈزۈپ چىقالايمىز. تۆۋەندە بىز كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، ھەر $1'$ ئارىلىق تاشلاپ، $0^\circ \sim 90^\circ$ ئارىلىقىدىكى بۇلۇڭلارنىڭ سەككىز خانىلىق ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلىنى تۈزۈپ چىقايلى.

ئىلمىي ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\sin 1' = 2.908\,882\,046 \times 10^{-4} \approx 0.000\,290\,888.$$

بۇنى دەسلەپكى قىممەت قىلىپ،

$$\cos 1' = \sqrt{1-\sin^2 1'};$$

$$\alpha_0 = 1',\quad \alpha_n = \alpha_{n-1} + 1',\ n \geqslant 1;$$

$$\sin\alpha_n = \sin 1' \cos\alpha_{n-1} + \cos 1' \sin\alpha_{n-1},$$

$$\cos\alpha_n = \sqrt{1-\sin^2\alpha_n}$$

لاردىن پايدىلانساق بىر ئالگورىزم (سولدىكى رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك) نى يېزىپ چىقالايمىز، ئاندىن كومپيۇتېر ئارقىلىق سىنۇس فۇنكسىيىسىنىڭ بىر ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلىگە ئېرىشىمىز.

ساۋاقداشلار، يۇقىرىدىكى پىكىر قىلىش يولىغا ئاساسەن، ئۆزۈڭلار پروگرامما تۈزۈپ، بىر ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلى تۈزۈپ چىقساڭلار بولىدۇ.

1.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. فورمۇلا $S_{(\alpha-\beta)}$، $C_{(\alpha-\beta)}$ لاردىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$; (2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$;

(3) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; (4) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

2. $\cos\alpha=\frac{3}{5}$، $0<\alpha<\pi$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. $\sin\alpha=\frac{2}{3}$، $\cos\beta=-\frac{3}{4}$، $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$، $\beta\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos(\alpha-\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. α، β لارنىڭ تار بۇلۇڭ ھەمدە $\cos\alpha=\frac{1}{7}$، $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\beta$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. (كۆرسەتمە: $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$)

5. $\sin(30^\circ+\alpha)=\frac{3}{5}$، $60^\circ<\alpha<150^\circ$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\alpha$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

6. يىغىندى (ئايرىما) بۇلۇڭ فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندىكى ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$; (2) $\cos\left(-\frac{61\pi}{12}\right)$; (3) $\tan\frac{35\pi}{12}$.

7. $\sin\alpha=\frac{2}{3}$، $\cos\beta=-\frac{3}{4}$، $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$، β نىڭ ئۈچىنچى چارەكتىكى بۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin(\alpha-\beta)$، $\cos(\alpha+\beta)$ لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.
$\frac{6+\sqrt{35}}{12}$ $\frac{3\sqrt5+2\sqrt7}{12}$

8. $\triangle ABC$ دا، $\sin A=\frac{5}{13}$، $\cos B=\frac{3}{5}$ بولسا، $\cos C$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.
$\cos A=-\frac{12}{13}\Rightarrow\cos C=\frac{56}{65}$, $\cos A=\frac{12}{13}$ $\cos C=-\frac{16}{65}$

9. $\sin\theta=\frac{3}{5}$، $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$، $\tan\varphi=\frac{1}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan(\theta+\varphi)$، $\tan(\theta-\varphi)$ لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.
-2 $-\frac{2}{11}$

10. $\tan\alpha$، $\tan\beta$ لار تەڭلىمە $2x^2+3x-7=0$ نىڭ ئىككى ھەقىقىي يىلتىزى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan(\alpha+\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

11. $\tan(\alpha+\beta)=3$، $\tan(\alpha-\beta)=5$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan2\alpha$، $\tan2\beta$ لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

12. $\triangle ABC$ دا، $AD\perp BC$ بولۇپ، تىك ئاساسى D ھەمدە $BD:DC:AD=2:3:6$ بولسا، $\angle BAC$ نىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ.

13. تۆۋەندىكىلەرنى ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $3\sqrt{15}\sin x+3\sqrt{5}\cos x$;

(2) $\frac{3}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$;

(3) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$;

(4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\frac{\sqrt{6}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

(5) $\sin 347^\circ\cos 148^\circ+\sin 77^\circ\cos 58^\circ$;

(6) $\sin 164^\circ\sin 224^\circ+\sin 254^\circ\sin 314^\circ$;

(7) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\gamma-\beta)-\cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\gamma)$;

(8) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)-\cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\beta)$;

(9) $\dfrac{\tan\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{12}}{1-\tan\frac{5\pi}{12}}$;

(10) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}$.

