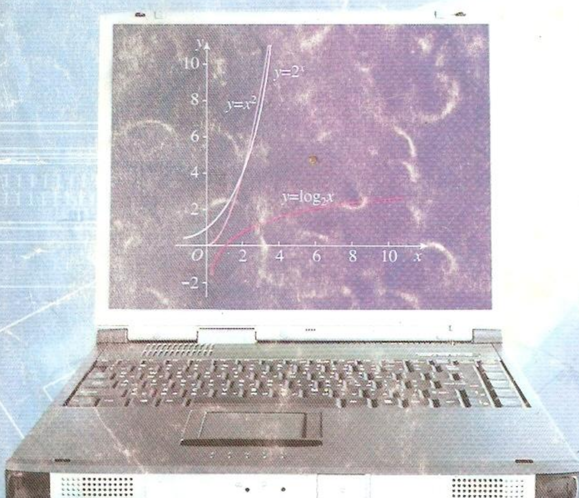
2004 ـ يىلى مەملىكەتلىك ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپ ئوقۇتۇش ماتېرىياللىرىنى
تەكشۈرۈپ بېكىتىش كومىتېتىنىڭ دەسلەپكى تەكشۈرۈشىدىن ئۆتكەن

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا 1

زۆرۈر دەرسلىك

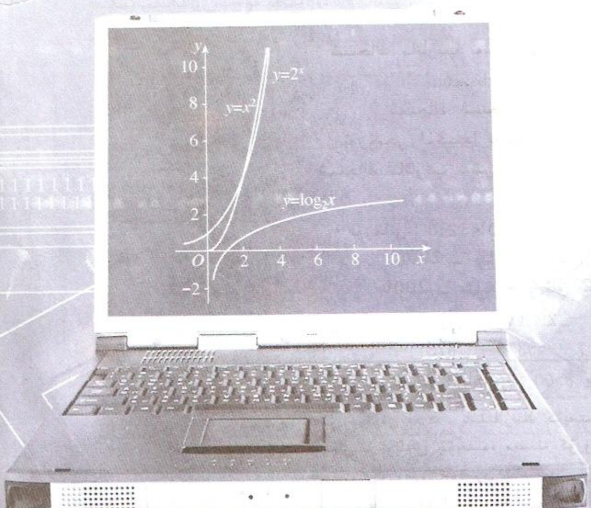


شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا 1

زۆرۈر دەرسلىك



شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

者：热夏提·帕尔萨
审：古丽仙·阿布都热西提
编辑：热米拉·阿布都热西提
校对：谢尔娜依·阿布都热依木

تەرجىمانى: رىشات پەرسا
مۇھەررىرى: گۈلشەن ئابدۇرېشىت
مەسئۇل مۇھەررىرى: راملە ئابدۇرېشىت
مەسئۇل كوررېكتورى: شېرىنئاي ئابدۇرېھىم

普通高中课程标准实验教科书
数　学　1
必修
A 版
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著
（维吾尔文）
*
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى تەرجىمە ۋە نەشر قىلدى
http://www.xjjycbs.com
شىنجاڭ شىنخۇا كىتابخانىسى تارقاتتى
ئۈرۈمچى لۇڭيىدا باسما چەكلىك شىركىتى باستى
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى كومپيۇتېر مەركىزى تىزدى
*
فورماتى : 1240×890 ، 1/16 ؛ باسما تاۋىقى : 9
2008 ـ يىل 4 ـ ئاي 1 ـ نەشرى
2009 ـ يىل 4 ـ ئاي 2 ـ بېسىلىشى
تىراژى : 110 29 — 2 0001
ISBN 978 — 7 — 5370 — 6731 — 7
باھاسى : 8.00 يۈەن

ئادرېس : ئۈرۈمچى شەھىرى غالىبىيەت يولى 187 ـ نومۇر
پوچتا نومۇرى : 830049 ؛ تېلېفون نومۇرى : 2863761،2870654 (0991)

بۇ كىتابتىكى قىسمەن ماتېماتىكىلىق بەلگىلەر

$\in$	$x \in A$	x توپلام A غا تەۋە؛ x توپلام A نىڭ بىر ئېلېمېنتى
$\notin$	$y \notin A$	y توپلام A غا تەۋە ئەمەس؛ y توپلام A نىڭ ئېلېمېنتى ئەمەس
$\{\ ,\ \cdots ,\}$	$\{a, b, c, \cdots, n\}$	a، b، c، $\cdots$، n ئېلېمېنتلاردىن تۈزۈلگەن توپلام
$\{\ \mid\ \}$	$\{x \in A \mid p(x)\}$	$p(x)$ هۆكۈملۈكنى توغرا هۆكۈملۈك قىلىدىغان A دىكى ئېلېمېنتلارنىڭ توپلىمى
$\varnothing$		بوش توپلام
$\mathbf{N}$		مەنپىي بولمىغان پۈتۈن سانلار توپلىمى؛ تەبىئىي سانلار توپلىمى
$\mathbf{N}^*$ ياكى $\mathbf{N}_+$		مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمى
$\mathbf{Z}$		پۈتۈن سانلار توپلىمى
$\mathbf{Q}$		راتسىئونال سانلار توپلىمى
$\mathbf{R}$		ھەقىقىي سانلار توپلىمى
$\subseteq$	$B \subseteq A$	B توپلام A توپلامنىڭ ئىچىدە؛ A توپلام B توپلامنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ؛ B توپلام A توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى
$\subsetneqq$	$B \subsetneqq A$	B توپلام A توپلامنىڭ ھەقىقىي ئىچىدە؛ A توپلام B توپلامنى ھەقىقىي ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ؛ B توپلام A توپلامنىڭ ھەقىقىي قىسمىي توپلىمى
$\cup$	$A \cup B$	A بىلەن B نىڭ بىرىكمە توپلىمى
$\cap$	$A \cap B$	A بىلەن B نىڭ كېسىشمە توپلىمى
$\complement$	$\complement_A B$	A دىكى قىسمىي توپلام B نىڭ تولدۇرغۇچى توپلىمى ياكى قالدۇق توپلىمى
$[\ ,\ ]$	$[a, b]$	$\mathbf{R}$ دىكى a دىن b غىچە بولغان يېپىق ئىنتېرۋال
$(\ ,\ )$	(a, b)	$\mathbf{R}$ دىكى a دىن b غىچە بولغان ئوچۇق ئىنتېرۋال
$[\ ,\ )$	$[a, b)$	$\mathbf{R}$ دىكى a (a نى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) دىن b غىچە بولغان ئوڭ يېرىم ئوچۇق ئىنتېرۋال
$(\ ,\ ]$	$(a, b]$	$\mathbf{R}$ دىكى a دىن b (b نى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) غىچە بولغان سول يېرىم ئوچۇق ئىنتېرۋال
$f(x)$		f فۇنكسىيىنىڭ x تىكى قىممىتى
$f: A \to B$ ياكى $A \to B: f$		A توپلامدىن B توپلامغا بولغان ئەكس ئېتتىش

مۇندەرىجە


3

1 - باب
توپلام ۋە فۇنكسىيە ئۇقۇمى

رېئال دۇنيادىكى نۇرغۇنلىغان ھەرىكەت - ئۆزگىرىش ھادىسىلىرىدە
ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار ئارىسىدىكى بېقىندىلىق مۇناسىۋەت ئىپادىلە-
نىدۇ. ماتېماتىكىدا، بۇ خىل بېقىندىلىق مۇناسىۋەت فۇنكسىيە مودېلى
ئارقىلىق تەسۋىرلىنىدۇ ھەمدە ئۇلاردىكى ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى فۇنك-
سىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىش ئارقىلىق يورۇتۇپ بېرىلىدۇ.

فۇنكسىيە تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكىسىدىكى مۇھىم مەز-
مۇنلارنىڭ بىرى. فۇنكسىيىگە دائىر ئاساسىي بىلىملەر رېئال تۇرمۇش،
جەمئىيەت، ئىقتىساد ۋە باشقا پەنلەردە كەڭ قوللىنىلىدۇ؛ فۇنكسىيە بى-
لەن ئالگېبرالىق ئىپادە، تەڭلىمە، تەڭسىزلىك قاتارلىق مەزمۇنلارنىڭ
ناھايىتى زىچ مۇناسىۋىتى بار؛ فۇنكسىيە ئۇقۇمى ۋە ئۇ ئەكس ئەتتۇر-
گەن ماتېماتىكىلىق ئىدىيە - ئۇسۇللار ماتېماتىكىنىڭ ھەرقايسى ساھە-
لىرىگە سىڭىپ كىرىپ، ماتېماتىكىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئۆگىنىش-
نىڭ مۇھىم ئاساسى بولۇپ قالدى؛ فۇنكسىيە ئۇقۇمى ھەرىكەت ئۆز-
گىرىشى ۋە قارىمۇقارشىلىقنىڭ بىرلىكى قاتارلىق نۇقتىئىنەزەرلەرنىڭ
ماتېماتىكىدىكى كونكرېت ئىپادىسىدۇر.

توپلام ھازىرقى زامان ماتېماتىكىسىنىڭ ئاساسلىق تىلى بولۇپ، ئۇ
ئارقىلىق ماتېماتىكىلىق مەزمۇنلارنى ئىخچام ھەم توغرا ئىپادىلەپ
بەرگىلى بولىدۇ. بۇ بابتا، توپلامغا دائىر بەزى ئاساسىي بىلىملەرنى ئۆ-
گىنىپ، ئالاقىدار ماتېماتىكىلىق ئوبيېكتلارنى توپلام تىلى بىلەن ئىپا-
دىلەيمىز ھەمدە فۇنكسىيە ئۇقۇمىنى توپلام ۋە ماسلىق تىللىرىدىن پاي-
دىلىنىپ يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تەسۋىرلەيمىز، فۇنكسىيە مودېلىنى تۇر-
غۇزۇش جەريانى ۋە ئۇسۇلىنى ئۆز بېشىمىزدىن ئۆتكۈزىمىز، تۇرمۇش
ۋە جەمئىيەتتىكى بەزى ئاددىي مەسىلىلەرنى فۇنكسىيە ئىدىيىسىنى
قوللىنىپ چۈشىنىمىز ۋە بىر تەرەپ قىلىمىز.

«خاسىيەتلىك كېمە» 5 ـ نومۇرلۇق ئادەملىك
ئالەم كېمىسىدىن يەر يۈزىگىچە بولغان ئارىلىق
ۋاقىتنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىدۇ، تورغا چىقىش
خىراجىتى تورغا چىقىشقا كەتكەن ۋاقىتنىڭ ئۆزگىرىشىگە
ئەگىشىپ ئۆزگىرىدۇ، چەت ئەللەرگە چىقىپ ساياھەت قىلىدىغانلارنىڭ سانى كۈنسايىن كۆپەيمەكتە، شەھەرلەرنىڭ كۆكەرتىلىش مەيدانى ئۈزلۈكسىز كېڭەيمەكتە، ... مانا بۇلارنىڭ
ھەممىسىنى فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ
سۈرەتلىگىلى بولىدۇ.

1-1 توپلام

1-1-1 توپلامنىڭ مەنىسى ۋە ئىپادىلىنىشى

بىز باشلانغۇچ مەكتەپ ۋە تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتە بەزى توپلاملارنى ئۇچراتقان، مەسىلەن، تەبىئىي سانلار توپلىمى، راتسىئونال سانلار توپلىمى، تەڭسىزلىك $3 < 7 - x$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى، مۇقىم نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقى مۇقىم ئۇزۇنلۇققا تەڭ بولغان نۇقتىلارنىڭ توپلىمى (يەنى چەمبەر)، بىر كېسىنىڭ ئىككى ئۇچىغىچە بولغان ئارىلىقلىرى ئۆزئارا تەڭ بولغان نۇقتىلارنىڭ توپلىمى (يەنى مۇشۇ كېسىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى)، ...

ئۇنداق بولسا، توپلامنىڭ مەنىسى زادى نېمە؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، بىز يەنە بىرقانچە مىسال كۆرۈپ ئۆتەيلى:

(1) $1 \sim 20$ ئىچىدىكى بارلىق تاق سانلار؛

(2) ئېلىمىز $1991 \sim 2003$ - يىلى ئارىلىقىدىكى 13 يىل ئىچىدە قويۇپ بەرگەن بارلىق سۈنئىي ھەمراھلار؛

(3) ئالتۇن يۇلتۇز ئاپتوموبىل زاۋۇتى 2003 - يىلى ئىشلەپچىقارغان بارلىق ئاپتوموبىللار؛

(4) 2004 - يىل 1 - ئاينىڭ 1 - كۈنىدىن بۇرۇن ئېلىمىز بىلەن دىپلوماتىك مۇناسىۋەت ئورناتقان بارلىق دۆلەتلەر؛

(5) بارلىق كۋادراتلار؛

(6) l تۈز سىزىقىچە ئارىلىقى مۇقىم ئۇزۇنلۇق d غا تەڭ بولغان بارلىق نۇقتىلار؛

(7) تەڭلىمە $x^2 + 3x - 2 = 0$ نىڭ بارلىق ھەقىقىي يىلتىزلىرى؛

(8) 2004 - يىل 9 - ئايدا، شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىگە ئوقۇشقا كىرگەن بارلىق تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ 1 - يىللىق ئوقۇغۇچىلىرى.

(1) مىسالدا، $1 \sim 20$ ئىچىدىكى ھەربىر تاق ساننى ئېلېمېنت قىلساق، بۇ تاق سانلارنىڭ ھەممىسى بىر توپلامنى ھاسىل قىلىدۇ؛ ئوخشاشلا، (2) مىسالدا، ئېلىمىز $1991 \sim 2003$ - يىلى ئارىلىقىدىكى 13 يىل ئىچىدە قويۇپ بەرگەن ھەربىر سۈنئىي ھەمراھنى ئېلېمېنت قىلساق، بۇ ئېلېمېنتلارنىڭ ھەممىسى بىر توپلامنى ھاسىل قىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

(3) — (8) مىسالدىكىلىرىمۇ ئوخشاشلا توپلام ھاسىل قىلالامدۇ؟ ئۇلارنىڭ ئېلېمېنتى ئايرىم - ئايرىم نېمە بولىدۇ؟

ئومۇمەن، تەتقىق قىلىنىدىغان ئوبيېكتلارنى ئومۇملاشتۇرۇپ **ئېلېمېنت** (element)، بەزى ئېلې-مېنتلاردىن تەركىب تاپقان ئومۇمىي گەۋدىنى **توپلام** (set) دەپ ئاتايمىز.

بىر توپلام بېرىلسە، ئۇنىڭ ئېلېمېنتلىرى ئېنىقلانغان بولۇشى كېرەك. باشقىچە ئېيتقاندا، بىر توپلام بېرىلگەندىن كېيىن، ھەرقانداق بىر ئېلېمېنتنىڭ مۇشۇ توپلام ئىچىدە بولىدىغان ـ بولمايدىغانلىقىمۇ ئېنىقلانغان بولىدۇ. مەسىلەن، «جۇڭگودىكى بىۋاسىتە قاراشلىق شەھەرلەر» بىر توپلامنى ھاسىل قىلىدۇ، بېيجىڭ، شاڭخەي، تيەنجىن، چۇڭچىڭ بۇ توپلامنىڭ ئىچىدە بولۇپ، خاڭجۇ، نەنجىڭ، گۇاڭجۇ.... لار بۇ توپلامنىڭ ئىچىدە ئەمەس. «بويى ئېگىز رەك ئادەملەر» توپلام ھاسىل قىلالمايدۇ، چۈنكى ئۇنى ھاسىل قىلغۇچى ئېلېمېنتلار ئېنىق ئەمەس.

بېرىلگەن بىر توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرى ئوخشاش بولمايدۇ، باشقىچە ئېيتقاندا، توپلامدىكى ئېلې-مېنتلار تەكرارلانمايدۇ.

ئىككى توپلامنى ھاسىل قىلغۇچى ئېلېمېنتلار پۈتۈنلەي ئوخشاش بولسا، بۇ ئىككى توپلام **تەڭ** دېيىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

تۆۋەندىكى ئېلېمېنتلارنىڭ ھەممىسى توپلام ھاسىل قىلامدۇ؟ سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) 3 تىن چوڭ، 11 دىن كىچىك بولغان جۈپ سانلار؛

(2) ئېلىمىزدىكى كىچىك ئېقىنلار.

ئادەتتە بىز توپلامنى لاتىنچە چوڭ ھەرپ A، B، C، ... لار بىلەن، توپلامدىكى ئېلېمېنتلارنى لاتىنچە كىچىك ھەرپ a، b، c، ... لار بىلەن ئىپادىلەيمىز.

ئەگەر a توپلام A نىڭ ئېلېمېنتى بولسا، ئۇ ھالدا a توپلام A غا **تەۋە** (belong to) دەپ ئېيتىلىپ $a \in A$ قىلىپ يېزىلىدۇ؛ ئەگەر a توپلام A نىڭ ئېلېمېنتى بولمىسا، ئۇ ھالدا a توپلام A غا **تەۋە ئەمەس** (not belong to) دەپ ئېيتىلىپ، $a \notin A$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

مەسىلەن، «$1 \sim 20$ ئىچىدىكى بارلىق تۈپ سانلار» دىن تۈزۈلگەن توپلامنى A بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا $3 \in A$، $4 \notin A$ بولىدۇ، ۋە باشقىلار.

ماتېماتىكىدا كۆپ ئىشلىتىلىدىغان سانلار توپلىمى ۋە ئۇلارنىڭ يېزىلىشى
بارلىق مەنپىي بولمىغان پۈتۈن سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام مەنپىي بولمىغان پۈتۈن سانلار توپلىمى (ياكى تەبىئىي سانلار توپلىمى) دەپ ئاتىلىپ، **N** قىلىپ يېزىلىدۇ؛
بارلىق مۇسبەت پۈتۈن سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام مۇسبەت پۈتۈن سانلار توپلىمى دەپ ئاتىلىپ، $\mathbf{N}^*$ ياكى $\mathbf{N}_+$ قىلىپ يېزىلىدۇ؛
بارلىق پۈتۈن سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام پۈتۈن سانلار توپلىمى دەپ ئاتىلىپ، **Z** قىلىپ يېزىلىدۇ؛
بارلىق راتسىئونال سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام راتسىئونال سانلار توپلىمى دەپ ئاتىلىپ، **Q** قىلىپ يېزىلىدۇ؛
بارلىق ھەقىقىي سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام ھەقىقىي سانلار توپلىمى دەپ ئاتىلىپ، **R** قىلىپ يېزىلىدۇ.

يۇقىرىقى مىساللاردىن توپلامنى تەبىئىي تىل بىلەن تەسۋىرلىگىلى بولىدىغانلىقىنى كۆرۈۋالدۇق. ئۇنىڭدىن باشقا، توپلامنى يەنە قانداق ئۇسۇللار بىلەن ئىپادىلىگىلى بولىدۇ؟

كۆرسىتىش ئۇسۇلى

«يەر شارىدىكى تۆت ئوكيان» دىن تۈزۈلگەن توپلامنى {شىمالىي مۇز ئوكيان، ھىندى ئوكيان، ئاتلانتىك ئوكيان، تىنچ ئوكيان} قىلىپ، «تەڭلىمە $(x-1)(x+2)=0$ نىڭ بارلىق ھەقىقىي يىلتىزلىرى» دىن تۈزۈلگەن توپلامنى $\{-2, 1\}$ قىلىپ ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش، توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرىنى بىر - بىرلەپ كۆرسىتىپ، ئۇلارنى چوڭ تىرناق «{ }» ئىچىگە ئېلىش ئارقىلىق توپلامنى ئىپادىلەش ئۇسۇلى **كۆرسىتىش ئۇسۇلى** دەپ ئاتىلىدۇ.

1 ـ مىسال تۆۋەندىكى توپلاملارنى كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەيلى:

(1) 10 دىن كىچىك بارلىق تەبىئىي سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(2) تەڭلىمە $x^2=x$ نىڭ بارلىق ھەقىقىي يىلتىزلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(3) 1 ~ 20 ئىچىدىكى بارلىق تۈپ سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام.

يېشىش: (1) 10 دىن كىچىك بارلىق تەبىئىي سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلامنى A دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

ئېلېمېنتلىرى پۈتۈنلەي ئوخشاش بولغان ئىككى توپلام ئۆزئارا تەڭ بولۇپ، ئۇلارنىڭ تەڭ بولۇشى ئېلېمېنتلىرىنىڭ تىزىلىش تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتسىز بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، A توپلامنى باشقا خىل كۆرسىتىش ئۇسۇللىرى بىلەن ئىپادىلەشكىمۇ بولىدۇ، مەسىلەن:

$$A=\{9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0\}.$$

(2) تەڭلىمە $x^2=x$ نىڭ بارلىق ھەقىقىي يىلتىزلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلامنى B دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$B=\{0,\ 1\}.$$

(3) 1 ~ 20 ئىچىدىكى بارلىق تۈپ سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلامنى C دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}.$$

مۇلاھىزە ؟

(1) توپلام $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ نى تەبىئىي تىل بىلەن تەسۋىرلەپ بېرەلەمسىز؟

(2) تەڭسىزلىك $x-7<3$ نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەپ بېرەلەمسىز؟

تەسۋىرلەش ئۇسۇلى

بىز تەڭسىزلىك $x-7<3$ نىڭ يېشىملەر توپلىمىنى كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلمەيمىز. چۈنكى، بۇ توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرىنى كۆرسىتىپ تۈگەتكىلى بولمايدۇ. ئەمما بۇ توپلامنى ئۇنىڭدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ ئورتاق ئالاھىدىلىكىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەيمىز.

مەسىلەن، تەڭسىزلىك $x-7<3$ نىڭ يېشىملەر توپلىمىدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ ئورتاق ئالاھىدىلە-

كى: $x \in \mathbf{R}$ ھەمدە $3 < 7 - x$، يەنى $x < 10$. شۇڭا، بۇ توپلامنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلىسەك بولىدۇ:

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 10\}.$$

يەنە مەسىلەن، ھەرقانداق تاق سانىنى $x = 2k + 1$ $(k \in \mathbf{Z})$ كۆرۈنۈشتە ئىپادىلىگىلى بولىدۇ. شۇڭا، بارلىق تاق سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلامنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلىسەك بولىدۇ:

$$E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

توپلامدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ ئورتاق ئالاھىدىلىكىدىن پايدىلىنىپ توپلامنى ئىپادىلەش ئۇسۇلى **تەسۋىرلەش ئۇسۇلى** دەپ ئاتىلىدۇ. كونكرېت ئىپادىلەش ئۇسۇلى مۇنداق: ئالدى بىلەن بۇ توپلامدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ ئومۇمىي بەلگىسى ۋە ئۇنىڭ قىممەت ئېلىش (ياكى ئۆزگىرىش) دائىرىسىنى چوڭ تىرناق ئىچىگە يېزىپ، ئاندىن بىر تىك سىزىق سىزىمىز، ئۇنىڭدىن كېيىن تىك سىزىقنىڭ كەينىگە بۇ توپلامدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ ئورتاق ئالاھىدىلىكىنى يازىمىز.

2 ـ مىسال تۆۋەندىكى توپلاملارنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا كۆرسىتىش ئۇسۇلى ۋە تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەيلى:

(1) تەڭلىمە $x^2 - 2 = 0$ نىڭ بارلىق ھەقىقىي سانلىق يىلتىزلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(2) 10 دىن چوڭ، 20 دىن كىچىك بارلىق پۈتۈن سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام.

يېشىش: (1) تەڭلىمە $x^2 - 2 = 0$ نىڭ ھەقىقىي سانلىق يىلتىزىنى x دەپ پەرەز قىلساق، x چوقۇم $x^2 - 2 = 0$ دېگەن بۇ شەرتنى قانائەتلەندۈرىدۇ. شۇڭا، بۇ توپلامنى تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلىسەك بولىدۇ:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2 = 0\}.$$

تەڭلىمە $x^2 - 2 = 0$ نىڭ $\sqrt{2}$، $-\sqrt{2}$ دىن ئىبارەت ئىككى دانە ھەقىقىي يىلتىزى بولغانلىقتىن، بۇ توپلامنى كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلىسەك بولىدۇ:

$$A = \{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}.$$

(2) 10 دىن چوڭ، 20 دىن كىچىك بولغان پۈتۈن سانىنى x دەپ پەرەز قىلساق، x چوقۇم $x \in \mathbf{Z}$ ھەمدە $10 < x < 20$ دېگەن شەرتنى قانائەتلەندۈرىدۇ. شۇڭا، بۇ توپلامنى تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلىسەك بولىدۇ:

$$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 10 < x < 20\}.$$

10 دىن چوڭ، 20 دىن كىچىك بولغان پۈتۈن سانلاردىن 11، 12، 13، 14، 15، 16، 17، 18، 19 لار بار، شۇڭا بۇ توپلامنى كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلىسەك بولىدۇ:

$$B = \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19\}.$$

شۇنى كۆرسىتىپ ئۆتۈش زۆرۈركى، توپلامنى تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىگەندە، ئەگەر تىك سىزىقنىڭ ئوڭ ـ سول تەرىپىدىكى مەزمۇنلارنىڭ مۇناسىۋىتىدىن $x \in \mathbf{R}$، $x \in \mathbf{Z}$ بولىدىغانلىقى ئېنىق بولسا، ئۇ ھالدا $x \in \mathbf{R}$، $x \in \mathbf{Z}$ نى يازماي، پەقەت ئۇنىڭ ئېلېمېنتى x نى يازساقلا بولىدۇ. مەسىلەن، توپلام $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 10\}$ نى $D = \{x \mid x < 10\}$ قىلىپ، توپلام $E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbf{Z}\}$ نى $E = \{x \mid x = 2k + 1,\ k \in \mathbf{Z}\}$ قىلىپ يازساقمۇ بولىۋېرىدۇ.

مۇلاھىزە؟

(1) يۇقىرىقى مىساللارغا بىرلەشتۈرۈپ، توپلامنى تەبىئىي تىل، كۆرسىتىش ئۇسۇلى ۋە تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىگەندىكى ھەرقايسىسىنىڭ ئالاھىدىلىكى ۋە مۇۋاپىق كېلىدىغان ئوبيېكتىنى سېلىشتۇرۇپ كۆرۈڭ.

(2) بىرقانچە توپلامنى مىسال كەلتۈرۈڭ ھەمدە ئۇلارنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا تەبىئىي تىل، كۆرسىتىش ئۇسۇلى ۋە تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ.

مەشىق

1. بوش ئورۇنلارغا «$\in$» ياكى « $\notin$ » بەلگىسىنى تولدۇرۇڭ:

(1) A نى بارلىق ئاسىيا دۆلەتلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلام دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

جۇڭگو ____ A,   ئامېرىكا ____ A,

ھىندىستان ____ A,   ئەنگلىيە ____ A;

(2) ئەگەر $A=\{x|x^2=x\}$ بولسا، ئۇ ھالدا A ____ -1 بولىدۇ؛

(3) ئەگەر $B=\{x|x^2+x-6=0\}$ بولسا، ئۇ ھالدا B ____ 3 بولىدۇ؛

(4) ئەگەر $C=\{x\in \mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$ بولسا، ئۇ ھالدا C ____ 8، C ____ 9.1 بولىدۇ.

2. تۆۋەندىكى توپلاملارنى مۇۋاپىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ:

(1) تەڭلىمە $x^2-9=0$ نىڭ بارلىق ھەقىقىي يىلتىزلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(2) 8 دىن كىچىك بارلىق تۈپ سانلاردىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(3) بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x+3$ بىلەن $y=-2x+6$ نىڭ گرافىكلىرىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(4) تەڭسىزلىك $4x-5<3$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى.

2-1-1 توپلاملار ئارىسىدىكى ئاساسىي مۇناسىۋەت

مۇلاھىزە؟

ھەقىقىي سانلار ئارىسىدا تەڭ بولۇش مۇناسىۋىتى ۋە چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتى بار، مەسىلەن، $5=5$، $5<7$، $5>3$ دېگەندەك. ھەقىقىي سانلار ئارىسىدىكى مۇشۇ مۇناسىۋەتلەرگە سېلىشتۇرۇپ ئويلاپ بېقىڭ، توپلاملار ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەتلەر بار؟

تۆۋەندىكى مىساللارنى كۆزىتىپ، ھەربىر مىسالدا بېرىلگەن ئىككى توپلام ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بايقىيالامسىز؟

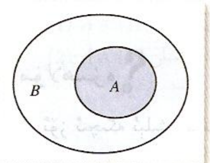
(1) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$;

(2) A نى شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىق (2) سىنىپىدىكى بارلىق قىز ئوقۇغۇچىلاردىن تۈزۈلگەن توپلام، B نى بۇ سىنىپتىكى بارلىق ئوقۇغۇچىلاردىن تۈزۈلگەن توپلام دەپ پەرەز قىلايلى؛

(3) $C=\{x|x$ بولسا ئىككى تەرىپى تەڭ بولغان ئۈچبۇلۇڭلار$\}$، $D=\{x|x$ بولسا تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭلار$\}$ دەپ پەرەز قىلايلى.

بايقاشقا بولىدۇكى، (1) مىسالدا، A توپلامدىكى ھەرقانداق بىر ئېلېمېنت B توپلامنىڭ ئېلېمېنتى بولىدۇ، بۇ چاغدا بىز A توپلام بىلەن B توپلام ئارىسىدا ئۆز ئىچىگە ئېلىش مۇناسىۋىتى بار دەيمىز. (2) مىسالدىكى A توپلام بىلەن B توپلام ئارىسىدىمۇ مۇشۇ خىل مۇناسىۋەت بار.

ئومۇمەن، A، B ئىككى توپلامغا نىسبەتەن، ئەگەر A توپلامنىڭ ھەرقانداق بىر ئېلېمېنتى B توپلامنىڭ ئېلېمېنتى بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى توپلام ئارىسىدا ئۆز ئىچىگە ئېلىش مۇناسىۋىتى بار دەپ ئېيتىپ، A توپلام B توپلامنىڭ **قىسمىي توپلىمى** (subset) دەيمىز ھەمدە تۆۋەندىكىدەك يازىمىز:



1.1.1 ـ رەسىم

$A\subseteq B$ (ياكى $B\supseteq A$)،

بۇ چاغدا بىز، «A توپلام B توپلامنىڭ ئىچىدە» (ياكى «B توپلام A توپلامنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ») دەپ ئوقۇيمىز.

ئۆز ئىچىگە ئېلىش مۇناسىۋىتى ۋە تەڭ بولۇش مۇناسىۋىتىگە ئىگە بولغان توپلاملاردىن بىرقانچىنى مىسال كەلتۈرۈڭ.

ماتېماتىكىدا، بىز توپلامنى كۆپ ھاللاردا يېپىق ئەگرى سىزىقنىڭ ئىچكى قىسمى ئارقىلىق ئىپادىلەيمىز ھەمدە بۇ خىل شەكىلنى **Venn** شەكلى دەپ ئاتايمىز. شۇنداق قىلىپ، يۇقىرىدا دېيىلگەن A توپلام بىلەن B توپلام ئارىسىدىكى ئۆز ئىچىگە ئېلىش مۇناسىۋىتىنى 1.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

(3) مىسالدا، «ئىككى تەرىپى تەڭ بولغان ئۈچبۇلۇڭلار» تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭ بولىدىغانلىقتىن، C، D توپلاملارنىڭ ھەر ئىككىسى بارلىق تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭلاردىن تۈزۈلگەن توپلام بولىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا، C توپلامدىكى ھەرقانداق بىر ئېلېمېنت D توپلامنىڭ ئېلېمېنتى بولۇپ، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، D توپلامدىكى ھەرقانداق بىر ئېلېمېنتمۇ C توپلامنىڭ ئېلېمېنتى بولىدۇ. شۇڭا، D توپلام بىلەن C توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرى پۈتۈنلەي ئوخشاش بولىدۇ.

ئىككى توپلامنىڭ تەڭلىكىنى قىسمىي توپلام ئۇقۇمىدىن پايدىلىنىپ يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تەسۋىرلەپ كۆرەيلى.

ئەگەر A توپلام B توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى ($A\subseteq B$) ھەمدە B توپلاممۇ A توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى ($B\subseteq A$) بولسا، ئۇ ھالدا A توپلام بىلەن B توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرى پۈتۈنلەي ئوخشاش بولۇپ، بۇ ئىككى توپلام تەڭ❶ بولىدۇ ھەمدە ئۇ تۆۋەندىكىدەك يېزىلىدۇ:

$$A=B.$$

❶ بۇنى ھەقىقىي سانلاردىكى «ئەگەر $b\geqslant a$ ھەمدە $a\geqslant b$ بولسا، ئۇ ھالدا $a=b$ بولىدۇ» دېگەن يەكۈنگە سېلىشتۇرۇپ قانداق چۈشەنچە ھاسىل قىلدىڭىز؟

ئەگەر توپلام $A\subseteq B$، ئەمما $x\in B$ ئېلېمېنت مەۋجۇت ھەمدە $x\notin A$ بولسا، ئۇ ھالدا بىز A توپلام B توپلامنىڭ **ھەقىقىي قىسمىي توپلىمى** (proper subset) دەيمىز ھەمدە تۆۋەندىكىدەك يازىمىز:

$$A \subsetneqq B \text{ (ياكى } B \supsetneqq A).$$

مەسىلەن، (1) مىسالدا $A \subseteq B$، ئەمما $4 \in B$ ھەمدە $4 \notin A$ بولغانلىقتىن، A توپلام B توپلامنىڭ ھەقىقىي قىسمىي توپلىمى بولىدۇ.

تەڭلىمە $x^2+1=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزىغا ئىگە ئەمەسلىكى بىزگە مەلۇم، شۇڭا تەڭلىمە $x^2+1=0$ نىڭ ھەقىقىي سانلىق يىلتىزلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلامدا ئېلېمېنت بولمايدۇ.

بوش توپلامغا دائىر بىرقانچە مىسال كەلتۈرەلەمسىز؟

بىز ھېچقانداق ئېلېمېنتنى ئۆز ئىچىگە ئالمىغان توپلامنى **بوش توپلام** (empty set) دەپ ئاتاپ، $\varnothing$ قىلىپ يازىمىز ھەمدە بوش توپلام ھەرقانداق توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى بولىدۇ دەپ بەلگىلىۋالىمىز.

مۇلاھىزە ?

ئۆز ئىچىگە ئېلىش مۇناسىۋىتى $\{a\} \subseteq A$ بىلەن تەۋە بولۇش مۇناسىۋىتى $a \in A$ نىڭ قانداق پەرقى بار؟ بۇنى ئەمەلىي مىساللارغا بىرلەشتۈرۈپ چۈشەندۈرۈپ بېقىڭ.

يۇقىرىدا بايان قىلىنغان توپلاملار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتكە ئاساسەن، تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنى كەلتۈرۈپ چىقارغىلى بولىدۇ.

سىز يەنە قايسى يەكۈنلەرنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايسىز؟

(1) ھەرقانداق بىر توپلام ئۆزىنىڭ قىسمىي توپلىمى بولىدۇ، يەنى

$$A \subseteq A;$$

(2) توپلام A، B، C لارغا نىسبەتەن، ئەگەر $A \subseteq B$ ھەمدە $B \subseteq C$ بولسا، ئۇ ھالدا $A \subseteq C$ بولىدۇ.

3 ـ مىسال توپلام $\{a, b\}$ نىڭ بارلىق قىسمىي توپلاملىرىنى يازايلى ھەمدە قايسىسى ئۇنىڭ ھەقىقىي قىسمىي توپلىمى بولىدىغانلىقىنى كۆرسىتەيلى.

يېشىش: توپلام $\{a, b\}$ نىڭ بارلىق قىسمىي توپلاملىرى: $\varnothing$، $\{a\}$، $\{b\}$، $\{a, b\}$؛ ھەقىقىي قىسمىي توپلاملىرى: $\varnothing$، $\{a\}$، $\{b\}$.

مەشىق

1. توپلام $\{a, b, c\}$ نىڭ بارلىق قىسمىي توپلاملىرىنى يېزىڭ.

2. بوش ئورۇنلارغا مۇۋاپىق بەلگىلەرنى تولدۇرۇڭ.

(1) a ____ $\{a, b, c\}$; (2) 0 ____ $\{x \mid x^2=0\}$;

(3) $\varnothing$ ____ $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2+1=0\}$; (4) $\{0, 1\}$ ____ $\mathbf{N}$;

(5) $\{0\}$ ____ $\{x \mid x^2=x\}$; (6) $\{2, 1\}$ ____ $\{x \mid x^2-3x+2=0\}$;

3. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر مىسالدىكى ئىككى توپلامنىڭ مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{x \mid$ x بولسا 8 نىڭ بۆلگۈچىسى$\}$;

(2) $A=\{x \mid x=3k, k \in \mathbf{N}\}$, $B=\{x \mid x=6z, z \in \mathbf{N}\}$;

(3) $A=\{x \mid x \in \mathbf{N}$ ھەمدە x بولسا 4 بىلەن 10 نىڭ ئومۇمىي ھەسسىلىكى$\}$, $B=\{x \mid x=20m, m \in \mathbf{N}_+\}$.

3-1-1 توپلام ئۇستىدە ئاساسىي ئەمەللەر

مۇلاھىزە؟

بىز ھەقىقىي سانلار ئۇستىدىكى قوشۇش ئەمىلىنى بىلىمىز، ئۇنداق بولسا، توپلاملارنىمۇ «ئۆزئارا قوشۇش» قا بولامدۇ ـ يوق؟

تۆۋەندە بېرىلگەن A، B، C توپلاملارنى كۆزىتىپ، C توپلام بىلەن A، B توپلاملار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتكە ھۆكۈم قىلالامسىز؟

(1) $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$;

(2) $A=\{x|$ راتسىئونال سان $x\}$, $B=\{x|$ ئىرراتسىئونال سان $x\}$, $C=\{x|$ ھەقىقىي سان $x\}$.

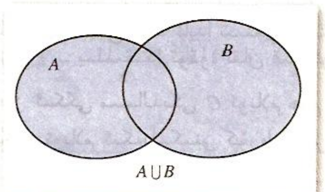
بىرىكمە توپلام

«مۇلاھىزە» دە بېرىلگەن ئىككى مىسالدىكى A، B ئىككى توپلام بىلەن C توپلام ئارىسىدا مۇنداق بىر خىل مۇناسىۋەت بار: C توپلام A توپلامغا تەۋە ياكى B توپلامغا تەۋە بارلىق ئېلېمېنتلاردىن تۈزۈلگەن توپلامدۇر.

ئومۇمەن، A توپلامغا تەۋە ياكى B توپلامغا تەۋە بارلىق ئېلېمېنتلاردىن تۈزۈلگەن توپلام A توپلام بىلەن B توپلامنىڭ **بىرىكمە توپلىمى** (union set) دەپ ئاتىلىپ، $A\cup B$ قىلىپ يېزىلىدۇ (ئۇ «A بىلەن B نىڭ بىرىكمىسى» دەپ ئوقۇلىدۇ)، يەنى

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ ياكى } x\in B\}.$$

بۇنى Venn شەكلىدىن پايدىلىنىپ 2.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ.



2.1.1 ـ رەسىم

شۇنداق قىلىپ، «مۇلاھىزە» دە بېرىلگەن (1)، (2) مىساللاردىكى A توپلام بىلەن B توپلامنىڭ بىرىكمە توپلىمى C بولىدۇ، يەنى

$$A\cup B=C.$$

ئىككى توپلامنىڭ بىرىكمە توپلىمىنى تاپقاندا، ئۇلارنىڭ ئورتاق ئېلېمېنتلىرى توپلامدا پەقەت بىرلا قېتىم كۆرۈلىدۇ. مەسىلەن، ئېلېمېنت 5، 8 لەر.

4 ـ مىسال $A=\{4,\ 5,\ 6,\ 8\}$، $B=\{3,\ 5,\ 7,\ 8\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A\cup B$ نى تاپايلى.

يېشىش:

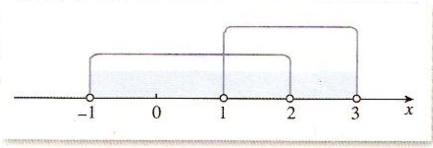
$$A\cup B=\{4,\ 5,\ 6,\ 8\}\cup\{3,\ 5,\ 7,\ 8\}$$
$$=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}.$$

5 ـ مىسال توپلام $A=\{x|-1<x<2\}$، توپلام $B=\{x|1<x<3\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A\cup B$ نى تاپايلى.

يېشىش:

$$A\cup B=\{x|-1<x<2\}\cup\{x|1<x<3\}$$
$$=\{x|-1<x<3\}.$$

5 ـ مىسالدىكى بىرىكمە توپلام $A\cup B$ نى سان ئوقىدا 3.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك ئىپادىلىسەك بولىدۇ.



3.1.1 ـ رەسىم

مۇلاھىزە ؟

تۆۋەندىكى مۇناسىۋەت ئىپادىلىرى كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟

(1) $A\cup A=A$; (2)$A\cup\varnothing=A$.

كېسىشمە توپلام

A، B، C توپلاملارنى كۆزىتەيلى، A، B توپلاملار بىلەن C توپلام ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

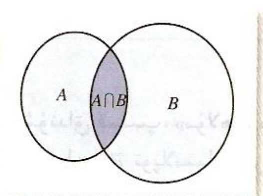
(1) $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{3,\ 5,\ 8,\ 12\}$, $C=\{8\}$;

(2) $A=\{x|$ x بولسا 2004 ـ يىل 9 ـ ئايدا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىدە ئوقۇۋاتقان قىز ئوقۇغۇچىلار$\}$,

$B=\{x|$ x بولسا 2004 ـ يىل 9 ـ ئايدا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىقىدا ئوقۇۋاتقان ئوقۇغۇچىلار$\}$,

$C=\{x|$ x بولسا 2004 ـ يىل 9 ـ ئايدا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىقىدا ئوقۇۋاتقان قىز ئوقۇغۇچىلار$\}$.

بىز يۇقىرىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان ئىككى مىسالدىكى C توپلام ھەم A توپلامغا تەۋە، ھەم B توپلامغا تەۋە بارلىق ئېلېمېنتلاردىن تۈزۈلگەن توپلام ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز.



4.1.1 ـ رەسىم

ئومۇمەن، ھەم A توپلامغا تەۋە، ھەم B توپلامغا تەۋە بارلىق ئېلېمېنتلاردىن تۈزۈلگەن توپلام A بىلەن B نىڭ **كېسىشمە توپلىمى** (intersection set) دەپ ئاتىلىپ، $A\cap B$ قىلىپ يېزىلىدۇ (ئۇ «A بىلەن B نىڭ كېسىشمىسى» دەپ ئوقۇلىدۇ)، يەنى

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ ھەمدە } x\in B\}.$$

بۇنى Venn شەكلىدىن پايدىلىنىپ 4.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

شۇنداق قىلىپ، يۇقىرىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان(1) ، (2) مىساللاردا $A\cap B=C$ بولىدۇ.

6 ـ مىسال شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپى تەنھەرىكەت مۇسابىقىسى ئۆتكۈزدى.

$A=\{x|$ x بولسا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىقىدىن 100 مېتىرغا يۈگۈرۈشكە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلار$\}$,

$B=\{x\,|$ x بولسا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىقىدىن ئېگىزگە سەكرەشكە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلار $\}$

دەپ پەرەز قىلىپ، B، $A\cap B$ نى تاپايلى.

يېشىش: $A\cap B$ دەل شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىقىدىكى ھەم 100 مېترغا يۈگۈرۈشكە، ھەم ئېگىزگە سەكرەشكە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلاردىن تۈزۈلگەن توپلام بولىدۇ. شۇ-نىڭ ئۈچۈن،

$A\cap B=\{x\,|$ x بولسا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىقىدىن ھەم 100 مېترغا يۈگۈرۈشكە، ھەم ئېگىزگە سەكرەشكە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلار $\}$.

7 ـ مىسال تەكشىلىكتىكى l_1 تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتقان نۇقتىلارنىڭ توپلىمىنى L_1، l_2 تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتقان نۇقتىلارنىڭ توپلىمىنى L_2 دەپ پەرەز قىلىپ، l_1 بىلەن l_2 نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىنى توپلام ئۈستىدە ئەمەللەردىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەيلى.

يېشىش: تەكشىلىكتىكى l_1، l_2 تۈز سىزىقلار بىر نۇقتىدا كېسىشىش، پاراللېل بولۇش، ئۈستمۇ-ئۈست چۈشۈشتىن ئىبارەت ئۈچ خىل ئورۇن مۇناسىۋىتىدە بولۇشى مۇمكىن.

(1) l_1، l_2 تۈز سىزىقلار P نۇقتىدا كېسىشسە، ئۇنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەيمىز:

$L_1\cap L_2=\{$نۇقتا $P\}$;

(2) l_1، l_2 تۈز سىزىقلار پاراللېل بولسا، ئۇنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەيمىز:

$L_1\cap L_2=\varnothing$;

(3) l_1، l_2 تۈز سىزىقلار ئۈستمۇئۈست چۈشسە، ئۇنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەيمىز:

$L_1\cap L_2=L_1=L_2$.

مۇلاھىزە ?

تۆۋەندىكى مۇناسىۋەت ئىپادىلىرى كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟

(1) $A\cap A=A$;　　(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$.

تولدۇرغۇچى توپلام

مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلغاندا، كۆپ ھاللاردا تەتقىق قىلىنىدىغان ئوبيېكتنىڭ دائىرىسىنى ئېنىقلى-ۋېلىشقا توغرا كېلىدۇ.

مەسىلەن، باشلانغۇچ مەكتەپتىن تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپكىچە بولغان ئۆگىنىش جەريانىدا سانلارنى تەتقىق قىلىش دائىرىسى تەدرىجىي ھالدا تەبىئىي سانلاردىن مۇسبەت ئاددىي كەسىر، راتسىئونال سانلار-غىچە كېڭىيىپ، ئىرراتسىئونال سان كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن يەنە ھەقىقىي سانلارغىچە كېڭەيگەن، تو-لۇق ئوتتۇرا مەكتەپ باسقۇچىدا سانلارنى تەتقىق قىلىش دائىرىسى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ كېڭىيىدۇ.

ئوخشاش بىر مەسىلىنى ئوخشاش بولمىغان دائىرىدە تەتقىق قىلغاندا، ئوخشاش بولمىغان نەتىجىلەر كېلىپ چىقىشى مۇمكىن. مەسىلەن، تەڭلىمە $(x-2)(x^2-3)=0$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى راتسىئونال سانلار دائىرىسىدە پەقەت 2 دىن ئىبارەت بىرلا يېشىمنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ، يەنى

$\{x\in\mathbf{Q}\,|\,(x-2)(x^2-3)=0\}=\{2\}$;

ھالبۇكى، بۇ يېشىملەر توپلىمى ھەقىقىي سانلار دائىرىسىدە 2، $\sqrt{3}$، $-\sqrt{3}$ تىن ئىبارەت ئۈچ يېشىم-نى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ، يەنى

$\{x \in \mathbf{R} \mid (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

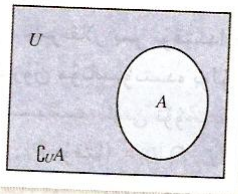
ئومۇمەن، ئەگەر بىر توپلام بىز تەتقىق قىلىدىغان مەسىلىگە چېتىشلىق بارلىق ئېلېمېنتلارنى ئۆز ئىچىگە ئالسا، ئۇ هالدا بۇ توپلام **تولۇق توپلام**[1] (universe set) دەپ ئاتىلىپ، ئادەتتە U قىلىپ يېزىلىدۇ.

[1] بېرىلگەن بىر توپلامۇ ئادەتتە تولۇق توپلام دەپ قارىلىدۇ.

A توپلامغا نىسبەتەن، تولۇق توپلام U دىكى A توپلامغا تەۋە بولمىغان بارلىق ئېلېمېنتلاردىن تۈزۈلگەن توپلام A توپلامنىڭ تولۇق توپلام U غا نىسبەتەن **تولدۇرغۇچى توپلىمى** (Complementary set) دەپ ئاتىلىپ، قىسقىچە A توپلامنىڭ تولدۇرغۇچى توپلىمى دېيىلىدۇ ھەمدە $\complement_U A$ قىلىپ يېزىلىدۇ، يەنى

$$\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ ھەمدە } x \notin A\}.$$

ئۇنى Venn شەكلىدىن پايدىلىنىپ 5.1.1 – رەسىمدىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ.



5.1.1 – رەسىم

8 ـ مىسال $U = \{x \mid x$ بولسا 9 دىن كىچىك مۇسبەت پۈتۈن سانلار$\}$، $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{3, 4, 5, 6\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $\complement_U A$، $\complement_U B$ لارنى تاپايلى.

يېشىش: مىسالنىڭ مەنىسىدىن بىلەلەيمىزكى، $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$، شۇڭا

$$\complement_U A = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$\complement_U B = \{1, 2, 7, 8\}.$$

9 ـ مىسال تولۇق توپلام $U = \{x \mid x$ بولسا ئۈچبۇلۇڭ$\}$، $A = \{x \mid x$ بولسا تار بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ$\}$، $B = \{x \mid x$ بولسا كەڭ بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ$\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A \cap B$، $\complement_U(A \cup B)$ لارنى تاپايلى.

يېشىش: ئۈچبۇلۇڭلارنىڭ تۈرگە ئايرىلىشىدىن بىلەلەيمىزكى،

$A \cap B = \varnothing$,

$A \cup B = \{x \mid x$ بولسا تار بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ ياكى كەڭ بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ$\}$,

$\complement_U(A \cup B) = \{x \mid x$ بولسا تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ$\}$.

مەشىق

1. $A = \{3, 5, 6, 8\}$، $B = \{4, 5, 7, 8\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A \cap B$، $A \cup B$ لارنى تېپىڭ.

2. $A = \{x \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$، $B = \{x \mid x^2 = 1\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A \cup B$، $A \cap B$ لارنى تېپىڭ.

3. $A = \{x \mid x$ بولسا تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭ$\}$، $B = \{x \mid x$ بولسا تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ$\}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $A \cap B$، $A \cup B$ لارنى تېپىڭ.

4. تولۇق توپلام $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$، $A = \{2, 4, 5\}$، $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $A \cap (\complement_U B)$، $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ لارنى تېپىڭ.

1.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. بوش ئورۇنلارغا «$\in$» ياكى «$\notin$» بەلگىسىنى تولدۇرۇڭ.

(1) $3\frac{2}{7}$ ____ $\mathbf{Q}$;　　(2) 3^2 ____ $\mathbf{N}$;

(3) π ____ $\mathbf{Q}$;　　(4) $\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{R}$;

(5) $\sqrt{9}$ ____ $\mathbf{Z}$;　　(6) $(\sqrt{5})^2$ ____ $\mathbf{N}$.

2. $A=\{x|x=3k-1, k\in \mathbf{Z}\}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بوش ئورۇنلارغا «$\in$» ياكى «$\notin$» بەلگىسىنى تولدۇرۇڭ.

(1) 5 ____ A;　　(2) 7 ____ A;　　(3) -10 ____ A.

3. تۆۋەندىكى توپلاملارنى كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ:

(1) 1 دىن چوڭ ھەمدە 6 دىن كىچىك بولغان پۈتۈن سانلار؛

(2) $A=\{x|(x-1)(x+2)=0\}$;

(3) $B=\{x\in \mathbf{Z}|-3<2x-1\leqslant 3\}$.

4. تۆۋەندىكى توپلاملارنى مۇۋاپىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ:

(1) ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^2-4$ نىڭ فۇنكسىيە قىممەتلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(2) تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە $y=\frac{2}{x}$ دىكى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممەتلىرىدىن تۈزۈلگەن توپلام؛

(3) تەڭسىزلىك $3x\geqslant 4-2x$ نىڭ يېشىملەر توپلىمى.