14. $\sin\alpha=0.80$، $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin 2\alpha$، $\cos 2\alpha$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. (نەتىجىنى ئىككى ئوناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېلىڭ)

15. $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$، $180^\circ<\varphi<270^\circ$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin 2\varphi$، $\cos 2\varphi$، $\tan 2\varphi$ لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

16. تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭنىڭ بىر ئاساس بۇلۇڭىنىڭ سىنۇسىنىڭ قىممىتى $\frac{5}{13}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ ئۈچبۇلۇڭنىڭ چوققا بۇلۇڭىنىڭ سىنۇسى، كوسىنۇسى ۋە تانگېنسىنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

17. $\tan\alpha=\frac{1}{7}$، $\tan\beta=\frac{1}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan(\alpha+2\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

18. $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\frac{1}{3}$ ھەمدە $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

19. تۆۋەندىكىلەرنى ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;

(2) $\cos^4\theta-\sin^4\theta$;

(3) $\sin x\cos x\cos 2x$;

(4) $\frac{1}{1-\tan\theta}-\frac{1}{1+\tan\theta}$.

B گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

(2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

2. $\triangle ABC$ دا، $\tan A$ ، $\tan B$ لار x كە دائىر تەڭلىمە $x^2 + p(x+1) + 1 = 0$ نىڭ ئىككى ھە-قىقىي يىلتىزى ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\angle C$ نى تېپىڭ.

3. تۆۋەندىكى تەڭلىكلەرنى كۆزىتىڭ:

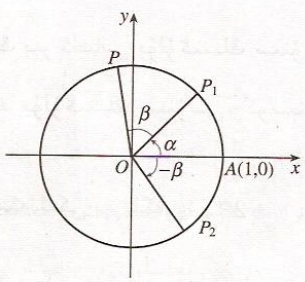
$$\sin^2 30° + \cos^2 60° + \sin 30° \cos 60° = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cos 50° = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 15° + \cos^2 45° + \sin 15° \cos 45° = \frac{3}{4}.$$

يۇقىرىقى ئىپادىلەرنىڭ ئورتاق ئالاھىدىلىكىنى تەھلىل قىلىپ، ئومۇمىي قانۇنىيەتنى ئەكس ئەتتۇرىدىغان تەڭلىكنى يېزىپ چىقىڭ ھەمدە ئۇنىڭ توغرىلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

4. رەسىمدىكى $A(1, 0)$ ، $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ، $P_2(\cos\beta, -\sin\beta)$ ، $P(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ نۇق-تىلارنى مۇلاھىزە قىلىڭ. بۇ رەسىمنى چىقىش قىلىپ، فورمۇلا $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

CHAPTER 2-3

ئاددىي ترىگونومېترىيىلىك تەپمۇتەڭ ئالماشتۇرۇش

يىغىندى (ئايرىما) بۇلۇڭ فورمۇلىسى، ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ فورمۇلىسىنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇش ئېلىپ بېرىشنىڭ يېڭى قورالىغا ئىگە بولدۇق، بۇنىڭ بىلەن ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇشنىڭ مەزمۇنى، پىكىر يولى ۋە ئۇسۇلى تېخىمۇ كۆپىيىپ، ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىش ۋە ھېسابلاش قابىلىيىتىمىزنى يۇقىرى كۆتۈرۈشىمىزگە ئىمكانىيەت يارىتىلدى.

α بىلەن $\frac{\alpha}{2}$ نىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟

1 - مىسال. $\sin^2\frac{\alpha}{2}$، $\cos^2\frac{\alpha}{2}$، $\tan^2\frac{\alpha}{2}$ لارنى $\cos\alpha$ بىلەن ئىپادىلەيلى.

يېشىش: α بولسا $\frac{\alpha}{2}$ نىڭ ئىككى ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭى.

ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ فورمۇلىسى $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ دىكى 2α نىڭ ئورنىغا α نى، α نىڭ ئورنىغا $\frac{\alpha}{2}$ نى قويساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

شۇڭا

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad ①$$

ھەسسىلەنگەن بۇلۇڭ فورمۇلىسى $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ دىكى 2α نىڭ ئورنىغا α نى، α نىڭ ئورنىغا $\frac{\alpha}{2}$ نى قويساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,$$

شۇڭا

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad ②$$

① ② ئىككى تەڭلىكنىڭ ئوڭ، سول ئىككى تەرىپىنى ئايرىم - ئايرىم ھالدا ئۆزئارا بۆلسەك، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

1 - مىسالنىڭ نەتىجىسىنى يەنە مۇنداق ئىپادىلەشكىمۇ بولىدۇ:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

بۇلار يېرىم بۇلۇڭ فورمۇلىسى دەپ ئاتىلىدۇ (ئەستە ساقلاش تەلەپ قىلىنمايدۇ)، ئۇنىڭ ئالامىتى $\frac{\alpha}{2}$ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى ياتقان چارەككە ئاساسەن بەلگىلىنىدۇ.