5. بوش ئورۇنلارغا مۇۋاپىق بەلگىلەرنى تولدۇرۇڭ:

(1) توپلام $A=\{x|2x-3<3x\}$، $B=\{x|x\geqslant 2\}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا:

-4 ____ B;　　-3 ____ A,

$\{2\}$ ____ B,　　B ____ A.

(2) توپلام $A=\{x|x^2-1=0\}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا:

1 ____ A,　　$\{-1\}$ ____ A,

$\varnothing$ ____ A,　　$\{1, -1\}$ ____ A;

(3) $\{x|$ رومبا بولسا $x\}$ ____ $\{x|$ پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولسا $x\}$،

$\{x|$ تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭ بولسا $x\}$ ____ $\{x|$ تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ بولسا $x\}$.

6. توپلام $A=\{x|2\leqslant x<4\}$، $B=\{x|3x-7\geqslant 8-2x\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A\cap B$، $A\cup B$ نى تېپىڭ.

7. $A = \{x \mid x$ بولسا 9 دىن كىچىك مۇسبەت پۈتۈن سانلار$\}$، $B = \{1, 2, 3\}$، $C = \{3, 4, 5, 6\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A \cap B$، $A \cap C$، $A \cap (B \cup C)$، $A \cup (B \cap C)$ لارنى تېپىڭ.

8. مەكتەپ تەنھەرىكەت يىغىنى ئۆتكۈزدى.

$A = \{x \mid x$ بولسا 100 مېتىرغا يۈگۈرۈشكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىلار$\}$،

$B = \{x \mid x$ بولسا 200 مېتىرغا يۈگۈرۈشكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىلار$\}$،

$C = \{x \mid x$ بولسا 400 مېتىرغا يۈگۈرۈشكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىلار$\}$

دەپ پەرەز قىلىندى ھەممە مەكتەپ ھەربىر ئوقۇغۇچىنىڭ كۆپ دېگەندە بۇ ئۈچ تۈرلۈك مۇسابىقىنىڭ ئىككىسىگە قاتنىشىشىنى بەلگىلىدى. مەكتەپنىڭ بۇ بەلگىلىمىسىنى توپلام ئەمەلىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈڭ ھەممە تۆۋەندىكى ئىككى توپلام ئەمەلىنىڭ مەنىسىنى ئېيتىپ بېرىڭ:

(1) $A \cup B$;　　　　(2) $A \cap C$.

9. $S = \{x \mid x$ بولسا پاراللېل تۆت تەرەپلىك ياكى تراپېتسىيە$\}$، $A = \{x \mid x$ بولسا پاراللېل تۆت تەرەپلىك$\}$، $B = \{x \mid x$ بولسا رومبا$\}$، $C = \{x \mid x$ بولسا تىك تۆتبۇلۇڭ$\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $B \cap C$، $\complement_A B$، $\complement_S A$ لارنى تېپىڭ.

10. توپلام $A = \{x \mid 3 \leqslant x < 7\}$، $B = \{x \mid 2 < x < 10\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $\complement_R (A \cup B)$، $\complement_R (A \cap B)$، $(\complement_R A) \cap B$، $A \cup (\complement_R B)$ لارنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. توپلام $A = \{1, 2\}$ بولۇپ، B توپلامنىڭ $A \cup B = \{1, 2\}$ نى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا B توپلامدىن ____ دانىسى بار بولىدۇ.

2. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، توپلام $C = \{(x, y) \mid y = x\}$ تۈز سىزىق $y = x$ نى ئىپادىلەيدۇ، مۇشۇ تۈرغۇدىن قارىغاندا، توپلام $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}\right\}$ نېمىنى ئىپادىلەيدۇ؟ C، D توپلاملار ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

3. توپلام $A = \{x \mid (x-3)(x-a) = 0, a \in \mathbf{R}\}$، $B = \{x \mid (x-4)(x-1) = 0\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $A \cup B$، $A \cap B$ نى تېپىڭ.

4. تولۇق توپلام $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 10\}$، $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، B توپلامنى تېپىڭ.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

توپلامدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ سانى

توپلامنى تەتقىق قىلغاندا، كۆپ ھاللاردا توپلامدىكى ئېلې-مېنتلارنىڭ سانىغا دائىر مەسىلىلەرگە دۇچ كېلىمىز. بىز چەكلىك دانە ئېلېمېنتنى ئۆز ئىچىگە ئالغان A توپلامنى چەكلىك توپلام دەپ ئاتاپ، چەكلىك توپلام A دىكى ئېلېمېنتنىڭ سانىنى card[1] بىلەن ئىپادىلەيمىز. مەسىلەن، ئەگەر $A=\{a, b, c\}$ بولسا، ئۇ ھالدا $\mathrm{card}(A)=3$ بولىدۇ.

[1] card بولسا ئىنگلىزچە cardinal (ئاساس سان) دېگەن سۆزنىڭ قىسقارتىپ يېزىلىشى.

بىر مىسال كۆرۈپ ئۆتەيلى، مەكتەپ ماگىزىنىغا 1 ـ قېتىمدا ماي قەلەم، سىياھ قەلەم، ئۆچۈرگۈچ، خاتىرە دەپتىرى، تەييار چۆپ، گازلىق سۇ قاتارلىق 6 تۈرلۈك مال كىرگۈزۈلگەن، 2 ـ قېتىمدا ماي قەلەم، قېرىنداش، كولباسا، تەييار چۆپ قاتارلىق 4 تۈرلۈك مال كىرگۈزۈلگەن بولسا، ئىككى قېتىمدا جەمئىي قانچە تۈرلۈك مال كىرگۈزۈلگەن؟ روشەنكى، ئىككى قېتىمدا جەمئىي 10 $(6+4=10)$ تۈرلۈك مال كىرگۈزۈلگەن دەپ جاۋاب بېرىلسە خاتا بولىدۇ. بىز بۇ مەسىلىنى توپلام تۇرغۇسىدىن چىقىپ مۇلاھىزە قىلايلى.

1 ـ قېتىمدا كىرگۈزۈلگەن مال تۈرىنى A توپلام ئارقىلىق، 2 ـ قېتىمدا كىرگۈزۈلگەن مال تۈرىنى B توپلام ئارقىلىق ئىپادىلىسەك، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$A=\{$ماي قەلەم, سىياھ قەلەم, ئۆچۈرگۈچ, خاتىرە دەپتىرى, تەييار چۆپ, گازلىق سۇ$\}$,

$B=\{$ماي قەلەم, قېرىنداش, كولباسا, تەييار چۆپ$\}$.

بۇ يەردە $\mathrm{card}(A)=6$، $\mathrm{card}(B)=4$. ئىككى قېتىمدا جەمئىي قانچە تۈرلۈك مال كىرگۈزۈلگەن؟ دېگەن بۇ سوئال $\mathrm{card}(A \cup B)$ نى تېپىشنى كۆرسىتىدۇ. بۇ مىسالدا، ئىككى قېتىمدا كىرگۈزۈلگەن مالنىڭ ئىچىدە ئوخشاش تۈردىكى ماللار بار بولۇپ، ئوخشاش ماللارنىڭ تۈر سانى ئەمەلىيەتتە $\mathrm{card}(A \cap B)$ بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، $\mathrm{card}(A)$، $\mathrm{card}(B)$، $\mathrm{card}(A \cup B)$، $\mathrm{card}(A \cap B)$ لارنىڭ ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ ھېسابلىساق مۇنداق بولىدۇ:

$$\mathrm{card}(A \cup B)=8,$$
$$\mathrm{card}(A \cap B)=2.$$

ئومۇمەن، خالىغان ئىككى چەكلىك توپلام A، B غا نىسبەتەن تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\mathrm{card}(A \cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A \cap B).$$

مىسال مەكتەپ ئالدى بىلەن بىر قېتىملىق يېنىك ئاتلېتىكا تەنھەرىكەت مۇسابىقىسى ئۆتكۈزگەن بولۇپ، مەلۇم سىنىپتىن 8 ئوقۇغۇچى مۇسابىقىگە قاتناشقان، ئاندىن بىر قېتىملىق توپ تۈرلىرى بويىچە تەنھەرىكەت مۇسابىقىسى ئۆتكۈزگەن بولۇپ، بۇ سىنىپتىن 12 ئوقۇغۇچى مۇسابىقىگە قاتناشقان. ئەگەر بۇ سىنىپتا ئىككى قېتىملىق تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىنىڭ ھەر ئىككىسىگە قاتناشقانلاردىن 3 ئوقۇغۇچى بار بولسا، بۇ سىنىپتىن ئىككى قېتىملىق تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىگە جەمئىي قانچە ئوقۇغۇچى قاتناشقان؟

تەھلىل: A نى يېنىك ئاتلېتىكا تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىگە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلارنىڭ توپلىمى، B نى توپ تۈرلىرى بويىچە تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىگە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلارنىڭ توپلىمى دېسەك، ئۇ ھالدا $A \cap B$ ئىككى قېتىملىق تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىنىڭ ھەر ئىككىسىگە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلارنىڭ توپلىمى بولىدۇ. $\mathrm{card}(A)$، $\mathrm{card}(B)$، $\mathrm{card}(A \cap B)$ لار بېرىل-

گەنلىكى ئۈچۈن، يۇقىرىدىكى فورمۇلىغا ئاساسەن $\mathrm{card}(A \cup B)$ نى تاپقىلى بولىدۇ.

يېشىش:

$A=$ {يېنىك ئاتلېتىكا تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىگە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلار},

$B=$ {توپ تۈرلىرى بويىچە تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىگە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلار}

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

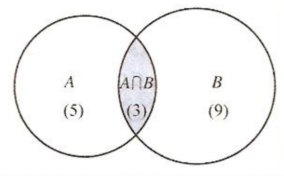
$A \cap B=$ {ئىككى قېتىملىق تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىنىڭ ھەر ئىككىسىگە قاتناشقان ئوقۇغۇچىلار},

$A \cup B=$ {مۇسابىقىگە قاتناشقان بارلىق ئوقۇغۇچىلار},

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$$
$$= 8 + 12 - 3 = 17.$$

جاۋابى: بۇ سىنىپتىن ئىككى قېتىملىق تەنھەرىكەت مۇسابىقىسىگە جەمئىي 17 ئوقۇغۇچى قاتناشقان.

بۇ مىسالنى Venn شەكلىدىن پايدىلىنىپ يەشسەكمۇ بولىدۇ.



يۇقىرىقى شەكىلدىكى $A \cap B$ غا ماس كېلىدىغان دائىرىگە 3($\mathrm{card}(A \cap B) = 3$)[1] نى، ئاندىن A دىكى $A \cap B$ نى ئۆز ئىچىگە ئالمىغان دائىرىگە 5($\mathrm{card}(A) - \mathrm{card}(A \cap B) = 5$)نى، B دىكى $A \cap B$ نى ئۆز ئىچىگە ئالمىغان دائىرىگە 9($\mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B) = 9$) نى يېزىپ، ئەڭ ئاخىرىدا بۇ ئۈچ دائىرىگە يېزىلغان سانلارنى قوشساق 17 كېلىپ چىقىدۇ، بۇ دەل $\mathrm{card}(A \cup B)$ بولىدۇ.

[1] بۇ يەردىكى 3 ئېلېمېنت بولماستىن، بەلكى ئېلېمېنت سانىدۇر. رەسىمدە بىز بۇنى ئالاھىدە تىرناق ئىچىگە ئالدۇق، 5، 9 لارمۇ شۇنىڭغا ئوخشاش.

مۇرەككەپرەك مەسىلىلەر (مەسىلەن، ئۈچتىن ئارتۇق توپلامنىڭ بىرىكمىسى ۋە كېسىشمىسىگە چېتىلىدىغان مەسىلىلەر)نى يەشكەندە بۇ خىل شەكىلدىن پايدىلىنىپ يېشىش ئۇسۇلىنىڭ ئەۋزەللىكى تېخىمۇ روشەن گەۋدىلىنىدۇ. چەكلىك توپلام A، B، C لارغا نىسبەتەن، $\mathrm{card}(A \cup B \cup C)$، $\mathrm{card}(A)$، $\mathrm{card}(B)$، $\mathrm{card}(C)$، $\mathrm{card}(A \cap B)$، $\mathrm{card}(B \cap C)$، $\mathrm{card}(A \cap C)$، $\mathrm{card}(A \cap B \cap C)$ لار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بايقىيالامسىز؟ بىر كونكرېت مىسال ئارقىلىق ھېسابلاپ بېقىڭ.

بىز چەكلىك توپلامدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ سانىنى بىر - بىرلەپ ساناپ چىقالىساقمۇ، ئېلېمېنت سانى چەكسىز بولغان توپلاملار، مەسىلەن،

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots,\ n,\ \cdots\},$$
$$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots,\ 2n,\ \cdots\}$$

دېگەندەك توپلاملاردىكى ئېلېمېنتلارنىڭ سانىنى سانىيالمايمىز، ئەمما بۇنداق ئىككى توپلامدىكى ئېلېمېنتلار سانىنىڭ ئاز - كۆپلۈكىنى سېلىشتۇرالايمىز. سىز مۇشۇ ئىككى توپلامدىكى ئېلېمېنتلار سانىنىڭ ئاز - كۆپلۈكىنى سېلىشتۇرۇش ئۇسۇلىنى لايىھىلەپ چىقالامسىز؟

2-1 فۇنكسىيە ۋە ئۇنىڭ ئىپادىلىنىشى

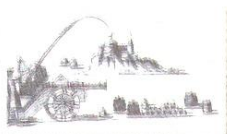
1-2-1 فۇنكسىيە ئۇقۇمى

تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتە فۇنكسىيە ئۇقۇمىنى ئۆگىنىپ، ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار ئارىسىدىكى بېقىندىلىق مۇناسىۋەتنى فۇنكسىيە ئارقىلىق تەسۋىرلەشكە بولىدىغانلىقىنى بىلىۋالغانىدۇق. ئەمدى فۇنكسىيە ۋە ئۇنى ھاسىل قىلغۇچى ئامىللارنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئۆگىنىمىز. ئاۋۋال بىرقانچە ئەمەلىي مىسالنى كۆرۈپ باقايلى.

(1) بىر زەمبىرەك ئوقى (سنارەد) ئېتىلىپ، 26 s ئۆتكەندىن كېيىن يەرگە چۈشۈپ نىشانغا تەگكەن. ئوقنىڭ ئېتىلىش ئېگىزلىكى[1] 845 m بولۇپ، ئوقنىڭ يەردىن ئېگىزلىكى h (بىرلىكى: m) نىڭ ۋاقىت t (بىرلىكى: s) غا ئەگىشىپ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقى بېرىلگەن:

$$h=130t-5t^2. \qquad (*)$$

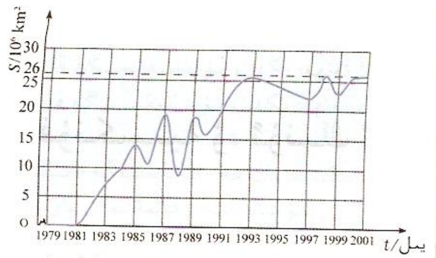
[1] ئېتىلىش ئېگىزلىكى يانتۇ ئېتىلىش ھەرىكىتىدىكى جىسىمنىڭ ئۇچۇش ترايېكتورىيىسىنىڭ ئەڭ يۇقىرى نۇقتىسىنىڭ ئېگىزلىكىنى كۆرسىتىدۇ.



بۇ يەردە، ئوقنىڭ ئۇچۇش ۋاقتى t نىڭ ئۆزگىرىش دائىرىسى سانلار توپلىمى $A=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 26\}$، ئوقنىڭ يەردىن ئېگىزلىكى h نىڭ ئۆزگىرىش دائىرىسى سانلار توپلىمى $B=\{h\mid 0\leqslant h\leqslant 845\}$ بولىدۇ. بۇ مەسىلىنىڭ ئەمەلىي مەنىسىدىن بىلەلەيمىزكى، سانلار توپلىمى A دىكى خالىغان بىر t پەيتكە نىسبەتەن، ماسلىق مۇناسىۋىتى $(*)$ بويىچە سانلار توپلىمى B دا بىردىنبىر ئېنىق ئېگىزلىك h ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ.

(2) يېقىنقى نەچچە ئون يىلدىن بۇيان، ئاتموسفېرادىكى ئوزون تېز كېمىيىپ، ئوزون قاتلىمىدا تۆشۈك پەيدا بولۇش مەسىلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقاردى. 1.2.1 ـ رەسىمدىكى ئەگرى سىزىق جەنۇبىي قۇتۇپ ئوزون قاتلىمىدىكى تۆشۈك يۈزىنىڭ 1979 ~ 2001 ـ يىلىدىكى ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ.

1.2.1 ـ رەسىمدىكى ئەگرى سىزىقتىن بىلەلەيمىزكى، ۋاقىت t نىڭ ئۆزگىرىش دائىرىسى سانلار توپلىمى $A=\{t\mid 1979\leqslant t\leqslant 2001\}$، ئوزون قاتلىمىدىكى تۆشۈك يۈزى S نىڭ ئۆزگىرىش دائىرىسى سانلار توپلىمى $B=\{S\mid 0\leqslant S\leqslant 26\}$ بولۇپ، سانلار توپلىمى A دىكى ھەربىر t پەيتكە نىسبەتەن رەسىمدىكى ئەگرى سىزىق بويىچە سانلار توپلىمى B دا ئوزون قاتلىمىدىكى بىردىنبىر ئېنىق تۆشۈك يۈزى S ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ.



جەنۇبىي قۇتۇپ ئوزون قاتلىمىدىكى تۆشۈك يۈزى

1.2.1 ـ رەسىم

(3) خەلقئارادا مەلۇم دۆلەت خەلقى تۇرمۇش سەۋىيىسىنىڭ يۇقىرى ـ تۆۋەنلىكى كۆپ ھاللاردا ئېنگېل كوئېففىتسېنتى ❶ ئارقىلىق ئەكس ئەتتۇرۇلىدۇ. ئېنگېل كوئېففىتسېنتى قانچىكى تۆۋەن بولسا، تۇرمۇش سەۋىيىسى شۇنچە يۇقىرى بولىدۇ. 1.1 ـ جەدۋەلدىكى ئېنگېل كوئېففىتسېنتىنىڭ ۋاقىت (يىل) قا ئەگىشىپ ئۆزگىرىش ئەھۋالى شۇنى كۆرسىتىپ بېرىدۇكى، « 8 ـ بەش يىللىق» پىلاندىن بۇيان، ئېلىمىزدىكى شەھەر ـ بازار ئاھالىلىرىنىڭ تۇرمۇش سەۋىيىسىدە روشەن ئۆزگىرىشلەر بولغان.

❶ ئېنگېل كوئېففىتسېنتى = يېمەكلىك چىقىم سوممىسى / ئومۇمىي چىقىم سوممىسى

«8 ـ بەش يىللىق» پىلاندىن بۇيانقى ئېلىمىز شەھەر ـ بازار ئاھالىلىرى ئېنگېل كوئېففىتسېنتىنىڭ ئۆزگىرىش ئەھۋالى

1.1 ـ جەدۋەل

ۋاقىت (يىل)	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
شەھەر ـ بازار ئاھالىلىرى ئېنگېل كوئېففىتسېنتى (%)	53.8	52.9	50.1	49.9	49.9	48.6	46.4	44.5	41.9	39.2	37.9

(1)، (2) مىساللاردىكى بايانلارغا تەقلىد قىلىپ، 1.1 ـ جەدۋەلدىكى ئېنگېل كوئېففىتسېنتى بىلـ
ۋاقىت (يىل) نىڭ مۇناسىۋىتىنى تەسۋىرلەپ بېقىڭ.

مۇلاھىزە ؟

يۇقىرىقى ئۈچ ئەمەلىي مىسالنى تەھلىل قىلىڭ ھەم يىغىنچاقلاڭ، ئۇلاردىكى ئۆزگەرگۈچى مىقدارلارنىڭ
مۇناسىۋىتىدە قانداق ئورتاقلىق بار؟

يۇقىرىقى ئۈچ ئەمەلىي مىسالنى يىغىنچاقلاش ئارقىلىق، ئۇلاردىكى ئۆزگەرگۈچى مىقدارلارنىڭ مـ
ناسىۋىتىنى تۆۋەندىكىدەك تەسۋىرلەشكە بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز: سانلار توپلىمى A دىكى ھەربىـ
كە نىسبەتەن، مەلۇم خىل ماسلىق مۇناسىۋىتى f بويىچە سانلار توپلىمى B دا بىردىنبىر ئېنىق قىمـ
y ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ ۋە بۇ مۇناسىۋەت تۆۋەندىكىدەك يېزىلىدۇ:

$f: A \to B$ (ياكى $A \to B :f$).

ئومۇمەن:

A، B لار بوش بولمىغان سانلار توپلىمى بولسۇن. ئەگەر مەلۇم خىل ئېنىق ماسلىق مۇناسىۋىتى f بويىچە، A توپلامدىكى خالىغان بىر سان x كە نىسبەتەن، B توپلامدا بىردىنبىر ئېنىق سان $f(x)$ ئۇنىڭغا ماس كەلسە، ئۇ ھالدا $f: A \to B$ نى توپلام A دىن توپلام B غا بولغان بىر **فۇنكسىيە** (function) دەپ ئاتىلىپ، تۆۋەندىكىدەك يېزىلىدۇ:

$$y=f(x),\ x \in A.$$

فۇنكسىيە بەلگىسى $y=f(x)$ نى گېرمانىيىلىك ماتېماتىك لايبنىس 18 ـ ئەسىردە تۇنجى بولۇپ ئىشلەتكەن.

بۇنىڭدىكى x ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، x نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى A مۇشۇ فۇنكسىيىنىڭ **ئېنىقلىنىش ساھەسى** (domain) دېيىلىدۇ؛ x نىڭ قىممىتىگە ماس كېلىدىغان y نىڭ قىممىتى فۇنكسىيە قىممىتى، فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ توپلىمى $\{f(x) \mid x \in A\}$ فۇنكسىيىنىڭ **قىممەت ساھەسى** (range) دېيىلىدۇ. روشەنكى، قىممەت ساھەسى B توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى بولىدۇ.

بىز پىششىق بىلىدىغان بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax+b$ $(a \neq 0)$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\mathbf{R}$، قىممەت ساھەسىمۇ $\mathbf{R}$ بولىدۇ. $\mathbf{R}$ دىكى خالىغان بىر سان x كە نىسبەتەن، $\mathbf{R}$ دا بىردىنبىر سان $y=ax+b$ $(a \neq 0)$ ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ.

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\mathbf{R}$، قىممەت ساھەسى B بولۇپ، $a>0$ بولغاندا، $B=\left\{y \middle| y \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$؛ $a<0$ بولغاندا، $B=\left\{y \middle| y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$ بولىدۇ. $\mathbf{R}$ دىكى خالىغان بىر سان x كە نىسبەتەن، B دا بىردىنبىر سان $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

تەتۈر تاناسىپلىق فۇنكسىيە $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى، ئۇنىڭدىكى ماسلىق مۇناسىۋىتى ۋە بۇ فۇنكسىيىنىڭ قىممەت ساھەسىنى تېپىڭ ھەمدە بۇ فۇنكسىيىنى يۇقىرىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان فۇنكسىيە ئېنىقلىمىسىدىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلەڭ.

فۇنكسىيىنى تەتقىق قىلغاندا كۆپ ھاللاردا ئىنتېرۋال ئۇقۇمى قوللىنىلىدۇ.

a، b نى ھەقىقىي سان ھەمدە $a<b$ دەپ پەرەز قىلىپ، مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز:

(1) تەڭسىزلىك $a \leqslant x \leqslant b$ نى قانائەتلەندۈرىدىغان ھەقىقىي سان x لەرنىڭ توپلىمى **يېپىق ئىنتېرۋال** دەپ ئاتىلىپ، $[a, b]$ قىلىپ يېزىلىدۇ؛

(2) تەڭسىزلىك $a<x<b$ نى قانائەتلەندۈرىدىغان ھەقىقىي سان x لەرنىڭ توپلىمى **ئوچۇق ئىنتېرۋال** دەپ ئاتىلىپ، (a, b) قىلىپ يېزىلىدۇ؛

(3) تەڭسىزلىك $a \leqslant x<b$ ياكى $a<x \leqslant b$ نى قانائەتلەندۈرىدىغان x لەرنىڭ توپلىمى **يېرىم ئوچۇق يېرىم يېپىق ئىنتېرۋال** دەپ ئاتىلىپ، ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $[a, b)$، $(a, b]$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

بۇ يەردىكى ھەقىقىي سان a بىلەن b ماس ئىنتېرۋالنىڭ **ئۇچلىرى** دەپ ئاتىلىدۇ.

سان ئوقىدا ئىپادىلىنىشى	بەلگىسى	نامى	ئېنىقلىمىسى
	$[a, b]$	يېپىق ئىنتېرۋال	$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$
	(a, b)	ئوچۇق ئىنتېرۋال	$\{x\|a< x< b\}$
	$[a, b)$	يېرىم ئوچۇق يېرىم يېپىق ئىنتېرۋال	$\{x\|a\leqslant x< b\}$
	$(a, b]$	يېرىم ئوچۇق يېرىم يېپىق ئىنتېرۋال	$\{x\|a< x\leqslant b\}$

يۇقىرىدا دېيىلگەن ئىنتېرۋاللارنىڭ گېئومېترىيىلىك ئىپادىلىنىشى جەدۋەلدە كۆرسىتىلدى. جەدۋەلدىكى رەسىمدە، قارا نۇقتا ئىنتېرۋال ئۇز ئىچىگە ئالغان ئۇچىنى، كاۋاك نۇقتا ئىنتېرۋال ئۆز ئىچىگە ئالمىغان ئۇچىنى ئىپادىلەيدۇ.

ھەقىقىي سانلار توپلىمى **R** نى ئىنتېرۋال ئارقىلىق $(-\infty, +\infty)$ قىلىپ ئىپادىلەشكە بولىدۇ، بۇنىڭدىكى «∞»نى «چەكسىز چوڭ»، «$-\infty$»نى «مەنپىي (مىنۇس) چەكسىز چوڭ»، «$+\infty$» نى «مۇسبەت (پىلۇس) چەكسىز چوڭ» دەپ ئوقۇيمىز. $x\geqslant a$، $x>a$، $x\leqslant b$، $x<b$ نى قانائەتلەندۈرىدىغان ھەقىقىي سان x لەرنىڭ توپلىمىنى ئايرىم - ئايرىم ھالدا $[a, +\infty)$، $(a, +\infty)$، $(-\infty, b]$، $(-\infty, b)$ قىلىپ ئىپادىلەيمىز.

1 - مىسال فۇنكسىيە $f(x)=\sqrt{x+3}+\frac{1}{x+2}$ بېرىلگەن.

(1) فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تاپايلى؛

(2) $f(-3)$، $f\left(\frac{2}{3}\right)$ نىڭ قىممىتىنى تاپايلى؛

(3) $a>0$ بولغاندىكى $f(a)$، $f(a-1)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

تەھلىل: ئالدىدا بايان قىلىنغان ئۈچ ئەمەلىي مىسالدىكىگە ئوخشاش، فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى ئادەتتە مەسىلىنىڭ ئەمەلىي ئارقا كۆرۈنۈشى ئاساسىدا ئېنىقلىنىدۇ. ئەگەر فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى $y=f(x)$ لا بېرىلىپ، ئۇنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى كۆرسىتىلمىسە، ئۇ ھالدا فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى مۇشۇ ئانالىتىك ئىپادىنى مەنىگە ئىگە قىلىدىغان ھەقىقىي سانلارنىڭ توپلىمىنى كۆرسىتىدۇ.

يېشىش: (1) يىلتىزلىق ئىپادە $\sqrt{x+3}$ نى مەنىگە ئىگە قىلىدىغان ھەقىقىي سان x لەرنىڭ توپلىمى $\{x|x\geqslant -3\}$، كەسىر ئىپادە $\frac{1}{x+2}$ نى مەنىگە ئىگە قىلىدىغان ھەقىقىي سان x لەرنىڭ توپلىمى $\{x|x\neq -2\}$ بولغانلىقتىن، بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى مۇنداق بولىدۇ:

$$\{x|x\geqslant -3\}\cap\{x|x\neq -2\}$$
$$=\{x|x\geqslant -3 \text{ ھەمدە } x\neq -2\}.$$

(2) $f(-3)=\sqrt{-3+3}+\frac{1}{-3+2}=-1$;

> فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدا، فۇنكسىيىنى $y=f(x)$ بەلگە بىلەن ئىپادىلەيمىز. بۇنىڭدىكى $f(x)$ بەلگە f بىلەن x نىڭ كۆپەيتىلگەنلىكىنى ئەمەس، بەلكى x كە ماس كېلىدىغان فۇنكسىيە قىممىتىنى ئىپادىلەيدۇ.

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}+3}+\frac{1}{\frac{2}{3}+2}=\sqrt{\frac{11}{3}}+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{33}}{3}.$$

(3) $a>0$ بولغانلىقتىن، $f(a)$، $f(a-1)$ لەر مەنىگە ئىگە بولىدۇ.

$$f(a)=\sqrt{a+3}+\frac{1}{a+2};$$

$$f(a-1)=\sqrt{a-1+3}+\frac{1}{(a-1)+2}=\sqrt{a+2}+\frac{1}{a+1}.$$

فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلەلەيمىزكى، بىر فۇنكسىيىنى ھاسىل قىلغۇچى ئامىللار: ئېنىقلىنىش ساھەسى، ماسلىق مۇناسىۋىتى ۋە قىممەت ساھەسى ئىبارەت. قىممەت ساھەسى ئېنىقلىنىش ساھەسى ۋە ماسلىق مۇناسىۋىتى تەرىپىدىن بەلگىلىنىدىغانلىقتىن، ئەگەر ئىككى فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى ئوخشاش ھەمدە ئۇلاردىكى ماسلىق مۇناسىۋەتلىرىمۇ تامامەن ئوخشاش بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى فۇنكسىيە تەڭ بولىدۇ.

2 ـ مىسال تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئىچىدە قايسىسى $y=x$ فۇنكسىيە بىلەن تەڭ بولىدۇ؟

(1) $y=(\sqrt{x})^2$;　　(2) $y=\sqrt[3]{x^3}$.

(3) $y=\sqrt{x^2}$;　　(4) $y=\frac{x^2}{x}$.

> 2 ـ مىسالدىكى تۆت فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ سىزىپ، گرافىكقا ئاساسەن ھۆكۈم قىلىشىڭىزمۇ بولىدۇ.

يېشىش: (1) $y=(\sqrt{x})^2=x$ $(x\geqslant 0)$، بۇ فۇنكسىيە بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەتلەر ئوخشاش بولسىمۇ، ئەمما ئۇلارنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەلىرى ئوخشاش ئەمەس. شۇڭا، بۇ فۇنكسىيە بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيە تەڭ ئەمەس.

(2) $y=\sqrt[3]{x^3}=x$ $(x\in \mathbf{R})$، بۇ فۇنكسىيە بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەتلەر ئوخشاش ھەمدە ئۇلارنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەلىرىمۇ ئوخشاش. شۇڭا، بۇ فۇنكسىيە بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيە تەڭ بولىدۇ.

(3) $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$. بۇ فۇنكسىيە بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەلىرى ئوخشاشلا ھەقىقىي سانلار توپلىمى $\mathbf{R}$ بولسىمۇ، ئەمما $x<0$ بولغاندا ئۇنىڭدىكى ماسلىق مۇناسىۋەت $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ تىكىسى بىلەن ئوخشاش ئەمەس. شۇڭا، بۇ فۇنكسىيە بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيە تەڭ ئەمەس.

(4) $y=\frac{x^2}{x}$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\{x|x\neq 0\}$ بولۇپ، ئۇنىڭ بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەتلەر ئوخشاش بولسىمۇ، ئەمما ئۇلارنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەلىرى ئوخشاش ئەمەس. شۇڭا، بۇ فۇنكسىيە بىلەن $y=x$ $(x\in \mathbf{R})$ فۇنكسىيە تەڭ ئەمەس.

مۇلاھىزە؟

يۇقىرىدا بىز تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتىكى ئۆگىنىشلەر ئاساسىدا، فۇنكسىيە ئۇقۇمىنى توپلام ۋە ماسلىق تىللىرىدىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلىدۇق ھەمدە $y=f(x)$ بەلگىسىنى كىرگۈزۈپ، فۇنكسىيىنى ھاسىل قىلغۇچى ئامىللارنى ئايدىڭلاشتۇرۇۋالدۇق. فۇنكسىيىنىڭ تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتىكى ئېنىقلىمىسى بىلەن ھازىرقى بۇ ئېنىقلىمىسىنى سېلىشتۇرۇپ، قانداق يېڭى تونۇشقا كەلدىڭىز؟

مەشىق

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4x+7}$;　　(2) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}-1$.

2. فۇنكسىيە $f(x)=3x^3+2x$ بېرىلگەن.

(1) $f(2)$، $f(-2)$، $f(2)+f(-2)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) $f(a)$، $f(-a)$، $f(a)+f(-a)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر مىسالدىكى ئىككى فۇنكسىيىنىڭ تەڭ ياكى تەڭ ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

(1) زەمبىرەك ئوقىنىڭ ئۇچۇش ئېگىزلىكى h بىلەن ۋاقىت t نىڭ مۇناسىۋىتىنى ئىپادىلەيدىغان فۇنكسىيە $h=130t-5t^2$ ۋە ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=130x-5x^2$؛

(2) $f(x)=1$ ۋە $g(x)=x^0$.

2-2-1 فۇنكسىيىنى ئىپادىلەش ئۇسۇلى

بىز تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتە فۇنكسىيىنى ئىپادىلەشتىكى ئۈچ خىل ئۇسۇل، يەنى ئانالىتىك ئۇسۇل، گرافىك ئۇسۇلى ۋە جەدۋەل تۈزۈش ئۇسۇلىنى ئۇچراتقانىدۇق.

ئانالىتىك ئۇسۇلدا، ئىككى ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەت ماتېماتىكىلىق ئىپادە ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، مەسىلەن، 1.2.1 ـ ماۋزۇدىكى (1) ئەمەلىي مىسالدىكىدەك.

گرافىك ئۇسۇلىدا، ئىككى ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەت گرافىك ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، مەسىلەن، 1.2.1 ـ ماۋزۇدىكى (2) ئەمەلىي مىسالدىكىدەك.

جەدۋەل تۈزۈش ئۇسۇلىدا، ئىككى ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەت جەدۋەل تۈزۈش ئارقىلىق ئىپادىلىنىدۇ، مەسىلەن، 1.2.1 ـ ماۋزۇدىكى (3) ئەمەلىي مىسالدىكىدەك.

3 ـ مىسال مەلۇم خىل خاتىرە دەپتىرىنىڭ يەككە باھاسى 5 يۈەن بولسا، ئۇ ھالدا x $(x\in\{1, 2, 3, 4, 5\})$ دانە خاتىرە دەپتىرى سېتىۋېلىش ئۈچۈن y يۈەن كېتىدۇ. فۇنكسىيىنى ئىپادىلەشتىكى ئۈچ خىل ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ $y=f(x)$ فۇنكسىيىنى ئىپادىلەپ كۆرەيلى.

يېشىش: بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى سانلار توپلىمى $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ بولىدۇ.

$y=f(x)$ فۇنكسىيىنى ئانالىتىك ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

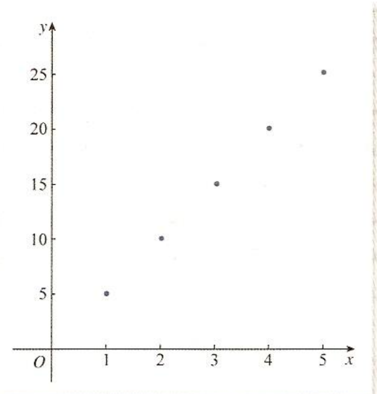
$$y=5x,\ \ x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$y=f(x)$ فۇنكسىيىنى جەدۋەل تۈزۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

دەپتەر سانى x	1	2	3	4	5
پۇل سانى y	5	10	15	20	25

$y=f(x)$ فۇنكسىيىنى گرافىك ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ 2.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

فۇنكسىيە گرافىكى ئۈزلۈكسىز ئەگرى سىزىق بولۇشىمۇ، تۈز سىزىق، سۇنۇق سىزىق، تارقاق نۇقتىلار بولۇشىمۇ مۇمكىن، ئۇنداق بولسا، بىر شەكىلنىڭ فۇنكسىيە گرافىكى ياكى ئەمەسلىكىگە ھۆكۈم قىلىشنىڭ ئاساسى نېمە؟



2.2.1 ـ رەسىم

مۇلاھىزە؟

(1) فۇنكسىيىنى ئىپادىلەشتىكى ئۈچ خىل ئۇسۇلنى سېلىشتۇرۇڭ، ئۇلارنىڭ ھەربىرى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟ بارلىق فۇنكسىيىلەرنى ئانالىتىك ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەشكە بولامدۇ ـ يوق؟

(2) بىرقانچە فۇنكسىيىنى مىسال كەلتۈرۈپ، ئۇلارنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا ئۈچ خىل ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ.

بىز بىر كونكرېت مەسىلىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەتنى مۇۋاپىق ئۇسۇل تاللاپ ئىپادىلىيەلەيدىغان بولۇشنى ئۆگىنىۋېلىشىمىز لازىم.

4 ـ مىسال 2.1 ـ جەدۋەلدە مەلۇم مەكتەپنىڭ تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىق (1) سىنىپىدىكى ئۈچ ئوقۇغۇچىنىڭ شۇ يىللىقتىكى ئالتە قېتىملىق ماتېماتىكا سىنىقىدا ئېرىشكەن نەتىجىسى ۋە سىنىپنىڭ ئوتتۇرا نەتىجىسى بېرىلگەن.

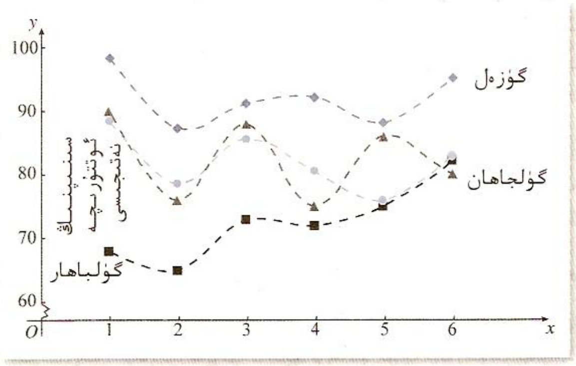
2.1 ـ جەدۋەل

سىناق تەرتىپ نومۇرى / نەتىجىسى / ئىسمى	1 ـ قېتىم	2 ـ قېتىم	3 ـ قېتىم	4 ـ قېتىم	5 ـ قېتىم	6 ـ قېتىم
گۈزەل	98	87	91	92	88	95
گۈلجاھان	90	76	88	75	86	80
گۈلباھار	68	65	73	72	75	82
سىنىپنىڭ ئوتتۇرىچە نەتىجىسى	88.2	78.3	85.4	80.3	75.7	82.6

بۇ ئۈچ ئوقۇغۇچىنىڭ تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ 1 ـ يىللىقتىكى ماتېماتىكا ئۆگىنىش ئەھۋالىنى تەھلىل قىلايلى:

يېشىش: جەدۋەلدىن ھەربىر ئوقۇغۇچىنىڭ ھەر قېتىملىق سىناقتىكى نەتىجىسىنى ئاسانلا كۆرۈۋالغىلى بولىدۇ، ئەمما ھەربىر ئوقۇغۇچىنىڭ نەتىجىسىنىڭ ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى تەھلىل قىلىش ئانچە ئاسان ئەمەس. ئەگەر «نەتىجىسى» بىلەن «سىناق تەرتىپ نومۇرى» ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى فۇنكسىيە گرافىكى ئارقىلىق ئىپادىلىۋالساق (3.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك)، ئۇ ھالدا نەتىجىنىڭ ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى كۆرسەتمىلىك ھالدا كۆرۈۋالالايمىز ـ دە، بۇنىڭ تەھلىل يۈرگۈزۈشىمىزگە ياردىمى بولىدۇ.

بىر ئوقۇغۇچىنىڭ ئۆگىنىش نەتىجىسىنى ئاسان كۆرۈۋېلىش ئۈچۈن، تارقاق نۇقتىلارنى ئۈزۈك سىزىق بىلەن تۇتاشتۇرىمىز.



3.2.1 ـ رەسىم

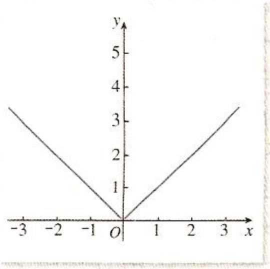
3.2.1 ـ رەسىمدىن كۆرەلەيمىزكى، گۈزەلنىڭ ماتېماتىكا ئۆگىنىش نەتىجىسى باشتىن ـ ئاخىر سىنىپنىڭ ئوتتۇرىچە سەۋىيىسىدىن يۇقىرى بولۇپ، ئۆگىنىش ئەھۋالى بىرقەدەر تۇراقلىق ھەمدە نەتىجىسى ئەلا بولغان. گۈلجاھاننىڭ ماتېماتىكا نەتىجىسى سىنىپنىڭ ئوتتۇرىچە سەۋىيىسى ئەتراپىدا تەۋرىنىپ تۇرغان ھەمدە تەۋرىنىش دائىرىسى چوڭراق بولغان. گۈلباھارنىڭ ماتېماتىكا ئۆگىنىش نەتىجىسى سىنىپنىڭ ئوتتۇرىچە سەۋىيىسىدىن تۆۋەن بولسىمۇ، ئەمما ئۇنىڭ نەتىجىسىنى ئىپادىلەيدىغان ئەگرى سىزىق يۇقىرىغا ئۆرلەش يۈزلىنىشىدە بولغان. بۇ ئۇنىڭ ماتېماتىكا نەتىجىسىنىڭ سالماق قەدەم بىلەن يۇقىرى ئۆرلەۋاتقانلىقىنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ.

5 ـ مىسال فۇنكسىيە $y=|x|$ نىڭ گرافىكىنى سىزايلى.

يېشىش: مۇتلەق قىممەت ئۇقۇمىغا ئاساسەن:

$$y=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

شۇڭا، فۇنكسىيە $y=|x|$ نىڭ گرافىكى 4.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.



4.2.1 ـ رەسىم

6 ـ مىسال مەلۇم شەھەردىكى «قول كۆتۈرسىلا توختايدىغان» ئاپتوبۇسنىڭ بىلەت باھاسى تۆۋەندىكى بەلگىلىمە بويىچە بېكىتىلگەن:

(1) 5 كىلومېتىر ئىچىدىكى (5 كىلومېتىرنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) بىلەت باھاسى 2 يۈەن؛

(2) 5 كىلومېتىردىن ئېشىپ كەتكەندە، ھەر 5 كىلومېتىر ئاشسا (5كىلومېتىرغا يەتمىگىنى 5 كىلومېتىر بويىچە ھېسابلىنىدۇ)، بىلەت باھاسىغا 1 يۈەن قوشۇلىدۇ.

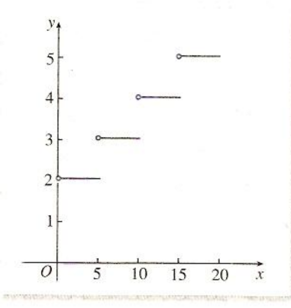
ئەگەر مەلۇم يولنىڭ ئومۇمىي مۇساپىسى 20 كىلومېتىر بولسا، مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، بىلەت باھاسى بىلەن مۇساپە ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىنى يازايلى ھەمدە فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزايلى.

يېشىش: بىلەت باھاسىنى y يۈەن، مۇساپىنى x كىلومېتىر دەپ پەرەز قىلساق، مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن بىلەلەيمىزكى، ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى $(0, 20]$ بولىدۇ.

«قول كۆتۈرسىلا توختايدىغان» ئاپتوبۇسنىڭ بىلەت باھاسىنى بېكىتىشتىكى بەلگىلىمىگە ئاساسەن، تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$y=\begin{cases} 2, & 0<x \leqslant 5, \\ 3, & 5<x \leqslant 10, \\ 4, & 10<x \leqslant 15, \\ 5, & 15<x \leqslant 20. \end{cases}$$

بۇ فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىگە ئاساسەن، فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىپ چىقىشقا بولىدۇ (5.2.1 ـ رەسىمدىكىدەك).



5.2.1 ـ رەسىم

5 ـ ، 6 ـ مىساللاردىكىگە ئوخشاش بۇنداق فۇنكسىيىلەر **بۆلەكلەرگە بۆلۈنگەن فۇنكسىيە** دەپ ئاتىلىدۇ. تۇرمۇشتا بۆلەكلەرگە بۆلۈنگەن فۇنكسىيە بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدىغان نۇرغۇن ئەمەلىي مەسىلىلەر بار، مەسىلەن، تاكسىنىڭ كىرا ھەققىنى ھېسابلاش، شەخس تاپاۋەت بېجىنىڭ سوممىسى دېگەندەك.

فۇنكسىيە «ئىككى سانلار توپلىمى ئارىسىدىكى بىر خىل ئېنىق ماسلىق مۇناسىۋەت» دۇر. سانلار توپلىمىنى خالىغان توپلامغا كېڭەيتسەك، ئەكس ئېتىش ئۇقۇمىغا ئىگە بولىمىز. مەسىلەن، ياۋروپا دۆلەتلىرى A توپلامنى، ياۋروپا دۆلەتلىرىنىڭ پايتەختلىرى B توپلامنى ھاسىل قىلىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، ماسلىق مۇناسىۋەتنى f : a دۆلەتكە ئۇنىڭ پايتەختى b ماس كېلىدۇ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا A توپلامدىكى خالىغان بىر دۆلەتكە نىسبەتەن، ماسلىق مۇناسىۋەتتى f بويىچە B توپلامدا بىردىنبىر ئېنىق پايتەخت ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ. بىز ماسلىق $f: A\rightarrow B$ نى ئەكس ئېتىش دەپ ئاتايمىز.

ئومۇمەن:

A ، B لار ئىككى بوش بولمىغان توپلام بولسۇن. ئەگەر مەلۇم بىر ئېنىق ماسلىق مۇناسىۋەتتى f بويىچە، A توپلامدىكى خالىغان بىر x ئېلېمېنتقا نىسبەتەن، B توپلامدا بىردىنبىر ئېنىق ئېلېمېنت ئۇنىڭغا ماس كەلسە، ئۇ ھالدا ماسلىق $f: A\rightarrow B$ نى A توپلامدىن B توپلامغا بولغان بىر **ئەكس ئېتىش** (mapping) دەپ ئاتايمىز.

تۇرمۇشتا ئەكس ئېتىشكە دائىر نۇرغۇن مىساللار بار. مەسىلەن،

توپلام $A=\{x\mid$ بولسا مەلۇم مەيدان كىنو بېلەتتىدىكى نومۇر $x\}$،

توپلام $B=\{x\mid$ بولسا مەلۇم كىنوخانىنىڭ ئورۇن نومۇرى $x\}$،

ماسلىق مۇناسىۋەتتى f : كىنو بېلەتتىدىكى نومۇرغا كىنوخانىنىڭ ئورۇن نومۇرى ماس كېلىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ماسلىق $f: A\rightarrow B$ بىر ئەكس ئېتىش بولىدۇ.

7 ـ مىسال تۆۋەندىكى ماسلىقلار A توپلامدىن B توپلامغا بولغان ئەكس ئېتىش بولامدۇ ـ يوق؟

(1) توپلام $A=\{P\mid$ بولسا سان ئوقىدىكى نۇقتا $P\}$، توپلام $B=\mathbf{R}$،

ماسلىق مۇناسىۋەتتى f : سان ئوقىدىكى نۇقتىغا شۇ نۇقتا ۋەكىللىك قىلغان ھەقىقىي سان ماس كېلىدۇ؛

(2) توپلام $A=\{P\mid$ بولسا تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلار $P\}$،

توپلام $B=\{(x, y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$،

ماسلىق مۇناسىۋەتتى f : تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىغا ئۇنىڭ كوئوردىناتى ماس كېلىدۇ؛

(3) توپلام $A=\{x\mid$ بولسا ئۈچبۇلۇڭ $x\}$، توپلام $B=\{x\mid$ بولسا چەمبەر $x\}$،

ماسلىق مۇناسىۋەتتى f: ھەربىر ئۈچبۇلۇڭغا ئۇنىڭغا ئىچىتىن ئۇرۇنغان چەمبەر ماس كېلىدۇ؛

(4) توپلام $A=\{x\mid$ بولسا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىدىكى سىنىپلار $x\}$،

توپلام $B=\{x\mid$ بولسا شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىدىكى ئوقۇغۇچى $x\}$،

ماسلىق مۇناسىۋەتتى f: ھەربىر سىنىپقا شۇ سىنىپتىكى ئوقۇغۇچى ماس كېلىدۇ.

يېشىش: (1) سان ئوقىنى تۇرغۇزۇش ئۇسۇلىدىن بىلەلەيمىزكى، سان ئوقىدىكى خالىغان بىر نۇقتىغا بىردىنبىر ھەقىقىي سان ماس كېلىدۇ، شۇڭا ماسلىق $f: A\rightarrow B$ توپلام A دىن B غا بولغان ئەكس ئېتىش بولىدۇ.

(2) تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇش ئۇسۇلىدىن بىلەلەيمىزكى، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى خالىغان بىر نۇقتىغا بىردىنبىر ھەقىقىي سانلار جۈپى ماس كېلىدۇ، شۇڭا ماسلىق $f: A\rightarrow B$ توپلام A دىن B غا بولغان بىر ئەكس ئېتىش بولىدۇ.

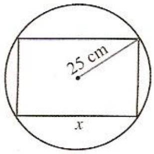
(3) ھەربىر ئۇچبۇلۇڭغا پەقەت بىرلا ئىچتىن ئورۇنغان چەمبەر ماس كېلىدۇ، شۇڭا ماسلىق $f: A \to B$ توپلام A دىن B غا بولغان بىر ئەكس ئېتتىش بولىدۇ.

(4) شىنخۇا ئوتتۇرا مەكتىپىدىكى ھەربىر سىنىپتا بىرمۇنچە ئوقۇغۇچى بار بولىدۇ، يەنى بىر سىنىپقا ماس كېلىدىغان ئوقۇغۇچىلارنىڭ سانى بىردىن ئارتۇق بولىدۇ، شۇڭا ماسلىق $f: A \to B$ توپلام A دىن B غا بولغان ئەكس ئېتتىش بولالمايدۇ.