CHAPTER

مۇلاھىزە ؟

ئالگېبرالىق ئالماشتۇرۇش بىلەن ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇشنىڭ قانداق ئوخشىماسلىقى بار؟

ئالگېبرالىق ئالماشتۇرۇشتا كۆپ ھاللاردا ئىپادە قۇرۇلمىسىنىڭ شەكلىنى ئالماشتۇرۇش كۆزدە تۇتۇلىدۇ. ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇشقا نىسبەتەن، ئوخشاش بولمىغان ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرى قۇرۇلما شەكلى جەھەتتە پەرقلىنىپلا قالماستىن، بەلكى يەنە ئۇلار ئۆز ئىچىگە ئالغان بۇلۇڭلار ۋە بۇ بۇلۇڭلارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە تۇرلىرى جەھەتتىنمۇ پەرقلىنىدىغانلىقتىن، ترىگونومېترىيىلىك تەپمۇتەڭ ئالماشتۇرۇشتا، كۆپ ھاللاردا ئالدى بىلەن ئىپادە ئۆز ئىچىگە ئالغان ھەرقايسى بۇلۇڭلار ئارىسىدىكى باغلىنىشنى تېپىشقا ھەمدە بۇنى ئاساس قىلىپ ئۇلارغا باغلىنىشلىق مۇۋاپىق فورمۇلىلارنى تاللاشقا توغرا كېلىدۇ، مانا بۇ ترىگونومېترىيىلىك ئىپادىلەرنى تەپمۇتەڭ ئالماشتۇرۇشنىڭ مۇھىم ئالاھىدىلىكىدۇر.

بۇ ئىككى ئىپادىنىڭ ئوڭ، سول ئىككى تەرىپىنىڭ قۇرۇلما شەكلى جەھەتتە قانداق ئوخشىماسلىقلار بار؟

2 - مىسال. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلايلى:

$$(1)\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$(2)\ \sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

ئىسپات: (1) چۈنكى

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

يۇقىرىقى ئىككى ئىپادىنىڭ ئوڭ، سول ئىككى تەرىپىنى ئايرىم - ئايرىم ھالدا ئۆزئارا قوشساق تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

يەنى

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

ئەگەر

$\sin\alpha\cos\beta=x$,

$\cos\alpha\sin\beta=y$,

دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا مۇنداق بولىدۇ:

$x+y=\sin(\alpha+\beta)$,

$x-y=\sin(\alpha-\beta)$.

يۇقىرىقى تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يەشسەكلا، x نى، يەنى $\sin\alpha\cos\beta$ نى تاپالايمىز.

(2) (1) دىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta. \quad ①$$

$\alpha+\beta=\theta$، $\alpha-\beta=\varphi$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2},\ \beta=\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

α ، β لارنىڭ قىممىتىنى ① دىكى ئورنىغا قويساق تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

مۇلاھىزە ؟

2 - مىسالنى ئىسپاتلاش جەريانىدا، ئەگەر (1) نىڭ نەتىجىسىنى ئىشلەتمىسەك، (2) نى قانداق ئىسپاتلاشقا بولىدۇ؟

2 - مىسالنى ئىسپاتلاش جەريانىدا، نامەلۇمنى ئالماشتۇرۇش ئىدىيىسى قوللىنىلدى، مەسىلەن، $\alpha+\beta$ نى θ، $\alpha-\beta$ نى φ دەپ قاراپ، بۇ ئارقىلىق α، β لارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرى θ، φ لارنىڭ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىگە ئالماشتۇرۇلدى. ئۇنىڭدىن باشقا، $\sin\alpha\cos\beta$ نى x، $\cos\alpha\sin\beta$ نى y، تەڭلىكنى x، y كە دائىر تەڭلىمە دەپ قاراپ، تەڭلىمىنى يېشىش ئارقىلىق x نى تېپىش دەل تەڭلىمە ئىدىيىسىنىڭ ئىپادىلىنىشىدۇر.