مۇلاھىزە ؟

7 ـ مىسالدا، ئەگەر (3) تىكى ماسلىق مۇناسىۋىتى f نى: ھەربىر چەمبەر ئۆزىگە ئىچتىن تېگىشكەن ئۇچبۇلۇڭغا ماس كېلىدۇ دەپ؛ (4) تىكى ماسلىق مۇناسىۋىتى f نى: ھەربىر ئوقۇغۇچى ئۆزىنىڭ سىنىپىغا ماس كېلىدۇ دەپ ئۆزگەرتسەك، ئۇ ھالدا ماسلىق $f: B \to A$ توپلام B دىن A غا بولغان ئەكس ئېتتىش بولامدۇ ـ يوق؟

مەشىق



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

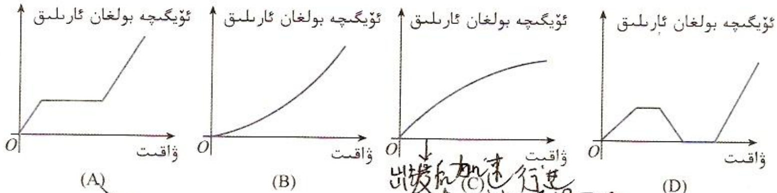
1. رەسىمدىكىدەك، كەسمە يۈزىنىڭ رادىئۇسى 25 cm بولغان چەمبەر شەكىللىك ياغاچنى ھەرىلەپ كەسمە يۈزى تىك تۆتبۇلۇڭ شەكلىدە بولغان ماتېرىيال تەييارلاشتا، ئەگەر تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ بىر تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى x cm، يۈزى y cm^2 بولسا، y نى x نىڭ فۇنكسىيىسى قىلىپ ئىپادىلەڭ. $y=x\sqrt{50^2-x^2}\ (0<x<50)$

2. تۆۋەندە تۆت گرافىك ۋە ئۈچ ۋەقە بېرىلدى، ھەربىر ۋەقەگە قايسى گرافىك ماس كېلىدىغانلىقىنى كۆرسىتىڭ، ئاندىن قېپقالغان بىر گرافىك ئۈچۈن بىر ۋەقەنى يېزىپ چىقىڭ.

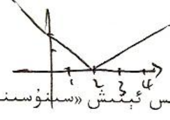
D (1) مەن ئۆيدىن چىقىپ ئۇزاق ئۆتمەيلا تاپشۇرۇق دەپتىرىمنى ئۇنتۇپ قالغانلىقىم ئېسىمگە كەلدى ـ دە، دەرھال ئۆيگە قايتىپ تاپشۇرۇق دەپتىرىمنى تاپقاندىن كېيىن يەنە مەكتەپكە قاراپ ماڭدىم؛

A (2) مەن ئۆيدىن چىقىپ ۋېلىسىپىتلىك تەكشى تېزلىك بىلەن ماڭغاندىم، ئەمما يولدا قاتناشنىڭ توسۇلۇپ قېلىشىغا دۇچ كېلىپ، بىرئاز تۇرۇپ قالدىم؛

B (3) مەن ئۆيدىن چىقىپ ئالدىرىماي ماڭدىم، كېيىن مەكتەپكە ئۈلگۈرۈپ بېرىش ئۈچۈن سۈرئىتىمنى تېزلەتتىم.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



3. فۇنكسىيە $y=|x-2|$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.

4. $A=\{x|x$ بولسا تار بۇلۇڭ$\}$، $B=(0, 1)$، A دىن B غا بولغان ئەكس ئېتتىش «سىنۇسىنى تېپىش» دەپ پەرەز قىلىپ، A دىكى ئېلېمېنت 60° قا ماس كېلىدىغان B دىكى ئېلېمېنتنى ۋە B دىكى ئېلېمېنت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ گە ماس كېلىدىغان A دىكى ئېلېمېنتنى تېپىڭ. 45° $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}$;　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\dfrac{6}{x^2-3x+2}$;　　(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-1}$.

2. قايسى گۇرۇپپىدىكى فۇنكسىيە $f(x)$ بىلەن $g(x)$ تەڭ بولىدۇ؟

(1) $f(x)=x-1,\ g(x)=\dfrac{x^2}{x}-1$;　　(2) $f(x)=x^2,\ g(x)=(\sqrt{x})^4$;

(3) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt[3]{x^6}$.

3. تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە ھەربىر فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى ۋە قىممەت ساھەسىنى ئېيتىپ بېرىڭ:

(1) $y=3x$;　　(2) $y=\dfrac{8}{x}$;

(3) $y=-4x+5$;　　(4) $y=x^2-6x+7$.

4. فۇنكسىيە $f(x)=3x^2-5x+2$ بېرىلگەن، $f(-\sqrt{2})$، $f(-a)$، $f(a+3)$، $f(a)+f(3)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. فۇنكسىيە $f(x)=\dfrac{x+2}{x-6}$ بېرىلگەن.

(1) (3, 14) نۇقتا بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى ئۈستىدە ياتامدۇ؟

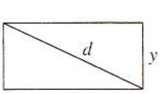
(2) $x=4$ بولغاندىكى $f(x)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(3) $f(x)=2$ بولغاندىكى x نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

6. ئەگەر $f(x)=x^2+bx+c$، $f(1)=0$، $f(3)=0$ بولسا، $f(-1)$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

7. تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ:

(1) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$　　(2) $G(n)=3n+1,\ n\in\{1,2,3\}$.



(8 ـ مەسىلە ئۈچۈن)

8. رەسىمدىكىدەك، تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ يۈزى 10 ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئەگەر بۇ تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئۇزۇنلۇقى x، كەڭلىكى y، دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقى d، ئايلانما ئۇزۇنلۇقى l بولسا، مۇشۇ مىقدارلارغا دائىر قايسى فۇنكسىيەلەرگە ئېرىشەلەيسىز؟

9. سىلىندىر شەكىللىك بىر قاچىنىڭ ئاستىنىڭ دىئامېتىرى d cm، ئېگىزلىكى h cm. ھازىر بۇ قاچىغا $v\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ تېزلىك بىلەن مەلۇم خىل ئېرىتمە قۇيۇلغان بولسا، قاچىدىكى ئېرىتمىنىڭ ئېگىزلـ

كى $x\,\text{cm}$ نىڭ قاچىغا ئېرىتمە قۇيۇشقا كەتكەن ۋاقت $t\,\text{s}$ قا دائىر فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادە-
سىنى تېپىڭ ھەمدە بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى ۋە قىممەت ساھەسىنى يېزىڭ.

10. توپلام $A=\{a, b, c\}$، $B=\{0, 1\}$ دەپ پەرەز قىلساق، A دىن B غا بولغان ئەكس ئېتتىش-
تىن قانچىسى بار؟ بۇ ئەكس ئېتتىشلەرنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا ئىپادىلەپ چىقىڭ.

B گۇرۇپپا

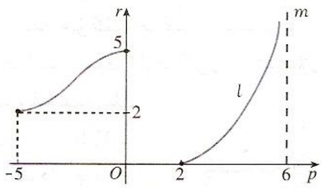
1. رەسىمدە فۇنكسىيە $r=f(p)$ نىڭ گرافىكى بېرىلگەن.

(1) فۇنكسىيە $r=f(p)$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى نېمە بولۇشى مۇمكىن؟

(2) فۇنكسىيە $r=f(p)$ نىڭ قىممەت ساھەسى نېمە بولۇشى مۇمكىن؟

(3) r قايسى قىممەتنى ئالغاندا، پەقەت بىردىنبىر p قىممەت ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ؟

ئوڭ تەرەپتىكى رەسىمدە، ئەگرى سىزىق l بىلەن تۈز سىزىق m چەكسىز يېقىنلىشىدۇ، ئەمما مەڭگۈ كېسىشمەيدۇ.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

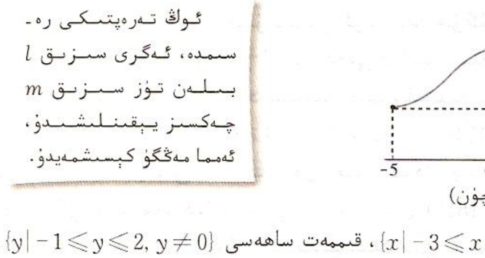
2. ئېنىقلىنىش ساھەسى $\{x|-3\leqslant x\leqslant 8$ ھەمدە $x\neq 5\}$، قىممەت ساھەسى $\{y|-1\leqslant y\leqslant 2, y\neq 0\}$ بولغان بىر فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.

(1) سىزغان گرافىكىڭىزنى ساۋاقداشلىرىڭىزنىڭكى بىلەن سېلىشتۇرۇڭ، پەرق بارمىكەن؟

(2) ئەگەر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى $P(x, y)$ نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $-3\leqslant x\leqslant 8$، $-1\leqslant y\leqslant 2$ لارنى قانائەتلەندۈرسە، بۇ نۇقتىلار ئىچىدىكى قايسى نۇقتىلار سىز سىزغان گرافىكنىڭ ئۈستىدە ياتمايدۇ؟

3. فۇنكسىيە $f(x)=[x]$ نىڭ فۇنكسىيە قىممىتى x تىن چوڭ بولمىغان ئەڭ چوڭ پۈتۈن سانىنى ئىپادىلەيدۇ، مەسىلەن، $[-3.5]=-4$، $[2.1]=2$ دېگەندەك. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $x\in(-2.5, 3]$ بولغاندىكى ئانالىتىك ئىپادىسىنى يېزىڭ ھەمدە ئۇنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.

4. رەسىمدىكىدەك، بىر ئارال بىلەن دېڭىز قىرغىقىدىكى ئۇنىڭغا ئەڭ يېقىن بولغان P نۇقتىنىڭ ئارىلىقى $2\,\text{km}$، P نۇقتىدىن دېڭىز قىرغىقىنى بويلاپ دەل شەرق يۆنىلىشتىكى $12\,\text{km}$ كېلىدىغان جايدا بىر شەھەر بازىرى بار.



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

(1) بىر ئادەمنىڭ قولۋاق ھەيدەشتىكى ئوتتۇرىچە تېزلىكى $3\,\text{km/h}$، پىيادە مېڭىش تېزلىكى $5\,\text{km/h}$ بولسۇن، ئۇنىڭ ئارالدىن شەھەر بازىرىغا بېرىش ئۈچۈن سەرپ قىلغان ۋاقتى t (بىرلىكى: h) بىلەن، ئۇنىڭ دېڭىز قىرغىقىدىكى قولۋاق توختاتقان جايدىن P نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىق x (بىرلىكى: km) بىلەن ئىپادىلەنگەن بولسا، t نى x نىڭ فۇنكسىيىسى قىلىپ ئىپادىلەڭ؛

(2) ئەگەر قولۋاق P نۇقتىدىن $4\,\text{km}$ كېلىدىغان جايغا توختىتىلغان بولسا، ئارالدىن شەھەر بازىرىغا بېرىش ئۈچۈن كەتكەن ۋاقىتنى تېپىڭ ($1\,\text{h}$ قىچە ئېنىقلىقتا).

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

فۇنكسىيە ئۇقۇمىنىڭ تەرەققىيات جەريانى

17 ـ ئەسىردە، ئالىملار ئاسمان جىسىملىرىنىڭ ئورنىنى ھېسابلاش، يىراق مۇساپىلىك دېڭىز قاتنىشىدىكى مېرىدىئان ۋە پاراللېلنى ئۆلچەش، زەمبىرەك ئوقى تېزلىكىنىڭ ئوقنىڭ ئېگىزلىكى ۋە مۇساپىسىگە كۆرسىتىدىغان تەسىرىنى مۆلچەرلەش دېگەندەك ھەرىكەتكە دائىر مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلغان. ھالبۇكى، بۇنداق مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا ئىككى ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت ئۈستىدە ئىزدىنىش ھەمدە مۇشۇ مۇناسىۋەتكە ئاساسەن شەيئىلەرنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى ئۈستىدە ھۆكۈم چىقىرىشقا توغرا كېلەتتى، مانا بۇلار فۇنكسىيىنىڭ پەيدا بولۇشى ۋە تەرەققىي قىلىشىنىڭ ئارقا كۆرۈنۈشىدۇر.

«ئالگېبرا، دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرال بىلىملىرى ھەققىدە تەرمىلەر»

«function» سۆزىنى ئەڭ دەسلەپتە گېرمانىيىلىك ماتېماتىك لايبنىس (G.W.Leibniz (1646 ~ 1716 ـ يىللار) 1692 ـ يىلى ئىشلەتكەن. جۇڭگودا، چىڭ دەۋرىدىكى ماتېماتىكا ئالىمى لى شەنلەن (1811 ~ 1882 ـ يىللار) 1859 ـ يىلى ئەنگلىيىلىك دىن تارقاتقۇچى ۋېلىيالى بىلەن بىرلىشىپ تەرجىمە قىلغان «ئالگېبرا، دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرال بىلىملىرى ھەققىدە تەرمىلەر» دېگەن كىتابىدا «function» ئاتالغۇسىنى تۇنجى بولۇپ «函数» دەپ تەرجىمە قىلغان، بۇ ئاتالغۇ ئۇيغۇرچە «فۇنكسىيە» دەپ ئاھاڭدا تەرجىمە قىلىنىدۇ.

لايبنىس «فۇنكسىيە» ئارقىلىق ئەگرى سىزىقنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىدىغان گېئومېترىيىلىك مىقدارلارنى، مەسىلەن، كوئوردېنات، ئۇرۇنما قاتارلىقلارنى ئىپادىلىگەن. 1718 ـ يىلى لايبنىسنىڭ ئوقۇغۇچىسى شۋېتسارىيىلىك ماتېماتىك J . بېرنۇلى (J.Bernoulli، 1667 ~ 1748 ـ يىللار) فۇنكسىيىنىڭ فورمۇلا بىلەن ئىپادىلىنىشى كېرەكلىكىنى تەكىتلىگەن. كېيىنچە، ماتېماتىكلار بۇنى فۇنكسىيىگە ھۆكۈم قىلىشنىڭ ئۆلچىمى قىلىشقا بولمايدۇ، پەقەت بەزى ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار ئۆزگەرگەندە، باشقا بەزى ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار ئۇنىڭغا ئەگىشىپ ئۆزگەرسىلا، فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەت ھاسىل بولىۋېرىدۇ دەپ قارىغان. شۇڭا، 1755 ـ يىلى شۋېتسارىيىلىك ماتېماتىك ئېۋلېر (L.Euler، 1707 ~ 1783 ـ يىللار) فۇنكسىيىگە «ئەگەر بەزى ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار مەلۇم خىل شەكىل بويىچە باشقا بەزى مىقدارلارغا بېقىنسا، ئۇ ھالدا ئالدىدىكى ئۆزگەرگۈچى مىقدار كەينىدىكى ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ فۇنكسىيىسى دەپ ئاتىلىدۇ» دەپ ئېنىقلىما بەرگەن.

ئەينى ۋاقىتتا، نۇرغۇن ماتېماتىكلار فۇنكسىيىنىڭ فورمۇلا ئارقىلىق ئىپادىلەنمىگەنلىككە ئادەتلىنەلمىگەن، ھەتتا ئۇنىڭغا قارىتا گۇمانىي پوزىتسىيىدە بولغان. شۇڭا، ئۇ چاغلاردا فۇنكسىيە ئۇقۇمى يەنىلا بىرقەدەر مۇجمەل ئىدى.

دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال ئۈستىدىكى تەتقىقاتلارنىڭ چوڭقۇرلاپ بېرىشىغا ئەگىشىپ، 18 - ئەسىرنىڭ ئاخىرىدىن 19 - ئەسىرنىڭ بېشىغىچە بولغان ئارىلىقتا كىشىلەرنىڭ فۇنكسىيە ھەققىدىكى قارىشى ئالغا ئىلگىرىلىدى. گېرمانىيىلىك ماتېماتىك دىرىخلې (P.G.L.dirichlet، 1805 ~ 1859 - يىللار) 1837 - يىلى «ئەگەر x نىڭ ھەربىر قىممىتىگە نىسبەتەن، y نىڭ تامامەن ئېنىق بىر قىممىتى ھامان ئۇنىڭغا ماس كەلسە، ئۇ ھالدا y نى x نىڭ فۇنكسىيىسى دەپ ئاتايمىز» دېگەن ئېنىقلىمىنى ئوتتۇرىغا قويغان. بۇ ئېنىقلىما فۇنكسىيىنىڭ بىر قائىدە مەۋجۇت بولۇپ، بۇ قائىدىنىڭ فورمۇلا، گرافىك، جەدۋەل ياكى باشقا شەكىلدە بولۇشىدىن قەتئىينەزەر، x نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى ئىچىدىكى ھەربىر قىممەتكە بىر ئېنىق y ماس كەلسىلا بولىدۇ دېگەن خاس مەزمۇننى بىرقەدەر ئېنىق شەرھلەپ بېرىدۇ. 19 - ئەسىرنىڭ 70 - يىللىرىدىن كېيىن، توپلام ئۇقۇمىنىڭ بارلىققا كېلىشىگە ئەگىشىپ، فۇنكسىيە ئۇقۇمى تېخىمۇ مۇكەممەل بولغان توپلام ۋە ماسلىق تىللىرى بىلەن تەسۋىرلەندى، بۇ دەل بىز مۇشۇ پاراگرافتا ئۆگەنگەن فۇنكسىيە ئۇقۇمىدۇر.

يۇقىرىقىلاردىن ئومۇملاشتۇرۇپ شۇنى بىلەلەيمىزكى، فۇنكسىيە ئۇقۇمىنىڭ تەرەققىياتى ئىشلەپچىقىرىش، تۇرمۇش ۋە پەن - تېخنىكىنىڭ ئەمەلىي ئېھتىياجى بىلەن زىچ باغلىنىشلىق بولغان ھەمدە تەتقىقاتلارنىڭ چوڭقۇرلىشىشىغا ئەگىشىپ، فۇنكسىيە ئۇقۇمىنىڭ شەرھلىنىشىمۇ ئۈزلۈكسىز تۈردە مۇكەممەللەشكەن ۋە ئىنچىكىلەشكەن، بىزنىڭ فۇنكسىيىنى ئۆگىنىش جەريانىمىزمۇ دەل شۇنىڭغا ئوخشاش.

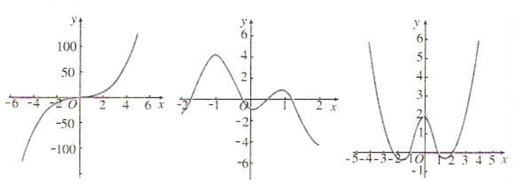
تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتىن تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپكىچە بولغان ئارىلىقتىكى فۇنكسىيە ئۇقۇمىنى ئۆگىنىش تەسىراتىڭىزنى فۇنكسىيە ئۇقۇمىنىڭ تەرەققىياتىنى ئارقا كۆرۈنۈش قىلغان ھالدا بايان قىلىپ بېرەلەمسىز؟

3-1 فۇنكسىيىنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيىتى

> شەيئىنىڭ ئۆزگىرىش جەريانىدا ئۆزگەرمەي ساقلىنىدىغان ئالاھىدىلىكى دەل مۇشۇ شەيئىنىڭ خۇسۇسىيىتى ھېسابلىنىدۇ.

فۇنكسىيە شەيئىلەرنىڭ ھەرىكەت - ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان ماتېماتىكىلىق مودېلدۇر. ئەگەر فۇنكسىيەنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى بىلىۋالساق، ئۇ ھالدا ماس شەيئەنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنىمۇ ئاساسىي جەھەتتىن بىلىۋالغان بولىمىز. شۇنىڭ ئۈچۈن، فۇنكسىيەنىڭ خۇسۇسىيەتلىرى، مەسىلەن، فۇنكسىيە قانداق ۋاقىتتا تەدرىجىي ئاشىدۇ ياكى تەدرىجىي كېمىيىدۇ، ئۇنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى ياكى ئەڭ كىچىك قىممىتى بارمۇ - يوق، فۇنكسىيە گرافىكى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە دېگەندەك مەسىلىلەرنى مۇھاكىمە قىلىش تولىمۇ مۇھىم.

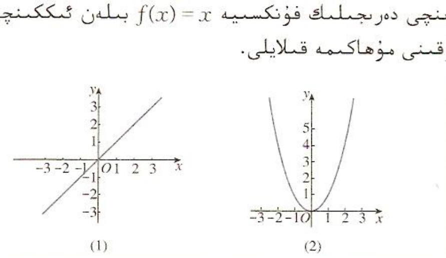
1.3.1 - رەسىمدىكى فۇنكسىيە گرافىكلىرىنى كۆزىتىپ، ھەربىر گرافىكنىڭ ماس فۇنكسىيىنىڭ قايسى ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى ئەكس ئەتتۈرگەنلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟



1.3.1 - رەسىم

1-3-1 مونوتونلۇق ۋە ئەڭ چوڭ (كىچىك) قىممەت

بىز ئالدى بىلەن بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=x$ بىلەن ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ نىڭ مونوتونلۇقىنى مۇھاكىمە قىلايلى.



2.3.1 - رەسىم

2.3.1 ـ رەسىمنى كۆزىتىپ شۇنى كۆرەلەيمىزكى:

فۇنكسىيە $f(x)=x$ نىڭ گرافىكى سولدىن ئوڭغا قاراپ ئۆرلەيدۇ؛ فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ نىڭ گرافىكى y ئوقىنىڭ سول تەرىپىدە تۆۋەنلەيدۇ، y ئوقىنىڭ ئوڭ تەرىپىدە ئۆرلەيدۇ. فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ «ئۆرلىشى» ۋە «تۆۋەنلىشى» فۇنكسىيىنىڭ بىر ئاساسىي خۇسۇسىيىتى ــ مونوتونلۇقىنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ. ئۇنداق بولسا، فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ «ئۆرلىشى» ۋە «تۆۋەنلىشى»نى قانداق تەسۋىرلەش كېرەك؟

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ نى مىسالغا ئېلىپ، x، y لەرنىڭ ماس قىممەتلىرىنى 3.1 ـ جەدۋەلدىكىدەك يېزىۋالىمىز.

3.1 ـ جەدۋەل

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$f(x)=x^2$	$\cdots$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	$\cdots$

2.3.1 ـ رەسىم (2) بىلەن 3.1 ـ جەدۋەلنى سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق بايقىيالايمىزكى:

گرافىك y ئوقىنىڭ سول تەرىپىدە «تۆۋەنلەيدۇ»، يەنى ماس $f(x)$ نىڭ قىممىتى ئىنتېرۋال $(-\infty, 0]$ دا x نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ كىچىكلەيدۇ؛ گرافىك y ئوقىنىڭ ئوڭ تەرىپىدە «ئۆرلەيدۇ»، يەنى ماس $f(x)$ نىڭ قىممىتى ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا x نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ چوڭىيىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

«ماس $f(x)$ نىڭ قىممىتى x نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ كىچىكلەيدۇ» ۋە «ماس $f(x)$ نىڭ قىممىتى x نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ چوڭىيىدۇ» نى فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادە $f(x)=x^2$ تىن پايدىلىنىپ قانداق تەسۋىرلەش كېرەك؟

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ قا نىسبەتەن، «ماس $f(x)$ نىڭ قىممىتى ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا x نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ چوڭىيىدۇ» دەپ بايان قىلالايمىز. ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا خالىغان x_1، x_2 لەرنى ئالغاندا، $f(x_1)=x_1^2$ ، $f(x_2)=x_2^2$ كېلىپ چىقسا، $x_1<x_2$ بولغاندا، $f(x_1)<f(x_2)$ بولىدۇ. بۇ چاغدا بىز فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ دەيمىز.

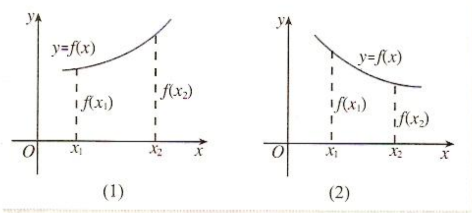
مۇشۇ بايانغا تەقلىد قىلىپ، فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ نىڭ ئىنتېرۋال $(-\infty, 0]$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

ئومۇمەن، $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى I دەپ پەرەز قىلايلى:

ئەگەر ئېنىقلىنىش ساھەسى I ئىچىدىكى مەلۇم ئىنتېرۋال D دا خالىغان ئىككى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممىتى x_1، x_2 گە نىسبەتەن، $x_1<x_2$ بولغاندا، ھامان $f(x_1)<f(x_2)$ بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال D دا **ئاشقۇچى فۇنكسىيە** (increasing function) بولىدۇ دەيمىز (3.3.1 ـ رەسىم (1) دىكىدەك)؛

ئەگەر ئېنىقلىنىش ساھەسى I ئىچىدىكى مەلۇم ئىنتېرۋال D دا خالىغان ئىككى ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممىتى x_1، x_2 گە نىسبەتەن، $x_1<x_2$ بولغاندا، ھامان $f(x_1)>f(x_2)$ بولسا، ئۇ ھالدا

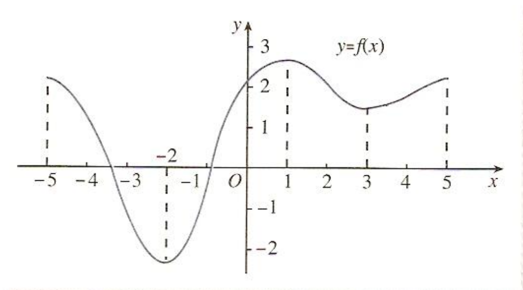
$f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال D دا **كېمەيگۈچى فۇنكسىيە** (decreasing function) بولىدۇ دەيمىز (3.3.1 ـ رەسىم (2) دىكىدەك).



3.3.1 ـ رەسىم

ئەگەر $y=f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال D دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولسا، ئۇ ھالدا $y=f(x)$ فۇنكسىيە بۇ ئىنتېرۋالدا (قەتئىي) مونوتونلۇققا ئىگە دەپ ئېيتىمىز ھەمدە ئىنتېرۋال D نى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالى دەپ ئاتايمىز.

1 ـ مىسال 4.3.1 ـ رەسىمدىكىسى ئىنتېرۋال $[-5, 5]$ تە ئېنىقلانغان $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى، گرافىكقا ئاساسەن فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى ھەمدە ئۇنىڭ ھەربىر مونوتونلۇق ئىنتېرۋالدا ئاشقۇچى فۇنكسىيە ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئېيتىپ بېرەيلى.