3 - مىسال. فۇنكسىيە $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ نىڭ دەۋرى، ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تاپايلى.

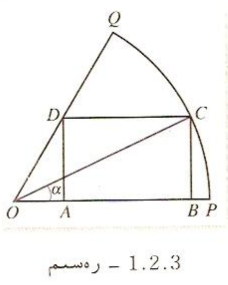
تەھلىل: ئالدى بىلەن ترىگونومېترىيىلىك تەمۇتەڭ ئالماشتۇرۇشتىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيە ئىپادىسىنى ئاددىيلاشتۇرۇپ، ئاندىن ماس قىممىتىنى تاپىمىز.

يېشىش:

$$\begin{aligned} y&=\sin x+\sqrt{3}\cos x\\ &=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\ &=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

شۇڭا فۇنكسىيىنىڭ دەۋرى 2π، ئەڭ چوڭ قىممىتى 2، ئەڭ كىچىك قىممىتى -2 بولىدۇ.

4 - مىسال. 1.2.3 - رەسىمدىكىدەك، OPQ رادىئۇسى 1، مەركىزى بۇلۇڭى $\frac{\pi}{3}$ بولغان سېكتور، C بولسا سېكتور يايى ئۈستىدىكى ھەرىكەتچان نۇقتا، $ABCD$ بولسا سېكتورغا ئىچتىن تېگىشكەن تىك تۆتبۇلۇڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. $\angle COP=\alpha$ دەپ ئېلىپ، α بۇلۇڭ قانداق قىممەتنى ئالغاندا، تىك تۆتبۇلۇڭ $ABCD$ نىڭ يۈزى ئەڭ چوڭ بولىدىغانلىقىنى ھەمدە بۇ ئەڭ چوڭ يۈزنى تاپايلى.



1.2.3 - رەسىم

تەھلىل: α بۇلۇڭ قانداق قىممەتنى ئالغاندا، تىك تۆتبۇلۇڭ $ABCD$ نىڭ يۈزى S نىڭ ئەڭ چوڭ بولىدىغانلىقىنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ تېپىشقا بولىدۇ:

(1) S بىلەن α ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەتنى تېپىش؛

(2) تېپىلغان فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەتكە ئاساسەن، S نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتىنى تېپىش.

CHAPTER 3

يېشىش: $Rt\triangle OBC$ دا،

$$OB=\cos\alpha,\quad BC=\sin\alpha.$$

$Rt\triangle OAD$ دا،

$$\frac{DA}{OA}=\tan 60^\circ=\sqrt{3},$$

شۇڭا

$$OA=\frac{\sqrt{3}}{3}DA=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha,$$

شۇڭا

$$AB=OB-OA=\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha.$$

تىك تۆتبۇلۇڭ $ABCD$ نىڭ يۈزىنى S دېسەك، ئۇ ھالدا

$$\begin{aligned}S&=AB\cdot BC\\&=\left(\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)\sin\alpha\\&=\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\alpha\\&=\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{6}(1-\cos 2\alpha)\\&=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{6}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ دىن $\frac{\pi}{6}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$ كېلىپ چىقىدۇ. شۇڭا،

$$2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},$$

يەنى $\alpha=\frac{\pi}{6}$ بولغاندا،

$$S_{\text{ئەڭ چوڭ}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

شۇڭا، $\alpha=\frac{\pi}{6}$ بولغاندا، تىك تۆتبۇلۇڭ $ABCD$ نىڭ يۈزى ئەڭ چوڭ بولۇپ، ئەڭ چوڭ يۈزى $\frac{\sqrt{3}}{6}$ بولىدۇ.

3 ـ، 4 ـ مىساللاردىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، تىرىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇش ئارقىلىق $y=a\sin x+b\cos x$ كۆرۈنۈشتىكى فۇنكسىيىلەرنى $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ كۆرۈنۈشتىكى فۇنكسىيىگە ئايلاندۇرۇپ، مەسىلىنى ئاددىيلاشتۇرۇۋالدۇق. بۇ جەريان ئايلاندۇرۇش ئىدىيىسىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ.

مەشىق

1. $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ نى ئىسپاتلاڭ.

2. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$;

(2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

(3) $\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

3. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$;

(2) $\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$;

(3) $\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$.

4. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرى، ئېشىش ئىنتېرۋالى ۋە ئەڭ چوڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sin 2x\cos 2x$;

(2) $y=2\cos^2\frac{x}{2}+1$;

(3) $y=\sqrt{3}\cos 4x+\sin 4x$.

2.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 = 1 - \sin 4\alpha$;

(2) $\tan\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}} = -\dfrac{2}{\tan\theta}$;

(3) $\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\tan x$;

(4) $\dfrac{1+\sin 2\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi$;

(5) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$;

(6) $1+\cos 2\theta + 2\sin^2\theta = 2$;

(7) $\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan^2\theta$;

(8) $\dfrac{1+\sin 2\theta - \cos 2\theta}{1+\sin 2\theta + \cos 2\theta} = \tan\theta$.

2. $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$، $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\sin\alpha\cos\beta = 5\cos\alpha\sin\beta$;

(2) $\tan\alpha = 5\tan\beta$.

3. $\dfrac{1-\tan\theta}{2+\tan\theta} = 1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan 2\theta = -4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

4. $x+y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$، $x-y=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $x^2+y^2=1$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

5. فۇنكسىيە $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+4x\right)+\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ نىڭ ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرى بىلەن كېمىيىش ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $3+\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha = 8\sin^4\alpha$;

(2) $\dfrac{\tan\alpha\tan 2\alpha}{\tan 2\alpha-\tan\alpha}+\sqrt{3}\,(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=2\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

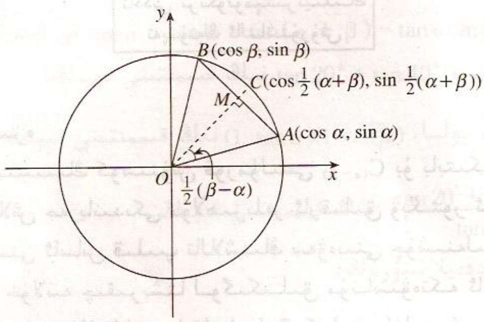
2. ئەگەر $\sin 76^\circ=m$ بولسا، m نى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئىپادە ئارقىلىق $\cos 7^\circ$ نى ئىپادىلەڭ.

3. $\alpha+2\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ ، $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\beta=2-\sqrt{3}$ لارنى بىرلا ۋاقىتتا كۈچكە ئىگە قىلىدىغان تار بۇلۇڭ α ، β لار مەۋجۇتمۇ؟ ئەگەر مەۋجۇت بولسا، ئۇلارنىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ؛ ئەگەر مەۋجۇت بولمىسا، سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

4. تۆۋەندىكى رەسىمدىن پايدىلىنىپ، بېرىلگەن ئىككى تەڭلىكنى ئىسپاتلىيالامسىز؟

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

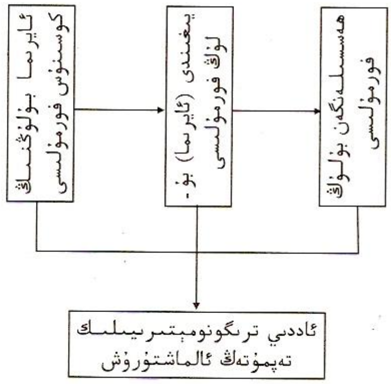
5. $f(\alpha)=\sin^x\alpha+\cos^x\alpha$ ، $x\in\{n\,|\,n=2k,\ k\in\mathbf{N}_+\}$ دەپ پەرەز قىلايلى. ترىگونومېترىيەلىك ئالماشتۇرۇشتىن پايدىلىنىپ، $x=2, 4, 6$ بولغاندىكى $f(\alpha)$ نىڭ قىممەت ئېلىش ئەھۋالىنى مۆلچەرلەڭ، ئاندىن يەنىمۇ ئىلگىرىلىگەن ھالدا $f(\alpha)$ نىڭ x ئادەتتىكى قىممەتلەرنى ئالغاندىكى قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى قىياس قىلىڭ.

6. (1) فۇنكسىيە $y=3\sin x+4\cos x$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) فۇنكسىيە $y=a\sin x+b\cos x$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى بىلەن ئەڭ كىچىك قىممىتىنى a، b لار ئارقىلىق ئىپادىلىيەلەمسىز؟

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. ئىككى بۇلۇڭ ئايرىمىسىنىڭ كوسىنۇس فورمۇلىسى $C_{(\alpha-\beta)}$ بۇ بابتىكى 11 فورمۇلىنىڭ ئاساسى. بۇ فورمۇلىنى ئىسپاتلاش جەريانىدىكى مۇلاھىزىلەر ئارقىلىق ۋېكتور ئۇسۇلىنىڭ رولىنى ھېس قىلالىدىڭىزمۇ؟ بۇ فورمۇلىنى ئاساس قىلىپ تاللاشنىڭ سەۋەبىنى چۈشىنەلىدىڭىزمۇ؟