4.3.1 ـ رەسىم

يېشىش: $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالى $[-5, -2)$، $[-2, 1)$، $[1, 3)$، $[3, 5]$ بولۇپ، بۇ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[-5, -2)$، $[1, 3)$ لەردە كېمەيگۈچى فۇنكسىيە، ئىنتېرۋال $[-2, 1)$، $[3, 5]$ لەردە ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

2 ـ مىسال فىزىكىدىكى بويىل قانۇنى $p=\dfrac{k}{V}$ (k مۇسبەت تۇراقلىق سان) بىزگە شۇنى ئۇقتۇرىدۇكى، مۇقىم مىقداردىكى گازنىڭ ھەجمى V كىچىكلىگەندە، بېسىم p چوڭىيىدۇ. بۇ قانۇننى فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن پەقەت فۇنكسىيە $p=\dfrac{k}{V}$ نىڭ ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا كېمەيگۈچى ~~ئاشقۇچى~~ فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلىساقلا بولىدۇ.

ئىسپات: مونوتونلۇقنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، V_1، V_2 لەرنى ئېنىقلىنىش ساھەسى $(0, +\infty)$ دىكى خالىغان ئىككى ھەقىقىي سان ھەمدە $V_1 < V_2$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$p(V_1) - p(V_2) = \frac{k}{V_1} - \frac{k}{V_2} = k\frac{V_2 - V_1}{V_1V_2}.$$

$V_1, V_2 \in (0, +\infty)$ دىن $V_1V_2 > 0$ كېلىپ چىقىدۇ؛

$V_1 < V_2$ دىن $V_2 - V_1 > 0$ كېلىپ چىقىدۇ.

يەنە $k > 0$ بولغانلىقتىن،

$$p(V_1) - p(V_2) > 0,$$

يەنى

$$p(V_1) > p(V_2).$$

شۇڭا، فۇنكسىيە $p = \frac{k}{V}$، $V \in (0, +\infty)$ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا، ھەجىم V كىچىكلىگەندە، بېسىم p چوڭىيىدۇ.

ئىزدىنىش

تەتۈر تاناسپلىق فۇنكسىيە $y = \frac{1}{x}$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.

(1) بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى I نى تېپىڭ؛

(2) بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى I دىكى مونوتونلۇقى قانداق بولىدۇ؟ يەكۈنىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

گرافىكنى كۆزىتىش ئارقىلىق، ئاۋۋال فۇنكسىيىنىڭ مەلۇم خىل خۇسۇسىيەتكە ئىگە ياكى ئىگە ئەمەسلىكىنى قىياس قىلىش، ئاندىن لوگىكىلىق خۇلاسە چىقىرىش ئارقىلىق بۇ قىياسنىڭ توغرىلىقىنى ئىسپاتلاش فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىشتا دائىم قوللىنىلىدىغان ئۇسۇلدۇر.

بىز مۇشۇ پاراگرافتىكى 2.3.1 ـ رەسىمنى يېڭىۋاشتىن كۆزىتىپ، ئۇنىڭدىكى ئىككى فۇنكسىيە گرافىكىنى سېلىشتۇرساق، فۇنكسىيە $f(x) = x^2$ نىڭ گرافىكىدا بىر ئەڭ تۆۋەن نۇقتا بارلىقىنى، يەنى خالىغان $x \in \mathbf{R}$ غا نىسبەتەن ھامان $f(x) \geqslant f(0)$ بولىدىغانلىقىنى بايقايمىز. ئەگەر بىر $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىدا ئەڭ تۆۋەن نۇقتا بار بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ فۇنكسىيىنى ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە دەپ ئېيتىمىز. فۇنكسىيە $f(x) = x$ نىڭ گرافىكىدا ئەڭ تۆۋەن نۇقتا يوق، شۇڭا $f(x) = x$ فۇنكسىيە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە ئەمەس.

مۇلاھىزە؟

$f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتىنىڭ مەنىسىنى $f(x) = -x^2$ نى مىسال قىلىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

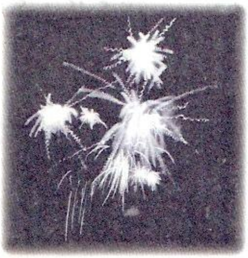
ئومۇمەن، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى I دەپ پەرەز قىلايلى. ئەگەر ھەقىقىي
سان M مەۋجۇت بولسا:

(1) خالىغان $x\in I$ گە نىسبەتەن ھامان $f(x)\leqslant M$ بولىدۇ؛

(2) $x_0\in I$ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە $f(x_0)=M$ بولىدۇ، دېگەن ئىككى شەرتنى قانائەتلەندۈرسە، ئۇ
ھالدا M نى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ **ئەڭ چوڭ قىممىتى** (maximum value) دەپ ئاتايمىز.

مۇلاھىزە ؟

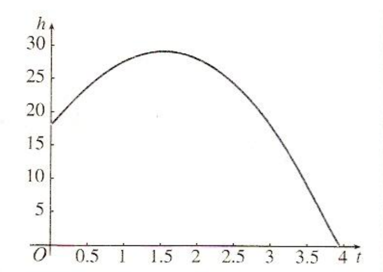
فۇنكسىيىنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا تەقلىد قىلىپ، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ **ئەڭ كىچىك
قىممىتى** (minimum value) گە ئېنىقلىما بېرەلەمسىز؟



3 ـ مىسال «جۇخارگۈلى» ماركىلىق رەڭلىك ئۇچقۇن چىقىرى-
دىغان پوجاڭزا ئەڭ ھەشەمەتلىك پوجاڭزىلارنىڭ بىرىدۇر. بۇ خىل پو-
جاڭزىنى ياسىغاندا ئۇنىڭ ئەڭ يۇقىرى نۇقتىغا يەتكەندە پارتلىشى ئو-
مىد قىلىنىدۇ. ئەگەر پوجاڭزىنىڭ يەر يۈزىدىن ئېگىزلىكى h m بىلەن
ۋاقىت t s ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت $h(t)=-4.9t^2+14.7t+18$ بول-
سا، ئۇ ھالدا پوجاڭزا ئېتىلىپ چىققاندىن كېيىنكى قايسى ۋاقىت ئۇ-
نىڭ پارتلىشىنىڭ ئەڭ ياخشى پەيتى بولىدۇ؟ بۇ چاغدا پوجاڭزىنىڭ
يەردىن ئېگىزلىكى قانچىلىك بولىدۇ (1m غىچە ئېنىقلىقتا)؟

يېشىش: فۇنكسىيە $h(t)=-4.9t^2+14.7t+18$ نىڭ گرافىكىنى سىزىمىز (5.3.1 ـ رەسىم)،
روشەنكى، فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ چوققىسى پوجاڭزىنىڭ ئەڭ يۇقىرى ئۆرلەش نۇقتىسى، چوققىنىڭ
ئابسىسساسى پوجاڭزا پارتلىشىنىڭ ئەڭ ياخشى پەيتى، چوققىنىڭ ئوردىناتى بولسا مۇشۇ چاغدىكى پو-
جاڭزىنىڭ يەردىن ئېگىزلىكى بولىدۇ.

پوجاڭزا ئېتىشتىكى ئەڭ
ياخشى ئۈنۈمگە ئېرىشىش ئۇ-
چۈن، رەڭلىك ئۇچقۇن چىقى-
رىدىغان پوجاڭزىنى لايىھىلە-
گۈچىلەر پىلتىنىڭ ئۇزۇنلۇ-
قىنى مۇشۇ سانلىق مەلۇ-
ماتلارغا ئاساسەن بېكىتىدۇ.



5.3.1 ـ رەسىم

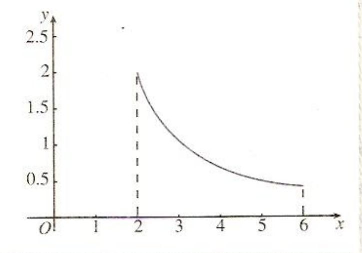
ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىگە دائىر بىلىملەردىن، فۇنكسىيە $h(t)=-4.9t^2+14.7t+18$ گە
نىسبەتەن تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$t=-\dfrac{14.7}{2\times(-4.9)}=1.5$ بولغاندا، فۇنكسىيە ئەڭ چوڭ قىممەتكە ئىگە بولىدۇ، يەنى

$$h=\frac{4\times(-4.9)\times18-14.7^2}{4\times(-4.9)}\approx 29.$$

شۇنىڭ بىلەن، پوجاڭزا ئېتىلىپ چىقىپ 1.5s ئۆتكەندە پارتلىسا، بۇ ئۇنىڭ پارتلىشىنىڭ ئەڭ ياخشى پەيتى بولىدۇ. بۇ چاغدا پوجاڭزىنىڭ يەردىن ئېگىزلىكى تەخمىنەن 29m بولىدۇ.

4 ـ مىسال فۇنكسىيە $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ($x\in[2, 6]$) بېرىلگەن، بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى بىلەن ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تاپايلى.



6.3.1 ـ رەسىم

تەھلىل: فۇنكسىيە $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ($x\in[2, 6]$) نىڭ گرافىكى (6.3.1 ـ رەسىم) دىن ئۇنىڭ ئىنتېرۋال [2, 6] دە تەدرىجىي كېمىيىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز. شۇڭا، فۇنكسىيە $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ئىنتېرۋال [2, 6] نىڭ ئىككى ئۇچىدا ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا ئەڭ چوڭ قىممەت ۋە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە بولىدۇ.

يېشىش: x_1، x_2 نى ئىنتېرۋال [2, 6] دىكى خالىغان ئىككى ھەقىقىي سان ھەمدە $x_1<x_2$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\frac{2}{x_1-1}-\frac{2}{x_2-1}\\&=\frac{2[(x_2-1)-(x_1-1)]}{(x_1-1)(x_2-1)}\\&=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}.\end{aligned}$$

$2\leqslant x_1<x_2\leqslant 6$ دىن $x_2-x_1>0$، $(x_1-1)(x_2-1)>0$ كېلىپ چىقىدۇ، شۇنىڭ بىلەن

$$f(x_1)-f(x_2)>0$$

بولىدۇ، يەنى

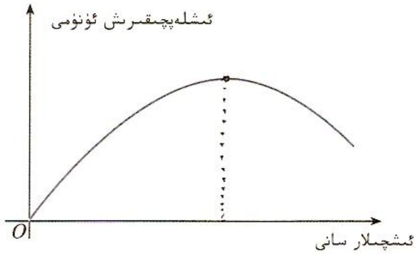
$$f(x_1)>f(x_2).$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، $f(x)=\frac{2}{x-1}$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال [2, 6] دە كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

شۇڭا، $f(x)=\frac{2}{x-1}$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال [2, 6] نىڭ ئىككى ئۇچىدا ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا ئەڭ چوڭ قىممەت ۋە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە بولىدۇ، يەنى $x=2$ بولغاندا ئەڭ چوڭ قىممەت 2 گە، $x=6$ بولغاندا ئەڭ كىچىك قىممەت 0.4 كە ئىگە بولىدۇ.

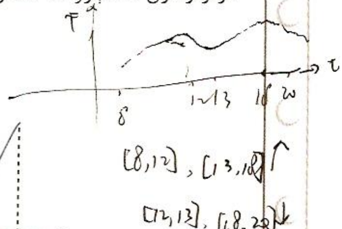
مەشىق

1. تۆۋەندىكى رەسىمگە ئاساسەن، مەلۇم قوراشتۇرۇش لىنىيىسىنىڭ ئىشلەپچىقىرىش ئۈنۈمى بىلەن لىنىيىدىكى ئىشچىلار سانى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى تەسۋىرلەڭ.

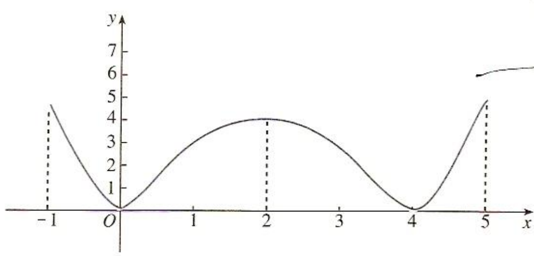


(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. چۈشتىن بۇرۇن (8:00 ~ 12:00) ھاۋا بارا ـ بارا ئىسسىدى، چۈش (12:00 ~ 13:00) تە بوران ـ چاپقۇن چىقىپ، ھاۋا بىردىنلا سوۋۇپ كەتتى. بوران ـ چاپقۇندىن كېيىن ھاۋا يەنە ئىسسىپ، كۈن پاتقاندا (18:00) سوۋۇشقا باشلىدى. مۇشۇ بىر كۈننىڭ 8:00 ~ 20:00 ئارىلىقتىكى تېمپېراتۇرىسىنى ۋاقىتنىڭ فۇنكسىيىسى دەپ قارىغاندىكى مۇمكىن بولغان بىر گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە گرافىكى سىزىلغان بۇ فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى ئېيتىپ بېرىڭ.



3. تۆۋەندىكى رەسىمگە ئاساسەن، فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى ھەمدە بۇ فۇنكسىيىنىڭ ھەربىر مونوتونلۇق ئىنتېرۋالدا ئاشقۇچى فۇنكسىيە ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئېيتىپ بېرىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. $f(x) = -2x+1$ فۇنكسىيىنىڭ $\mathbf{R}$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

5. $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-6, 11]$ دە ئېنىقلانغان فۇنكسىيە بولسۇن. ئەگەر $f(x)$ ئىنتېرۋال $[-6, -2]$ دە تەدرىجىي كېمىيىپ، ئىنتېرۋال $[-2, 11]$ دە تەدرىجىي ئاشسا، ئۇنىڭ تەخمىنىي گرافىكىنى سىزىڭ، گرافىكتىن $f(-2)$ نىڭ $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ بىر ________ ئىكەنلىكىنى بايقاشقا بولىدۇ.

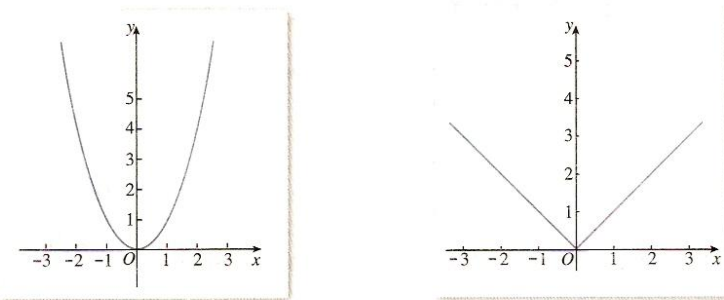
2-3-1 جۈپ ـ تاقلىق

كۆزىتىش

7.3.1 ـ رەسىمنى كۆزىتىپ، تۆۋەندىكى ئىككى مەسىلە ئۈستىدە پىكىر يۈرگۈزەيلى ھەمدە مۇزاكىرە قىلايلى:

(1) بۇ ئىككى فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىكى بار؟

(2) بۇ ئالاھىدىلىكلەر ماس ئىككى فۇنكسىيە قىممەتلىرى جەدۋىلىدە قانداق ئىپادىلەنگەن؟



7.3.1 ـ رەسىم

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

كۆرەلەيمىزكى، بۇ ئىككى فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى y ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ بۇ ئالاھىدىلىكىنى ئۇنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىدىن پايدىلىنىپ قانداق تەسۋىرلەش كېرەك؟

فۇنكسىيە قىممەتلىرى جەدۋىلىدىن كۆرۈشكە بولىدۇكى، ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x بىر جۈپ قارىمۇقارشى ساننى ئالغاندا، ماس ئىككى فۇنكسىيە قىممىتى ئۆز ئارا تەڭ بولىدۇ.

مەسىلەن، $f(x)=x^2$ قا نىسبەتەن مۇنداق بولىدۇ:

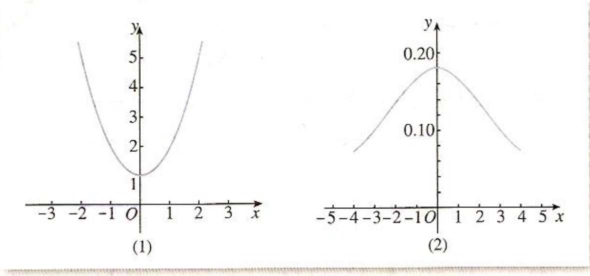
$$f(-3)=9=f(3);$$
$$f(-2)=4=f(2);$$
$$f(-1)=1=f(1).$$

ئەمەلىيەتتە، $\mathbf{R}$ دىكى خالىغان بىر x كە نىسبەتەن ھامان $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ بولىدۇ. بۇ چاغدا بىز $f(x)$ نى جۈپ فۇنكسىيە دەپ ئاتايمىز.

مۇشۇ جەريانغا تەقلىد قىلىپ، فۇنكسىيە $f(x)=|x|$ نىڭمۇ جۈپ فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ.

ئومۇمەن، ئەگەر $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى خالىغان بىر x كە نىسبەتەن ھامان $f(-x)=f(x)$ بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ فۇنكسىيە **جۈپ فۇنكسىيە** (even function) دەپ ئاتىلىدۇ.

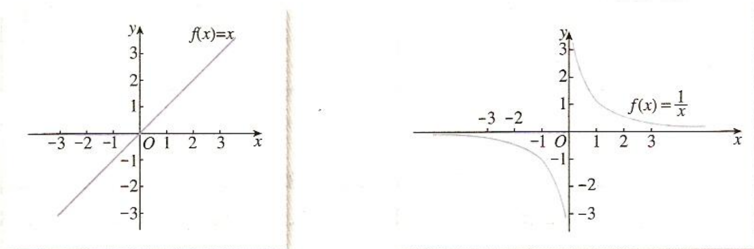
مەسىلەن، فۇنكسىيە $f(x)=x^2+1$، $f(x)=\dfrac{2}{x^2+11}$ لەر جۈپ فۇنكسىيە بولۇپ، ئۇلارنىڭ گرافىكى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا 8.3.1 ـ رەسىم (1) ۋە (2) دىكىدەك بولىدۇ.



8.3.1 ـ رەسىم

كۆزىتىش

فۇنكسىيە $f(x)=x$ بىلەن $f(x)=\dfrac{1}{x}$ نىڭ گرافىكلىرى (9.3.1 ـ رەسىم) نى كۆزىتىڭ ھەمدە تۆۋەندىكى ئىككى فۇنكسىيە قىممەتلىرىگە ماس جەدۋەلنى تاماملاڭ، بۇ ئىككى فۇنكسىيىنىڭ قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىككە ئىگە ئىكەنلىكىنى بايقىيالامسىز؟



9.3.1 ـ رەسىم

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x$				0			

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=\frac{1}{x}$				/			

كۆرەلەيمىزكى، بۇ ئىككى فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ. فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ بۇ ئالاھىدىلىكىنى ئۇنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىدە ئەكس ئەتتۇرسەك:

ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x بىر جۈپ قارىمۇقارشى ساننى ئالغاندا، ماس فۇنكسىيە قىممىتى

$f(x)$ مۇ بىر جۈپ قارىمۇقارشى سان بولىدۇ.

مەسىلەن، فۇنكسىيە $f(x)=x$ كە نىسبەتەن مۇنداق بولىدۇ:

$$f(-3)=-3=-f(3);$$
$$f(-2)=-2=-f(2);$$
$$f(-1)=-1=-f(1).$$

ئەمەلىيەتتە، $f(x)=x$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\mathbf{R}$ دىكى خالىغان بىر x كە نىسبەتەن ھامان $f(-x)=-x=-f(x)$ بولىدۇ. بۇ چاغدا بىز $f(x)=x$ فۇنكسىيىنى تاق فۇنكسىيە دەيمىز.

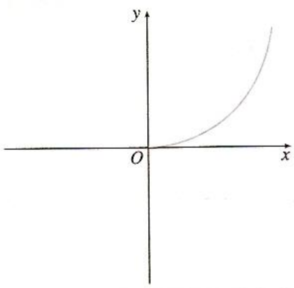
مۇشۇ جەريانغا تەقلىد قىلىپ، فۇنكسىيە $f(x)=\frac{1}{x}$ نىڭمۇ تاق فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ.

ئومۇمەن، ئەگەر $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى خالىغان بىر x كە نىسبەتەن ھامان $f(-x)=-f(x)$ بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ فۇنكسىيە **تاق فۇنكسىيە** (odd function) دەپ ئاتىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

(1) $f(x)=x^3+x$ فۇنكسىيىنىڭ جۈپ ـ تاقلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

(2) ئەگەر 10.3.1 ـ رەسىمدىكى $f(x)=x^3+x$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنىڭ بىر قىسمى بولسا، $f(x)$ نىڭ جۈپ ـ تاقلىقىغا ئاساسەن ئۇنىڭ y ئوقىنىڭ سول تەرىپىدىكى گرافىكنى سىزىپ چىقالامسىز؟



10.3.1 ـ رەسىم

5 ـ مىسال تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ جۈپ ـ تاقلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) $f(x)=x^4;$ (2) $f(x)=x^5;$

(3) $f(x)=x+\frac{1}{x};$ (4) $f(x)=\frac{1}{x^2}.$

يېشىش: (1) $f(x)=x^4$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $(-\infty, +\infty)$ بولىدۇ.

ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى ھەربىر x كە نىسبەتەن ھامان

$$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$$

بولىدىغانلىقتىن، $f(x)=x^4$ فۇنكسىيە جۈپ فۇنكسىيە بولىدۇ.

(2) $f(x)=x^5$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $(-\infty, +\infty)$ بولىدۇ.

ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى ھەربىر x كە نىسبەتەن ھامان

$$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$$

بولىدىغانلىقتىن، $f(x)=x^5$ فۇنكسىيە تاق فۇنكسىيە بولىدۇ.

(3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\{x|x\neq 0\}$ بولىدۇ.

ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى ھەربىر x كە نىسبەتەن ھامان

$$f(-x) = -x+\frac{1}{-x} = -\left(x+\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

بولىدىغانلىقتىن، $f(x)=x+\frac{1}{x}$ فۇنكسىيە تاق فۇنكسىيە بولىدۇ.

(4) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\{x|x\neq 0\}$ بولىدۇ.

ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى ھەربىر x كە نىسبەتەن ھامان

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$$

بولىدىغانلىقتىن، $f(x)=\frac{1}{x^2}$ فۇنكسىيە جۈپ فۇنكسىيە بولىدۇ.

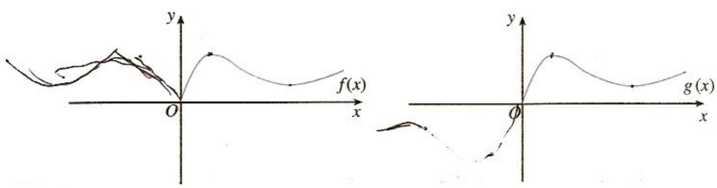
مەشىق

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ جۈپ ـ تاقلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $f(x)=2x^4+3x^2$;　　(2) $f(x)=x^3-2x$;

(3) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$;　　(4) $f(x)=x^2+1$.

2. $f(x)$ نىڭ جۈپ فۇنكسىيە، $g(x)$ نىڭ تاق فۇنكسىيە ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى گرافىكلارنى تولۇقلاپ سىزىڭ.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

ئۇچۇر تېخنىكسىنىڭ قوللىنىلىشى

فۇنكسىيە گرافىكىنى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ سىزىش

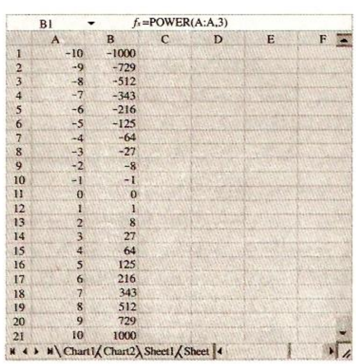
ھەر خىل فۇنكسىيە گرافىكلىرىنى كومپيۇتېر يۇمشاق دېتالىدىن پايدىلىنىپ ئەپچىل ھەم تېز سىزىپ چىققىلى بولىدۇ. فۇنكسىيە گرافىكىنى ئوخشاش بولمىغان كومپيۇتېر يۇمشاق دېتاللىرىدىن پايدىلىنىپ سىزغاندىكى كونكرېت مەشغۇلاتلار ئوخشاش بولمىسىمۇ، ئەمما ئۇلارنىڭ ھەممىسى بىز پىششىق بىلىدىغان ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا قىممەت بېرىش، ھېسابلاش قائىدىسى بويىچە ماس فۇنكسىيە قىممەتلىرىنى ھېسابلاپ چىقىش، بۇ ماس قىممەتلەرگە ئاساسەن بىر قاتار نۇقتىنى ھاسىل قىلىش، بۇ نۇقتىلارنى تۇتاشتۇرۇپ، فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىپ چىقىشتىن ئىبارەت نۇقتا تەسۋىرلەپ گرافىك سىزىش ئۇسۇلى ئاساسىدا ئېلىپ بېرىلىدۇ. تۆۋەندە فۇنكسىيە گرافىكىنى كومپيۇتېر يۇمشاق دېتالىدىن پايدىلىنىپ سىزىش ئۇسۇلى Excel ۋە «گېئومېتىرىيىلىك سىزىش تاختىسى (几何画板)» نى مىسال قىلىش ئارقىلىق تونۇشتۇرۇلىدۇ.

1. فۇنكسىيە $y=x^3$ نىڭ گرافىكىنى «Excel» دىن پايدىلىنىپ سىزىش

(1) Excel نى ئېچىپ، A ئىستونغا ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ قىممەتلىرىنى كىرگۈزىمىز؛

(2) نۇر بەلگىسىنى B ئىستونغا يۆتكەپ كېلىپ، تەھرىرلەش رامكىسى (编辑框) غا ھېسابلاش قائىدىسى «=POWER (A: A, 3)» نى كىرگۈزىمىز، ئاندىن قايتۇرۇش (CR) نى ئىجرا قىلىپ، B ئىستوندا ماس فۇنكسىيە قىممەتلىرىنى ھاسىل قىلىمىز (1 - رەسىمدىكىدەك)؛

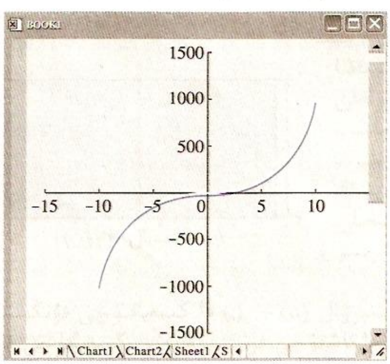
(3) سانلىق مەلۇمات رايونى (数据区域) دىن A، B ئىستونلارنى تاللاپ، «قىستۇرۇش ← جەدۋەل - گرافىك (插入→图表)» بۇيرۇقىنى ئىجرا قىلىمىز، «جەدۋەل - گرافىك تىپلىرى (图表类型)» دىن «XY تارقاق نۇقتىلار گرافىكى (XY 散点图)»نى تاللاپ، ئېھتىياجغا ئاساسەن «تارماق جەدۋەل - گرافىك تىپلىرى (子图表类型)» ئىچىدىن بىرىنى تاللايمىز. ئاندىن دىئالوگ رامكىسى (对话框) دىكى كۆرسەتمىلەر بويىچە گرافىك سىزىش مەشغۇلاتىنى تاماملىساق، فۇنكسىيە $y=x^3$ نىڭ 2 - رەسىمدىكىدەك گرافىكىغا ئېرىشىمىز.