2. لوگىكىلىق ئەقلىي خۇلاسە چىقىرىشتا لوگىكىلىق مۇناسىۋەتكە ئالاھىدە دىققەت قىلىنىدۇ. ئۇنداق بولسا بۇ بابتىكى 11 فورمۇلا ئارىسىدا قانداق لوگىكىلىق باغلىنىش مەۋجۇت؟ بۇ فورمۇلىلارنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانىدا قايسى ئاساسىي ماتېماتىكىلىق ئىدىيە - ئۇسۇللارنى قوللاندىڭىز؟

3. ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرى ترىگونومېترىيىلىك ئالماشتۇرۇشنىڭ ئوبيېكتى، سىز ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى قايسى ئاساسلىق تەرەپلەردىن بىلەلىدىڭىز؟ ترىگونومېترىيىلىك ئىپادىلەرنى ئالماشتۇرۇش بىلەن ئالگېبرالىق ئىپادىلەرنى ئالماشتۇرۇشنىڭ قانداق ئوخشاش جايلىرى بار؟ قانداق پەرقى بار؟ ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە ئىپادىلىرىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى تەھلىل قىلىشنىڭ ترىگونومېترىيىلىك تەپمۇتەڭ ئالماشتۇرۇش ئېلىپ بېرىش قابىلىيىتىڭىزنى يۇقىرى ئۆستۈرۈشىڭىزگە قانداق ياردىمى بولىدۇ؟

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. α، β لار تار بۇلۇڭ ھەمدە $\sin\alpha=\frac{4}{5}$، $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\beta$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. $\frac{16}{65}$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$، $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)=-\frac{12}{13}$، $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$، $\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin(\alpha+\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. $\frac{56}{65}$

3. α، β لار تار بۇلۇڭ ھەمدە $\tan\alpha=\frac{1}{7}$، $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan(\alpha+2\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. 1

4. (1) $\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta)$ نى ئىسپاتلاڭ؛

(2) $\tan20^\circ+\tan40^\circ+\sqrt{3}\tan20^\circ\tan40^\circ$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛ $\sqrt{3}$

(3) ئەگەر $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ بولسا، $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛ 2

(4) $\frac{\tan20^\circ+\tan40^\circ+\tan120^\circ}{\tan20^\circ\tan40^\circ}$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. $\sqrt{3}$

5. تۆۋەندىكىلەرنى ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\frac{1}{\sin10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}$; 4

(2) $\sin40^\circ(\tan10^\circ-\sqrt{3})$; -1

(3) $\tan70^\circ\cos10^\circ(\sqrt{3}\tan20^\circ-1)$; -1

(4) $\sin50^\circ(1+\sqrt{3}\tan10^\circ)$. 1

6. (1) $\cos\theta=-\frac{3}{5}$، $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛ $\frac{9}{5}$

(2) $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\alpha$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛ $\frac{24}{25}$

(3) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin2\theta$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛ $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(4) $\cos2\theta=\frac{3}{5}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. $\frac{17}{25}$

7. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$، $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\tan\alpha\tan\beta$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ. $\frac{1}{2}$

8. تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4 \alpha$;

(2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha} = \dfrac{1}{2}\tan \alpha + \dfrac{1}{2}$;

(3) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin \beta}{\sin \alpha}$;

(4) $\dfrac{3-4\cos 2A+\cos 4A}{3+4\cos 2A+\cos 4A} = \tan^4 A$.

9. فۇنكسىيە $y=(\sin x+\cos x)^2+2\cos^2 x$ بېرىلگەن.

(1) ئۇنىڭ كېمىيىش ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ؛

(2) ئۇنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى بىلەن ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ.

10. فۇنكسىيە $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$ بېرىلگەن.

(1) $f(x)$ نىڭ ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرىنى تېپىڭ؛

(2) $f(x)$ نىڭ $x\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ بولغاندىكى ئەڭ كىچىك قىممىتىنى ۋە ئەڭ كىچىك قىممەت ئالغاندىكى x نىڭ توپلىمىنى تېپىڭ.

11. فۇنكسىيە $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)$ بېرىلگەن.

(1) فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ ئەڭ كىچىك مۇسبەت دەۋرى بىلەن ئەڭ چوڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ ئىنتېرۋال $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ دىكى گرافىكىنى سىزىڭ.

12. فۇنكسىيە $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x+a$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى 1 ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) تۇراقلىق سان a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) $f(x)\geqslant 0$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان x نىڭ قىممەت ئېلىش توپلىمىنى تېپىڭ.

13. تۈز سىزىق $l_1 // l_2$، A بولسا l_1، l_2 لەر ئارىسىدىكى مۇقىم نۇقتا ھەمدە A نۇقتىدىن l_1 ۋە l_2 گىچە بولغان ئارىلىق ئايرىم - ئايرىم h_1، h_2، B بولسا l_2 تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى بىر ھەرىكەتچان نۇقتا ئىكەنلىكى ھەمدە AC بىلەن l_1 تۈز سىزىق C نۇقتىدا كېسىشىدىغان قىلىپ، $AC\perp AB$ يۇرگۇزۈلگەنلىكى بېرىلگەن بولسا، $\triangle ABC$ نىڭ يۈزىنىڭ ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ؟

B گۇرۇپپا

1. $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$، $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

2. $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$، $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos(\alpha-\beta)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\alpha=-\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$، $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\cos\alpha$ نىڭ قىممىتىنى

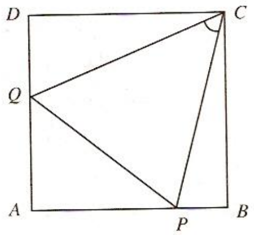
تېپىڭ.

4. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{3}{5}$، $\frac{17\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{4}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. $\sin\theta+\cos\theta=2\sin\alpha$، $\sin\theta\cdot\cos\theta=\sin^2\beta$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $4\cos^2 2\alpha=\cos^2 2\beta$ نى ئىسپاتلاڭ.

6. ئەگەر فۇنكسىيە $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+m$ نىڭ ئىنتېرۋال $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ دىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى 6 بولسا، تۇراقلىق سان m نىڭ قىممىتى بىلەن بۇ فۇنكسىيىنىڭ $x\in\mathbf{R}$ بولغاندىكى ئەڭ كىچىك قىممىتىنى ھەمدە بۇ قىممەتكە ماس بولغان x نىڭ قىممەت ئېلىش توپلىمىنى تېپىڭ.

7. رەسىمدىكىدەك، كۋادرات $ABCD$ نىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1، P، Q لار ئايرىم-ئايرىم AB، DA لارنىڭ ئۈستىدىكى نۇقتا بولسا، $\triangle APQ$ نىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى 2 بولغاندىكى $\angle PCQ$ نى تېپىڭ.



(7 - مىسال ئۇچۇن)

8. $\sin\beta+\cos\beta=\frac{1}{5}$، $\beta\in(0,\ \pi)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) $\tan\ \beta$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، قىممىتىنى تېپىشقا دائىر بەزى مەسىلىلەرنى تۈزەلەمسىز؟

خاتىمە

پارتىيىنىڭ مائارىپ فاڭجېنىنى ئومۇمىيۈزلۈك ئىزچىللاشتۇرۇش ھەمدە دەۋر تەرەققىياتىنىڭ ئېھتىياجىغا ماسلىشىپ ئوقۇغۇچىلارنىڭ ئۆمۈربويى تەرەققىي قىلىشىغا ئاساس ھازىرلاش ئۈچۈن، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ھەرقايسى پەنلەر دەرس ئۆلچەملىرى (تەجرىبە نۇسخا) گە ئاساسەن، ھەرقايسى پەنلەرنىڭ ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكلىرىنى تۈزۈپ چىقتۇق، تۈزۈش جەريانىدا مائارىپ ساھەسىدىكى كۆپلىگەن پېشقەدەملەر ۋە ھەرقايسى پەن مۇتەخەسسىسلىرىنىڭ قىزغىن ياردىمى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىشىغا ئېرىشتۇق. ھەرقايسى پەن دەرسلىكلىرى دەرس ئىسلاھاتى تەجرىبە رايونلىرىدىكى ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلار بىلەن ئاخىر يۈز كۆرۈشكەن بۇ پەيتتە، دەرسلىكلەرنىڭ باش مەسلىھەتچىسى بولغان دىڭ شىسۈن، شۈ جيالۇ، يې جىشەن، گۇ مىڭيۈەن، لۈ شىڭۋېي، ۋاڭ زىكۈن، لياڭ خېڭ، جىن چۈڭجى، بەي چۈنلى، تاۋ شىپىڭ قاتارلىق يولداشلارغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا دەرسلىك تۈزۈشكە يېتەكچىلىك قىلىش كومىتېتىنىڭ مۇدىرى يولداش ليۇ بىن ۋە كومىتېت ئەزالىرى جياڭ لەنشىڭ، لى جىلىن، ياڭ خۈەنمىڭ، گۇ لىڭيۈەن، يۈەن خاڭپېي قاتارلىق يولداشلارغىمۇ مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن «ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمى (تەجرىبە نۇسخا)» گە ئاساسەن، بىز بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتىدىكى پروفېسسور ليۇ شاۋشۈنى باش تۈزگۈچىلىككە تەكلىپ قىلىپ تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمىنى تەتقىق قىلىپ تۈزۈش گۇرۇپپىسىدىكى بىر قىسىم ئەزالار، ئالىي مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرى، ماتېماتىكا تەلىم – تەربىيە نەزەرىيىسى خىزمەت خادىملىرى، ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتۇش تەتقىقاتى خادىملىرى ۋە ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرىدىن تۈزۈش كومىتېتى تەشكىللەپ، بۇ بىر يۈرۈش ماتېماتىكا تەجرىبە دەرسلىكىنى تۈزۈپ چىقتۇق. بۇ يەردە، بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتى ماتېماتىكا پېنى ئىنىستىتۇتى رەھبەرلىرىنىڭ بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكنى تۈزۈش خىزمىتىگە يۇكسەك ئەھمىيەت بەرگەنلىكى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىغانلىقىغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا مۇشۇ بىر يۈرۈش دەرسلىككە تۈزىتىش پىكرى بەرگەن ۋە ياردىمىنى ئايىمىغان مۇتەخەسسىس، ئالىم، ئوقۇتقۇچى ھەمدە جەمئىيەتنىڭ ھەرقايسى ساھەلىرىدىكى دوستلارغا مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بۇ قىسىم دەرسلىك تۈزۈش كومىتېتىدىكى بارلىق ئەزالارنىڭ كوللېكتىپ ئەقىل – پاراسىتىنىڭ نەتىجىسىدۇر. دەرسلىكتە بېرىلگەن ئاساسلىق تۈزگۈچىلەردىن سىرت، بۇ قىسىم دەرسلىكنى مۇزاكىرە قىلىشقا قاتناشقانلاردىن ليۇ يىجۇ، يۇ چيۇشى، ۋاڭ رۇڭ، ما بو، جاڭ خى، ۋاڭ شېنخۇەي، تاۋ ۋېيلىن، گو خۇيچىڭ، بەي تاۋ، گۇ دەن، لۇ بىڭ، ۋاڭ جىڭگېڭ، شۇ يۇڭ، لۇ ۋېيچۈەن قاتارلىقلار بار.

بىز يەنە مۇشۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىۋاتقان ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلارغىمۇ رەھمەت ئېيتىمىز. سىلەرنىڭ بۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىش جەريانىدا پىكىر ۋە تەكلىپلىرىڭلارنى بىزگە ئۆز ۋاقتىدا يەتكۈزۈپ بېرىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز، شۇنداقلا سىلەرگە چوڭقۇر مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز. ھەممەيلەن قول تۇتىشىپ ئوقۇتۇش ماتېرىيالى قۇرۇلۇشى خىزمىتىنى بىرلىكتە ئورۇندايلى.

ئالاقىلىشىش شەكلى:

Tel: (010) 58758320, 58758333

E-mail: zhangjy @ pep.com.cn   liucm @ pep.com.cn

خەلق مائارىپ نەشرىياتى   دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ئورنى

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات – ئېچىش مەركىزى

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكلىرىنى تۈزۈش - تەرجىمە قىلىش خىزمىتىگە رەھبەرلىك قىلىش ھەيئىتى

ھەيئەت مۇدىرى: تۇرسۇن ئىبراھىم

مۇئاۋىن مۇدىرى: ئالىمجان مەمتىمىن ما ۋېنخۇا

ھەيئەت ئەزالىرى:
پېڭ شيەنۋېي — شيا پىن
ئەنۋەر ئوسمان — تاھىر ناسىر
ئەركىن مۇھەممەت — نۇرباقىت قادىر
ئەكبەر سىراجىدىن — تۇنىياز ئىلياس
بەدەل قۇرمانقان

* * *

تەرجىمانى: رەمىلە ئابدۇرېشىت
مۇھەررىرى: ھىمىت راخمان
مەسئۇل مۇھەررىرى: ئۆركەش ئابدۇرېھىم
مەسئۇل كوررېكتورى: ئارزۇگۇل ھېيتەم

ISBN978-7-5370-6734-8

9 787537 067348 >

باھاسى : 9.56 يۈەن