B1 fx =POWER(A:A,3)

	A	B	C	D	E	F
1	-10	-1000				
2	-9	-729				
3	-8	-512				
4	-7	-343				
5	-6	-216				
6	-5	-125				
7	-4	-64				
8	-3	-27				
9	-2	-8				
10	-1	-1				
11	0	0				
12	1	1				
13	2	8				
14	3	27				
15	4	64				
16	5	125				
17	6	216				
18	7	343				
19	8	512				
20	9	729				
21	10	1000				

Chart1 Chart2 Sheet1 Sheet

1 - رەسىم

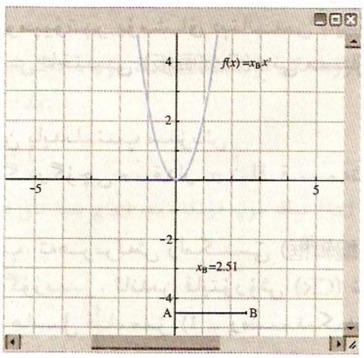


2 - رەسىم

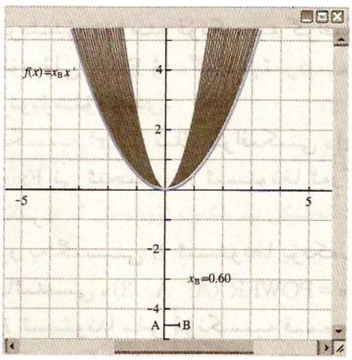
2. فۇنكسىيە $y=bx^2$ $(b \neq 0)$ نىڭ گرافىكىنى «گېئومېتىرىيىلىك سىزىش تاختىسى» دىن پايدىلىنىپ سىزىش

(1) گېئومېتىرىيىلىك سىزىش تاختىسىنى ئېچىپ، «قۇرۇش / پاراللېل سىزىق (构造/平行线)» ۋە «قۇرۇش / كېسىك (构造/线段)» نى ئىجرا قىلىش ئارقىلىق x ئوقىغا پاراللېل بولغان AB كېسىكنى ھاسىل قىلىمىز ھەمدە A نۇقتىنى y ئوقىغا مۇقىملاشتۇرۇپ، B نى ھەرىكەتچان نۇقتا قىلىۋالىمىز. B نۇقتىنى تاللاپ، «ئۆلچەش / ئابسىسسا (度量/横坐标)» نى ئىجرا قىلساق، سىزىش تاختىسىدا كۆرۈنگەن B نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى x_B دەل پارامېتىر b نىڭ قىممىتى بولىدۇ.

(2) «جەدۋەل ـ گرافىك / يېڭى فۇنكسىيە بەرپا قىلىش (图表/新建函数)» نى ئىجرا قىلىپ، دىئالوگ رامكىسىغا فۇنكسىيە ئىپادىسى «$x_B * x \wedge 2$» نى كىرگۈزىمىز، ئاندىن «جەدۋەل ـ گرافىك / يېڭى فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىش (图表/绘制新函数)» نى ئىجرا قىلساق، فۇنكسىينىڭ 3 ـ رەسىمدىكىدەك گرافىكى ھاسىل بولىدۇ.



3 ـ رەسىم



4 ـ رەسىم

B نۇقتىنىڭ ئورنىنى ئوڭ ـ سولغا يۆتكىسەك، فۇنكسىيە $y=bx^2$ $(b \neq 0)$ خۇددى 4 ـ رەسىمدىكىدەك «ھەرىكەت» لىنىدۇ. ئەگەر شارائىت يار بەرسە، فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ نىڭ گرافىكىنى سىزىپ، a، b، c كوئېففىتسېنتلارنىڭ فۇنكسىيە گرافىكىغا كۆرسىتىدىغان تەسىرى ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرسىڭىز بولىدۇ.

3.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ، ئاندىن گرافىكقا ئاساسەن $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى ھەمدە ھەربىر مونوتونلۇق ئىنتېرۋالدا $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئاشقۇچى فۇنكسىيە ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئېيتىپ بېرىڭ.

(1) $y=x^2-5x-6$;　　(2) $y=9-x^2$.

2. ئىسپاتلاڭ:

(1) $f(x)=x^2+1$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $(-\infty, 0)$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(2) $f(x)=1-\frac{1}{x}$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $(-\infty, 0)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

3. بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=mx+b$ $(x \in \mathbf{R})$ نىڭ مونوتونلۇقى ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرۈڭ ھەمدە يەكۈنىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

4. يۈرەك رىتمى تېزلەپ كېتىش كېسىلىگە گىرىپتار بولغان بىر ئادەم مەلۇم خىل دورىنى ئىچكەندىن كېيىن يۈرەك رىتمى دەرھاللا ئاستىلىغان، ئەمما دورا كۈچىنىڭ يېنىشىغا ئەگىشىپ، ئۇنىڭ يۈرەك رىتمى يەنە ئاستا ـ ئاستا ئۆرلىگەن. دورا ئىچكەن پەيتتىن باشلاپ، يۈرەك رىتمىنىڭ ۋاقىتقا دائىر مۇمكىن بولغان گرافىكى (سخېمىسى) نى سىزىڭ.

5. مەلۇم ئاپتوموبىل ئىجارىگە بېرىش شىركىتىنىڭ ئايلىق پايدىسى y يۈەن بىلەن ھەربىر ئاپتوموبىلنىڭ ئايلىق ئىجارە ھەققى x يۈەن ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت $y=-\frac{x^2}{50}+162x-21000$ بولسا، ھەربىر ئاپتوموبىلنىڭ ئايلىق ئىجارە ھەققى قانچە يۈەن بولغاندا، بۇ شىركەتنىڭ ئايلىق پايدىسى ئەڭ كۆپ بولىدۇ؟ ئەڭ كۆپ ئايلىق پايدىسى قانچە يۈەن؟

$x=4050$ 元　$y=307050$ 元

6. $f(x)$ $\mathbf{R}$ نىڭ دا ئېنىقلانغان تاق فۇنكسىيە ئىكەنلىكى ھەمدە $x \geqslant 0$ بولغاندا، $f(x)=x(1+x)$ بولىدىغانلىقى بېرىلگەن، $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى تېپىڭ.

$$f(x)=\begin{cases} x(1+x) & x \geq 0 \\ x(1-x) & x<0 \end{cases}$$

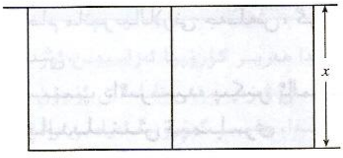
B گۇرۇپپا

1. فۇنكسىيە $f(x)=x^2-2x$، $g(x)=x^2-2x$ $(x \in [2, 4])$ لەر بېرىلگەن.

(1) $f(x)$، $g(x)$ لەرنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋاللىرىنى تېپىڭ؛

(2) $f(x)$، $g(x)$ لەرنىڭ ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ.

2. رەسىمدىكىدەك، ھايۋانات باغچىسى مۇشۇكئېيىقىغا بىر تەرىپى تامغا يۆلەنگەن ھەمدە يەر مەيدانى تەڭ بولغان ئىككى تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك ئىگىز ئۆي سېلىپ بەرمەكچى. ئەگەر ئۆينىڭ تېمىغا ئىشلىتىلىدىغان ماتېرىيالنىڭ ئومۇمىي ئۇزۇنلۇقى 30m بولسا، ئۇ ھالدا ئۆينىڭ كەڭلىكى x (بىرلىكى: m) قانچىلىك بولغاندا سېلىنغان ھەربىر ئۆينىڭ يەر مەيدانى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟ ھەربىر ئۆينىڭ ئەڭ چوڭ يەر مەيدانى قانچىلىك بولىدۇ؟



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ جۈپ فۇنكسىيە ھەمدە ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $f(x)$ نىڭ ئىنتېرۋال $(-\infty, 0)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە ھۆكۈمىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

17 ـ ئەسىردە يېقىنقى زامان ماتېماتىكىسى مەيدانغا كەلگەندىن بۇيان، فۇنكسىيە ئۇقۇمى ماتېماتىكىدا باشتىن ـ ئاخىر يادرولۇق ئورۇندا تۇرۇپ كەلدى. ماتېماتىكا ۋە ئىلىم ـ پەننىڭ زور كۆپ قىسمى فۇنكسىيىگە دائىر مەزمۇنلار بىلەن باغلىنىشلىق بولىدۇ. ماتېماتىكا، فىزىكا ۋە باشقا پەنلەردە، فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەتنى ھەممىلا يەردە دېگۈدەك ئۇچراتقىلى بولىدۇ. مەسىلەن، سىلىندىرنىڭ ھەجمى ۋە سىرتقى يۈزى ئۇنىڭ رادىئۇسىنىڭ فۇنكسىيىسى، ئاقار جىسىمنىڭ كېڭەيگەن ھەجمى تېمپېراتۇرىنىڭ فۇنكسىيىسى، ھەرىكەت قىلىۋاتقان جىسىمنىڭ مۇساپىسى ۋاقىتنىڭ فۇنكسىيىسى ۋە باشقىلار.

ئەگەر كۆڭۈل قويۇپ توپلىساق، كەڭ دائىرىدە ئوقۇساق ۋە ئىنچىكىلىك بىلەن كۆزەتسەك، ئۇ ھالدا نۇرغۇن كىتاب ۋە تور بەتلىرىدىن فۇنكسىيە توغرىسىدىكى تونۇشتۇرۇشلارنى، شۇنداقلا تۇرمۇشتىمۇ فۇنكسىيىنىڭ قوللىنىلىشىغا دائىر نۇرغۇن ئەمەلىي مىساللارنى بايقىيالايمىز.

تۆۋەندىكى تەكلىپلەر ھەمدە تەمىن ئېتىلگەن پايدىلىنىش تېمىلىرى ۋە يوللارغا ئاساسلىنىپ، فۇنكسىيىنىڭ تەرەققىيات جەريانى ۋە ئۇنىڭ كەڭ قوللىنىلىشىنى ئۆزىڭىز ئىگىلەپ كۆرۈڭ.

I پراكتىكا مەقسىتى

1. فۇنكسىيىنىڭ شەكىللىنىش ۋە تەرەققىي قىلىش تارىخىنى بىلىش.
2. ھەمكارلىشىپ ئۆگىنىش شەكلىنى باشتىن كەچۈرۈش.

II مەشغۇلات ھەققىدە تەكلىپ

1. تېما تاللاش، شەخس قىزىقىشلىرى ئاساسىدا پراكتىكا تاپشۇرۇقىنىڭ تېما دائىرىسىنى بېكىتىش.
2. گۇرۇپپىغا بۆلۈنۈش، 3 ~ 6 ئوقۇغۇچى بىر پراكتىكا گۇرۇپپىسى بولۇپ تەشكىللىنىپ، بىر ئوقۇغۇچىنى گۇرۇپپا باشلىقى قىلىش.
3. ۋەزىپە تەقسىم قىلىش، ھەربىر ئوقۇغۇچىنىڭ كونكرېت ئەھۋالى ۋە ئارتۇقچىلىقىنى ئويلاشقان ھالدا، گۇرۇپپىدا كېڭىشىش ئۆتكۈزگەندىن كېيىن، گۇرۇپپا باشلىقى ھەربىر ئوقۇغۇچىنىڭ كونكرېت ۋەزىپىسىنى بەلگىلەش.
4. ماتېرىيال توپلاش، كونكرېت پراكتىكا تېمىسىنى چىقىش قىلغان ھالدا، ھەر خىل ئۇسۇل ـ شەكىللەر ئارقىلىق خام ماتېرىياللار، جۈملىدىن يازما ماتېرىيال، سۈرەت، سانلىق مەلۇمات ۋە ئۈن ـ سىن ماتېرىياللىرىنى توپلاپ ئالاقىدار ماتېرىياللارنى خاتىرىلىۋېلىش.
5. خام ماتېرىياللارنى جەملەش، گۇرۇپپىنىڭ پراكتىكا نەتىجىسىنى پراكتىكا دوكلاتى شەكلىدە نامايان قىلىش.
6. سىنىپ دائىرىسىدە پىكىر ئالماشتۇرۇش، مۇزاكىرە قىلىش ۋە خۇلاسىلەش.

III پايدىلىنىش تېمىلىرى

1. فۇنكسىيىنىڭ بارلىققا كېلىشىنىڭ جەمئىيەت ئارقا كۆرۈنۈشى.
2. فۇنكسىيە ئۇقۇمى تەرەققىياتىنىڭ تارىخىي جەريانى.
3. فۇنكسىيە بەلگىسى ھەققىدە ھېكايە.
4. ماتېماتىكلار ۋە فۇنكسىيە.

نۇرغۇن ماتېماتىكلار، مەسىلەن، كوپلېر، گالىلېي، دېكارت، نيۇتون، لايبنىس ۋە ئېۋلېر قاتارلىق ماتېماتىكلار فۇنكسىيىنىڭ مۇكەممەللىشىشى ئۈچۈن تۆھپە قوشقان. بىر ياكى بىرقانچە ماتېماتىكنى تاللاپ، ئۇلارنىڭ فۇنكسىيىنىڭ تەرەققىياتى ئۈچۈن قوشقان تۆھپىلىرىنى چۈشەندۈرۈپ، ماتېماتىكىلىق روھنى ھېس قىلىش.

ساۋاقداشلار گۇرۇپپا پراكتىكا تاپشۇرۇقىنىڭ تېمىسى ئۈچۈن يۇقىرىقى تېمىلارنىڭ بىرىنى تاللىۋالسا ياكى ئۆزىنىڭ تېمىسىنى ئىشلەتسىمۇ بولىۋېرىدۇ.

Ⅳ پايدىلىنىش يوللىرى

1. ئالاقىدار كىتابلار

لياڭ زۇڭجۇ: «دۇنيا ماتېماتىكىسىنىڭ ئومۇمىي تارىخى»، لياۋنىڭ مائارىپ نەشرىياتى.

ۋۇ ۋېنجۈن: «دۇنيادىكى مەشھۇر ئالىملارنىڭ تەرجىمىھالى»، ئىلىم ـ پەن نەشرىياتى.

گوندائىراكېن ئىچىرو (ياپونىيە) «فۇنكسىيە يېڭىدىن تىزىلدى»، ئىلىم ـ پەن نەشرىياتى.

2. ئالاقىدار تور بېتى

www.pep.com.cn

Ⅴ پراكتىكا دوكلاتىنىڭ پايدىلىنىش شەكلى

تۆۋەندىكى پراكتىكا دوكلاتىنىڭ شەكلىدىن پايدىلىنىپ، بىر پراكتىكا دوكلاتىنى لايىھىلەپ چىقىش.

پراكتىكا دوكلاتى

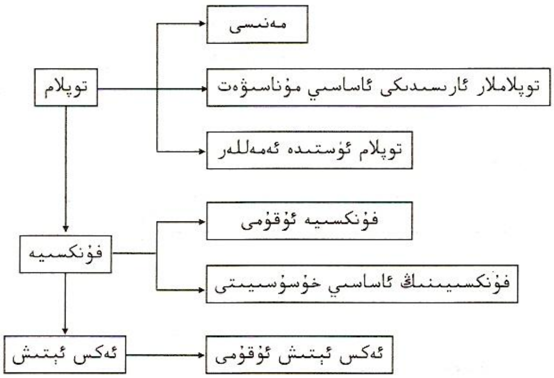
ـ يىل ـ ئاينىڭ ـ كۈنى

تېما	
تېكست	
ئىزاھات	
گۇرۇپپا باشلىقى ۋە ئەزالار	
يېتەكچى ئوقۇتقۇچىنىڭ تەكشۈرۈش پىكرى	

ھەمكارلىشىپ ئۆگىنىش بىر خىل ئۆگىنىش ئۇسۇلى بولۇپ، بۇ ئۇسۇلدا ھەربىر گۇرۇپپا ئەزاسىدىن ئورتاق ئۆگىنىش نىشانى ئۈچۈن ئۆز ئارتۇقچىلىقىنى جارى قىلدۇرۇش ۋە ئورتاق ئۆگىنىش ۋەزىپىسىنى تاماملاش ئۈچۈن ئۆز تۆھپىسىنى ئايىماي قوشۇش تەلەپ قىلىنىدۇ. ھەمكارلىشىپ ئۆگىنىش جەريانىدا، ھەربىر گۇرۇپپا ئەزاسى باشقا ئەزالار بىلەن ئۆزئارا ماسلىشىش ۋە ئۆزئارا ياردەملىشىشكە دىققەت قىلىپ، ھەم ئۆزىنىڭ قاراشلىرىنى پائال ئوتتۇرىغا قويالايدىغان بولۇشى، ھەم باشقىلارنىڭ ئوي ـ پىكرى ۋە تەكلىپلىرىنى ئاڭلاشقىمۇ ماھىر بولۇشى كېرەك. مۇشۇنداق قىلغاندا، كۆپچىلىك باشقىلارنىڭ ئارتۇقچىلىقىنى قوبۇل قىلىپ، ئۆزىنىڭ يېتەرسىز تەرەپلىرىنى تۈزىتىۋېلىش پۇرسىتىگە ئىگە بولىدۇ ـ دە، مۇزاكىرە قىلىپ پىكىر ئالماشتۇرۇش داۋامىدا ئىدىيىسىدە ئويغىنىش ھاسىل قىلىپ، مەسىلىنى ھەل قىلىشتىكى ئەڭ ياخشى لايىھەگە ئېرىشەلەيدۇ.

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. توپلام تىلى ھازىرقى زامان ماتېماتىكىسىنىڭ ئاساسىي تىلى بولۇپ، ئۇنىڭدىن پايدىلىنىپ ماتېماتىكىلىق مەزمۇنلارنى ئىخچام ھەم توغرا ئىپادىلەپ بەرگىلى بولىدۇ. ئەمەلىي مىساللارغا بىرلەشتۈرۈپ، ئۆلاردىكى ماتېماتىكىلىق مەزمۇنلارنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا تەبىئىي تىل، توپلام تىلى (كۆرسىتىش ئۇسۇلى ياكى تەسۋىرلەش ئۇسۇلى)، شەكىل تىلىدىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلەپ بېقىڭ ھەمدە ماتېماتىكىلىق مەزمۇنلارنى توپلام تىلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەشنىڭ ئارتۇقچىلىقلىرى ئۈستىدە ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن پىكىر ئالماشتۇرۇڭ.

بىر توپلامدىكى ئېلېمېنتلار ئېنىق بولۇشى، بىر ـ بىرىگە ئوخشىمايدىغان بولۇشى ۋە تەرتىپسىز بولۇشى كېرەك. سىز توپلامغا قويۇلىدىغان مۇشۇ ئاساسىي تەلەپلەرنى مىساللارغا بىرلەشتۈرۈپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

ئىككى توپلام ئارىسىدىكى ئاساسىي مۇناسىۋەتلەر (ئۆز ئىچىگە ئېلىش، تەڭ بولۇش) ئۈستىدە ئىككى سانىنىڭ مۇناسىۋىتىگە سېلىشتۇرغان ھالدا قانداق پىكىر يۈرگۈزۈش كېرەك؟

ئىككى توپلام ئارىسىدىكى ئاساسىي ئەمەللەر (بىرىكمە توپلام، كېسىشمە توپلام، تولدۇرغۇچى توپلام) ئۈستىدە ئىككى سان ئۈستىدىكى ئەمەللەرگە سېلىشتۇرغان ھالدا قانداق پىكىر يۈرگۈزۈش كېرەك؟

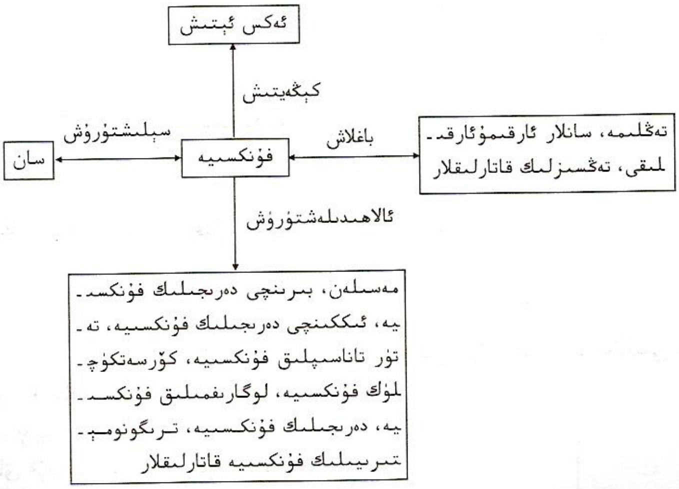
2. بۇ بابتا فۇنكسىيە ئۇقۇمىنى توپلام ۋە ماسلىق تىللىرىدىن پايدىلىنىپ يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تەسۋىرلىدۇق. تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتىكى فۇنكسىيە ئۇقۇمىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا سېلىشتۇرغاندا، بۇ بابتىكى فۇنكسىيە ئېنىقلىمىسىدا فۇنكسىيە ئۇقۇمىنىڭ ماھىيىتى، يەنى ئىككى سانلار توپلىمى ئارىسىدىكى بىر خىل ئېنىق ماسلىق مۇناسىۋىتى گەۋدىلەندۇرۇلدى؛ ئېنىقلىنىش ساھەسى، ماسلىق مۇناسىۋىتى ۋە قىممەت ساھەسىدىن ئىبارەت فۇنكسىيىنى ھاسىل قىلغۇچى ئۈچ ئامىل ئايدىڭلاشتۇرۇلدى؛ فۇنكسىيە بەلگىسى $y=f(x)$ كىرگۈزۈلدى.

بۇ بابتىكى مەزمۇنلارنى ئۆگىنىش ئارقىلىق، فۇنكسىيە ئۇقۇمى ھەققىدە قانداق يېڭى تونۇش ۋە تەسىرات ھاسىل قىلدىڭىز؟

3. فۇنكسىيە ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار ئارىسىدىكى بېقىندىلىق مۇناسىۋەتنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان مۇھىم ماتېماتىكىلىق مودېل بولۇپ، ئۇنى ئىپادىلەش ئۇسۇللىرىدىن ئاساسلىقى ئانالىتىك ئۇسۇل، گرافىك ئۇسۇلى ۋە جەدۋەل تۈزۈش ئۇسۇلىدىن ئىبارەت ئۈچ خىل ئۇسۇل بار، مەسىلىلەرنى ھەل قىلغاندا، ئوخشاش بولمىغان ئېھتىياجغا ئاساسەن فۇنكسىيىنى مۇۋاپىق ئۇسۇل تاللاپ ئىپادىلەش تولىمۇ مۇھىمدۇر. بۇ ئۈچ خىل ئىپادىلەش ئۇسۇلىنىڭ ئالاھىدىلىكلىرىنى كونكرېت ئەمەلىي مىساللارغا بىرلەشتۈرۈپ تەھلىل قىلىڭ ۋە سېلىشتۇرۇڭ.

4. فۇنكسىيىنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىش ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشنىڭ ئېھتىياجى بولۇپلا قالماستىن، ئۇ يەنە ماتېماتىكا ئۆزىدىكى تەبىئىي تەلەپ ھېسابلىنىدۇ. مەسىلەن، شەيئىلەرنىڭ ئۆزگىرىش يۈزلىنىشى، سىممېترىكلىكى، ماتېرىيالنى ئەڭ تېجەشلىك ئىشلىتىش، پايدىنى ئەڭ كۆپ ئېلىش، ئۈنۈمنى ئەڭ يۇقىرى قىلىش قاتارلىق ئالاھىدىلىكلەرنى فۇنكسىيىدە ئەكس ئەتتۈرمەكچى بولساق، ئۇ ھالدا فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقى، ئەڭ چوڭ (ئەڭ كىچىك) قىممىتى، جۈپ - تاقلىقى دېگەندەك ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىشىمىزغا توغرا كېلىدۇ.

فۇنكسىيىنىڭ بۇ ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلغاندا، ئادەتتە ئالدى بىلەن گېئومېترىيەلىك بىۋاسىتە كۆرۈنۈش (گرافىكنى كۆزىتىش) لەردىن قول سېلىپ، ئاندىن فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى تەبىئىي تىل بىلەن تەسۋىرلەيمىز، ئاخىرىدا ئۇنى ئابستراكسىيىلەپ، ماس سانلىق ئالاھىدىلىكنى ماتېماتىكىلىق بەلگىلەر بىلەن سۈرەتلەيمىز. يۇقىرىدا دېيىلگىنى بىر تەدرىجىي ئىلگىرىلەش جەريانى، شۇنداقلا ماتېماتىكا ئۆگىنىش ۋە ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشتا كۆپ ئىشلىتىلىدىغان ئۇسۇل ھېسابلىنىدۇ. 3.1 - پاراگرافتىكى فۇنكسىيە خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىشنىڭ پۈتكۈل جەريانىنى ئەسلەڭ ھەمدە ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن ئۆگىنىش تەسىراتىڭىز ھەققىدە پىكىر ئالماشتۇرۇڭ.



تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى توپلاملارنى كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ:

(1) $A=\{x|x^2=9\}$;

(2) $B=\{x\in \mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 2\}$;

(3) $C=\{x|x^2-3x+2=0\}$.

2. P نى تەكشىلىك ئىچىدىكى ھەرىكەتچان نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق، تۆۋەندىكى توپلاملارغا تەۋە بولغان نۇقتىلاردىن قانداق شەكىل ھاسىل بولىدۇ؟

(1) $\{P|PA=PB\}$ (A، B لار مۇقىم نۇقتا);

(2) $\{P|PO=3\,\text{cm}\}$ (O مۇقىم نۇقتا).

3. $\triangle ABC$ تەكشىلىك ئىچىدە ياتقان ئۈچبۇلۇڭ بولۇپ، P مۇشۇ تەكشىلىك ئىچىدىكى ھەرىكەتچان نۇقتا بولسا، توپلام $\{P|PA=PB\}\cap\{P|PA=PC\}$ غا تەۋە بولغان نۇقتىلارنىڭ نېمە ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

4. توپلام $A=\{x|x^2=1\}$، $B=\{x|ax=1\}$ بېرىلگەن. ئەگەر $B\subseteq A$ بولسا، ھەقىقىي سان a نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. توپلام $A=\{(x,y)|2x-y=0\}$، $B=\{(x,y)|3x+y=0\}$، $C=\{(x,y)|2x-y=3\}$ بېرىلگەن، $A\cap B$، $A\cap C$، $(A\cap B)\cup(B\cap C)$ نى تېپىڭ.

6. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+5}$;

(2) $y=\dfrac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$.

7. فۇنكسىيە $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

(1) $f(a)+1\ (a\neq-1)$; (2) $f(a+1)\ (a\neq-2)$.

8. فۇنكسىيە $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $f(-x)=f(x)$; (2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

9. $f(x)=4x^2-kx-8$ فۇنكسىيىسىنىڭ ئىنتېرۋال $[5, 20]$ دا مونوتون فۇنكسىيە بولىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، ھەقىقىي سان k نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

10. فۇنكسىيە $y=x^{-2}$ بېرىلگەن.

(1) بۇ فۇنكسىيە تاق فۇنكسىيىمۇ ياكى جۈپ فۇنكسىيىمۇ؟

(2) ئۇنىڭ گرافىكى قانداق سىممېترىكلىككە ئىگە؟

(3) ئۇ ئىنتېرۋال $(0,+\infty)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولامدۇ ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولامدۇ؟

(4) ئۇ ئىنتېرۋال $(-\infty,0)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولامدۇ ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولامدۇ؟

B گۇرۇپپا

1. مەكتەپ تەنھەرىكەت مۇسابىقىسى ئۆتكۈزگەندى، تولۇق ئوتتۇرا 1 - يىللىق (1) سىنىپتىن 28 ئوقۇغۇچى مۇسابىقىگە قاتناشتى. بۇلارنىڭ ئىچىدە 15 ئوقۇغۇچى سۇ ئۈزۈش مۇسابىقىسىگە، 8 ئوقۇغۇچى يېنىك ئاتلېتىكا مۇسابىقىسىگە، 14 ئوقۇغۇچى توپ تۈرلىرى مۇسابىقىسىگە، ئۈچ ئوقۇغۇچى سۇ ئۈزۈش مۇسابىقىسى بىلەن يېنىك ئاتلېتىكا مۇسابىقىسىنىڭ ھەر ئىككىسىگە، يەنە ئۈچ ئوقۇغۇچى سۇ ئۈزۈش مۇسابىقىسى بىلەن توپ تۈرلىرى مۇسابىقىسىنىڭ ھەر ئىككىسىگە قاتناشقان بولۇپ، ئۈچ تۈردىكى مۇسابىقىنىڭ ھەممىسىگە قاتناشقان ئوقۇغۇچىدىن بىرەرىمۇ چىقمىدى. ئۇنداق بولسا، قانچە ئوقۇغۇچى يېنىك ئاتلېتىكا مۇسابىقىسى بىلەن توپ تۈرلىرى مۇسابىقىسىنىڭ ھەر ئىككىسىگە قاتناشتى؟ قانچە ئوقۇغۇچى پەقەت سۇ ئۈزۈش مۇسابىقىسىگىلا قاتناشتى؟

2. بوش بولمىغان توپلام $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2=a\}$ بېرىلگەن، ھەقىقىي سان a نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

3. تولۇق توپلام $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$، $\complement_U(A\cup B)=\{1, 3\}$، $A\cap(\complement_U B)=\{2, 4\}$ دەپ پەرەز قىلىپ، B توپلامنى تېپىڭ.

4. فۇنكسىيە $f(x)=\begin{cases}x(x+4), & x\geqslant 0,\\ x(x-4), & x<0\end{cases}$ بېرىلگەن، $f(1)$، $f(-3)$، $f(a+1)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

5. ئىسپاتلاڭ:

(1) ئەگەر $f(x)=ax+b$ بولسا، ئۇ ھالدا $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$؛

(2) ئەگەر $g(x)=x^2+ax+b$ بولسا، ئۇ ھالدا $g\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$.

6. (1) تاق فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ئىنتېرۋال $[-b, -a]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولامدۇ ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولامدۇ؟

(2) جۈپ فۇنكسىيە $g(x)$ نىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ئىنتېرۋال $[-b, -a]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولامدۇ ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولامدۇ؟

7. «جۇڭخۇا خەلق جۇمھۇرىيىتى شەخس تاپاۋەت بېجى» دىكى بەلگىلىمە بويىچە، پۇقرالارنىڭ پۈتۈن ئايلىق مائاش كىرىمىنىڭ 2000 يۈەندىن ئاشمىغان قىسمىغا باج تاپشۇرۇلمايدۇ، 2000 يۈەندىن ئاشقان قىسمى پۈتۈن ئايدا باج تاپشۇرۇشقا تېگىشلىك تاپاۋەت سوممىسى بولۇپ، بۇ باج سوممىسى تۆۋەندە بېرىلگەن جەدۋەلدىكىدەك بۆلەكلەر بويىچە ھېسابلىنىدۇ.

باج نىسبىتى (%)	پۈتۈن ئايدا باج تاپشۇرۇشقا تېگىشلىك تاپاۋەت سوممىسى
5	500 يۈەندىن ئاشمىغان قىسمى
10	500 يۈەندىن ئېشىپ 2000 يۈەنگىچە بولغان قىسمى
15	2000 يۈەندىن ئېشىپ 5000 يۈەنگىچە بولغان قىسمى

بىر ئادەمنىڭ 1 - ئايدا مۇشۇ تۈردىن تاپشۇرۇشقا تېگىشلىك باج سوممىسى 26.78 يۈەن بولسا، ئۇنىڭ شۇ ئايدىكى مائاش كىرىمى قانچە يۈەن؟

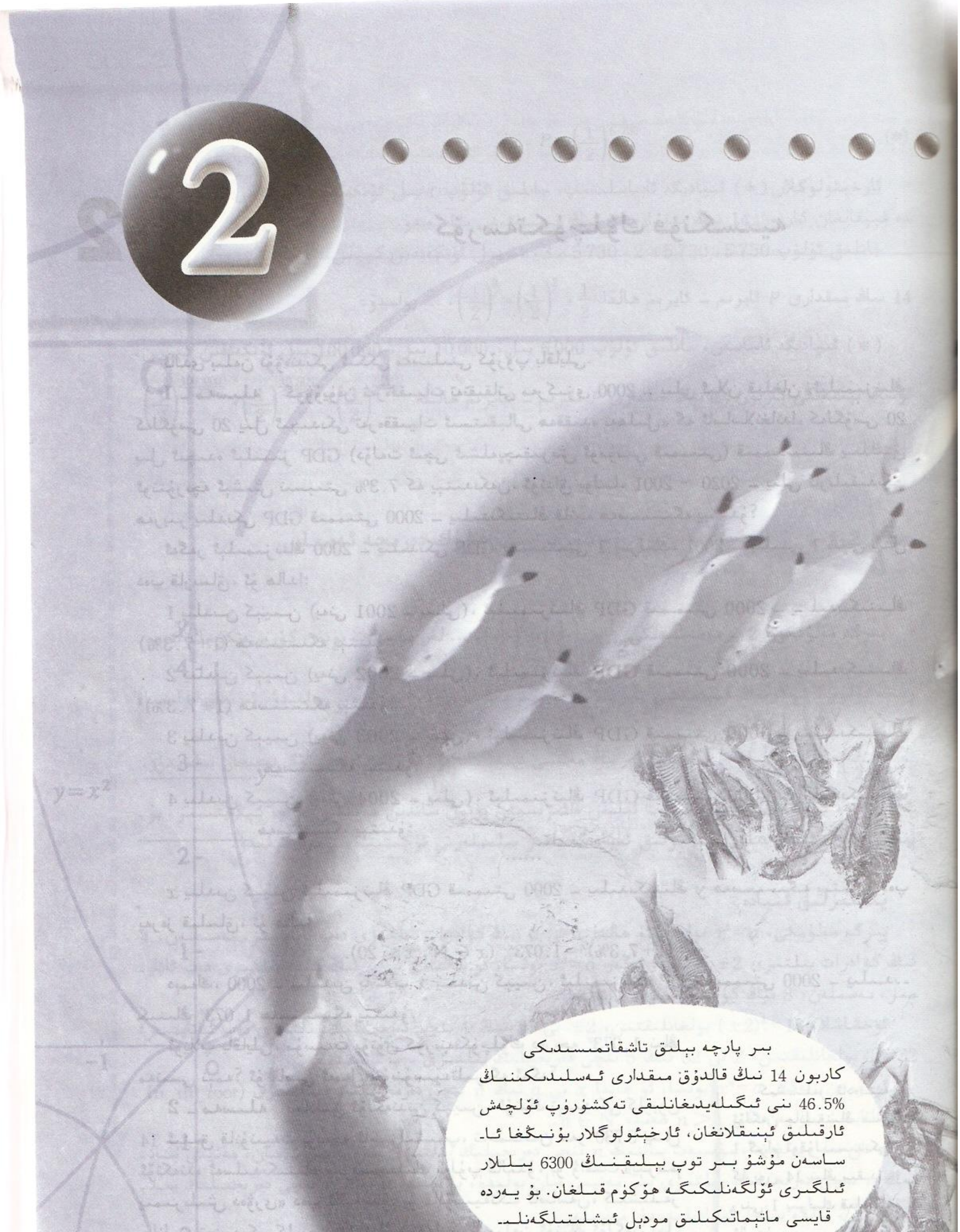
2 ـ باب

ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە(Ⅰ)

بىز فۇنكسىيىنىڭ ئوبيېكتىپ دۇنيادىكى ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان مۇھىم ماتېماتىكىلىق مودېل ئىكەنلىكىنى بىلىۋالدۇق. چىگىش ھەم مۇرەككەپ ئۆزگىرىش ھادىسىلىرىنى ئۇلارنىڭ ئوخشاش بولمىغان ئالاھىدىلىكلىرىگە ئاساسەن تۈرگە ئايرىپ تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ. مەسىلەن، تەبىئىي شارائىتتىكى ھۈجەيرىنىڭ بۆلۈنۈشى، نوپۇسنىڭ كۆپىيىشى، جانلىقلار تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ ئاجىزلىشى قاتارلىق ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ؛ يەر تەۋرەش دەرىجىسىنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى، pH ئېرىتمىنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى قاتارلىقلارنى لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ؛ كۇبنىڭ ھەجمى بىلەن تەرەپ ئۇزۇنلۇقى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت، ئىدېئال ھالەتتىكى گازنىڭ بېسىمى بىلەن ھەجمى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت قاتارلىقلارنى دەرىجىلىك فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ.

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە ۋە دەرىجىلىك فۇنكسىيە ئۈچ تۈرلۈك مۇھىم ھەم كۆپ ئىشلىتىلىدىغان ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە بولۇپ، ئۇلار ماتېماتىكىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئۆگىنىشنىڭ ئاساسى ھېسابلىنىدۇ. بۇ بابتا بىز كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە، دەرىجىلىك فۇنكسىيە ئۇقۇملىرى ۋە ئۇلارنىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرىنى ھەمدە ئۇلاردىن پايدىلىنىپ بەزى ئاددىي ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشنى ئۆگىنىمىز.

2



بىر پارچە بېلىق تاشقاتمىسىدىكى
كاربون 14 نىڭ قالدۇق مىقدارى ئەسلىدىكىنىڭ
46.5% نى ئىگىلەيدىغانلىقى تەكشۈرۈپ ئۆلچەش
ئارقىلىق ئېنىقلانغان، ئارخېئولوگلار بۇنىڭغا ئا-
ساسەن مۇشۇ بىر توپ بېلىقنىڭ 6300 يىللار
ئىلگىرى ئۆلگەنلىكىگە ھۆكۈم قىلغان. بۇ يەردە
قايسى ماتېماتىكىلىق مودېل ئىشلىتىلگەنلى-
كىنى بىلەمسىز؟

2-1 كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە

ئالدى بىلەن تۆۋەندىكى ئىككى مەسىلىنى كۆرۈپ باقايلى.

1 ـ مەسىلە گوۋۇيۈەن تەرەققىيات تەتقىقاتى مەركىزى 2000 ـ يىلى ئېلان قىلغان «ئېلىمىزنىڭ كەلگۈسى 20 يىل ئىچىدىكى تەرەققىيات ئىستىقبالى ھەققىدە تەھلىل» گە ئاساسلانغاندا، كەلگۈسى 20 يىل ئىچىدە ئېلىمىز GDP (دۆلەت ئىچى ئىشلەپچىقىرىش ئومۇمىي قىممىتى) قىممىتىنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتى 7.3% كە يېتىدىكەن. ئۇنداق بولسا، 2001 ~ 2020 ـ يىلى ئارىلىقىدىكى ھەربىر يىلدىكى GDP قىممىتى 2000 ـ يىلىدىكىنىڭ قانچە ھەسسىسىگە يېتىدۇ؟

ئەگەر ئېلىمىزنىڭ 2000 ـ يىلىدىكى GDP قىممىتىنى 1 بىرلىك، 2001 ـ يىلىنى 1 ـ يىل دەپ قارىساق، ئۇ ھالدا:

1 يىلدىن كېيىن (يەنى 2001 ـ يىلى)، ئېلىمىزنىڭ GDP قىممىتى 2000 ـ يىلىدىكىنىڭ $(1+7.3\%)$ ھەسسىسىگە يېتىدۇ؛

2 يىلدىن كېيىن (يەنى 2002 ـ يىلى)، ئېلىمىزنىڭ GDP قىممىتى 2000 ـ يىلىدىكىنىڭ $(1+7.3\%)^2$ ھەسسىسىگە يېتىدۇ؛

3 يىلدىن كېيىن (يەنى 2003 ـ يىلى)، ئېلىمىزنىڭ GDP قىممىتى 2000 ـ يىلىدىكىنىڭ ________ ھەسسىسىگە يېتىدۇ؛

4 يىلدىن كېيىن (يەنى 2004 ـ يىلى)، ئېلىمىزنىڭ GDP قىممىتى 2000 ـ يىلىدىكىنىڭ ________ ھەسسىسىگە يېتىدۇ؛

……

x يىلدىن كېيىن ئېلىمىزنىڭ GDP قىممىتى 2000 ـ يىلىدىكىنىڭ y ھەسسىسىگە يېتىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$y=(1+7.3\%)^x=1.073^x \quad (x\in \mathbf{N}^*,\ x\leqslant 20).$$

دېمەك، 2000 ـ يىلىدىن باشلاپ x يىلدىن كېيىن، ئېلىمىزنىڭ GDP قىممىتى 2000 ـ يىلىدىكىنىڭ 1.073^x ھەسسىسىگە يېتىدۇ.

ئويلاپ باقايلى، مۇسبەت پۈتۈن كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە 1.073^x نىڭ مەنىسى نېمە؟ ئۇ قايسى ئەمەل خۇسۇسىيەتلىرىگە ئىگە؟

كىشىلەر ئادەتتە ئۆلگەن جانلىقنىڭ ھەر 1 گرام توقۇلمىسىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارىنى 1 بىرلىك قىلىپ ئالىدۇ.

2 ـ مەسىلە جانلىق ئۆلگەندىن كېيىن، ئۇنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 ئېنىق قانۇنىيەت بويىچە ئاجىزلىشىپ، تەخمىنەن ھەر 5730 يىل ئۆتكەندە ئەسلىدىكىنىڭ يېرىمىچىلىك بولۇپ قالىدۇ، بۇ ۋاقىت «يېرىم يىمىرىلىش دەۋرى» دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ قانۇنىيەتكە ئاساسەن، كىشىلەر جانلىق تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارى P بىلەن ئۇنىڭ ئۆلگەن يىل سانى t ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كەلتۈرۈپ چىقارغان:

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 730}}. \qquad (*)$$

ئارخېئولوگلار (*) ئىپادىگە ئاساسلىنىپ، جانلىق ئۆلۈپ t يىل ئۆتكەندىن كېيىنكى ئۇنىڭ تېنىدە قېپقالغان كاربون 14 نىڭ مىقدارى P نىڭ قىممىتىنى بىلەلەيدۇ.

جانلىق ئۆلۈپ 730 5، 730 5×2، 730 5×3، ... يىل ئۆتكەندىن كېيىن، ئۇنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارى P ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $\frac{1}{2}$، $\left(\frac{1}{2}\right)^2$، $\left(\frac{1}{2}\right)^3$، ... بولىدۇ.

(*) ئىپادىگە ئاساسەن، جانلىق ئۆلۈپ 000 6 يىل، 000 10 يىل، 000 100 يىل ئۆتكەندىن كېيىن، ئۇنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارى P ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6\ 000}{5\ 730}}$، $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\ 000}{5\ 730}}$، $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100\ 000}{5\ 730}}$ بولىدۇ.

1-1-2 كۆرسەتكۈچ ۋە كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە ئەمىلى

بىزگە مەلۇمكى، 2 ـ مەسىلىدىكى $\frac{1}{2}$، $\left(\frac{1}{2}\right)^2$، $\left(\frac{1}{2}\right)^3$، ... لەر مۇسبەت پۈتۈن كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە بولۇپ، ئۇلارنىڭ قىممىتى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، ... بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6\ 000}{5\ 730}}$، $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\ 000}{5\ 730}}$، $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100\ 000}{5\ 730}}$ لەرنىڭ مەنىسى نېمە؟ مانا بۇ، دەل بىز ئەمدى ئۆگىنىدىغان بىلىمدۇر.

تۆۋەندە كۆرسەتكۈچنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى پۈتۈن ساندىن ھەقىقىي سانغا كېڭەيتىمىز، بۇنىڭ ئۈچۈن، ئالدى بىلەن يىلتىزلىق ئىپادىگە دائىر بىلىملەرنى ئۆگىنىشكە توغرا كېلىدۇ.

يىلتىزلىق ئىپادە

بىزگە مەلۇمكى، $x^2=a$ بولسا، ئۇ ھالدا x نى a نىڭ كۋادرات يىلتىزى دەپ ئاتايمىز. مەسىلەن، 4 نىڭ كۋادرات يىلتىزى ± 2 بولىدۇ؛ ئەگەر $x^3=a$ بولسا، ئۇ ھالدا x نى a نىڭ كۇب يىلتىزى دەپ ئاتايمىز، مەسىلەن، 8 نىڭ كۇب يىلتىزى 2 بولىدۇ.

ئوخشاشلا، $16=(\pm 2)^4$ بولغانلىقتىن، ± 2 نى 16 نىڭ 4 ىنچى دەرىجىلىك يىلتىزى دەپ ئاتايمىز؛ $2^5=32$ بولغانلىقتىن، 2 نى 32 نىڭ 5 ىنچى دەرىجىلىك يىلتىزى دەپ ئاتايمىز.

ئومۇمەن، ئەگەر $x^n=a$ بولسا، ئۇ ھالدا x نى a نىڭ n ىنچى **دەرىجىلىك يىلتىزى** (n th root) دەپ ئاتايمىز، بۇ يەردىكى $n>1$ ھەمدە $n\in \mathbf{N}^*$.

n تاق سان بولغاندا، مۇسبەت ساننىڭ n ىنچى دەرىجىلىك يىلتىزى بىر مۇسبەت سان، مەنپىي ساننىڭ n ىنچى دەرىجىلىك يىلتىزى بىر مەنپىي سان بولىدۇ، بۇ چاغدا a نىڭ n ىنچى دەرىجىلىك يىلتىزى $\sqrt[n]{a}$ بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. مەسىلەن،

$$\sqrt[5]{32}=2,\ \sqrt[5]{-32}=-2,\ \sqrt[3]{a^6}=a^2.$$

n جۈپ سان بولغاندا، مۇسبەت ساننىڭ ئىككى دانە n نچى دەرىجىلىك يىلتىزى بار بولۇپ، بۇ ئىككى سان ئۆزئارا قارىمۇقارشى سانلار بولىدۇ. بۇ چاغدا مۇسبەت سان a نىڭ n نچى دەرىجىلىك مۇسبەت يىلتىزى $\sqrt[n]{a}$ بەلگە بىلەن، n نچى دەرىجىلىك مەنپىي يىلتىزى $-\sqrt[n]{a}$ بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ، n نچى دەرىجىلىك مۇسبەت يىلتىز بىلەن n نچى دەرىجىلىك مەنپىي يىلتىزنى بىرلەشتۈرۈپ $\pm\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$ قىلىپ يېزىشقا بولىدۇ. مەسىلەن،

$$\sqrt[4]{16}=2,\quad -\sqrt[4]{16}=-2$$

بولغانلىقتىن، 16 نىڭ 4 نچى دەرىجىلىك يىلتىزىنى $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$ قىلىپ يېزىشقا بولىدۇ.

مەنپىي ساننىڭ جۈپ دەرىجىلىك يىلتىزى يوق.

0 نىڭ ھەرقانداق دەرىجىلىك يىلتىزى ھامان 0 بولىدۇ، ئۇ $\sqrt[n]{0}=0$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

$\sqrt[n]{a}$ ئىپادە **يىلتىزلىق ئىپادە** (radical) دەپ ئاتىلىدۇ، بۇ يەردىكى n **يىلتىز كۆرسەتكۈچى** (radical exponent)، a بولسا **يىلتىزى چىقىرىلغۇچى سان** (radicand) دەپ ئاتىلىدۇ.

n نچى دەرىجىلىك يىلتىزنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

مەسىلەن، $(\sqrt{5})^2=5$، $(\sqrt[5]{-3})^5=-3$.

ئىزدىنىش

a^n نىڭ n نچى دەرىجىلىك يىلتىزى $\sqrt[n]{a^n}$ بىلەن ئىپادىلەنسە، $\sqrt[n]{a^n}=a$ چوقۇم كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ ئەگەر ئۇنىڭ كۈچكە ئىگە بولۇشى ناتايىن بولسا، ئۇ ھالدا $\sqrt[n]{a^n}$ نېمىگە تەڭ بولىدۇ؟

ئىزدىنىش ئارقىلىق تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

n تاق سان بولغاندا، $\sqrt[n]{a^n}=a$؛

n جۈپ سان بولغاندا، $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

1 - مىسال تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى:

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$; (2) $\sqrt{(-10)^2}$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$; (4) $\sqrt{(a-b)^2}$ $(a>b)$.

يېشىش:

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$;

(2) $\sqrt{(-10)^2}=|-10|=10$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$;

(4) $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b \quad (a>b)$.

كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە

تۆۋەندىكى مىساللارنى كۆرۈپ باقايلى. n ىنچى دەرىجىلىك يىلتىزنىڭ ئېنىقلىمىسى ۋە سان ئۈستىدىكى ئەمەللەرگە ئاساسەن:

$$\sqrt[5]{a^{10}}=\sqrt[5]{(a^2)^5}=a^2=a^{\frac{10}{5}} \quad (a>0),$$

$$\sqrt[4]{a^{12}}=\sqrt[4]{(a^3)^4}=a^3=a^{\frac{12}{4}} \quad (a>0).$$

دېمەك، يىلتىزلىق ئىپادىدىكى يىلتىزى چىقىرىلغۇچى ساننىڭ كۆرسەتكۈچى يىلتىز كۆرسەتكۈچىگە پۈتۈن بۆلۈنگەندە، يىلتىزلىق ئىپادىنى كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە كۆرۈنۈشىدە ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

ئۇنداق بولسا، يىلتىزلىق ئىپادىدىكى يىلتىزى چىقىرىلغۇچى ساننىڭ كۆرسەتكۈچى يىلتىز كۆرسەتكۈچىگە پۈتۈن بۆلۈنمىگەندىمۇ يىلتىزلىق ئىپادىنى كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە كۆرۈنۈشىدە ئىپادىلەشكە بولامدۇ؟ مەسىلەن، $\sqrt[3]{a^2}$ ، $\sqrt{b}$ ، $\sqrt[4]{c^5}$ نى تۆۋەندىكىدەك كۆرۈنۈشتە يېزىشقا بولامدۇ؟

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}} \quad (a>0),$$

$$\sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}} \quad (b>0),$$

$$\sqrt[4]{c^5}=c^{\frac{5}{4}} \quad (c>0).$$

ماتېماتىكىدا، بىرەر يېڭى ئۇقۇم ياكى قائىدىنى كىرگۈزۈشكە توغرا كەلگەندە، ئۇنىڭ بىلەن ئەسلىدە بار ئۇقۇم ياكى قائىدىلەرنىڭ ئۆزئارا سىغىشىدىغان بولۇشى ھەر ۋاقىت ئۇمىد قىلىنىدۇ.

ئەگەر مۇشۇنداق يېزىشقا بولسا، ئۇ ھالدا پۈتۈن كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنىڭ ئەمەل خۇسۇسىيىتى $(a^k)^n=a^{kn}$ كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىگىمۇ مۇۋاپىق كېلەمدۇ ـ يوق؟

بۇ بەلگىلىمىنىڭ ئەقىلگە مۇۋاپىقلىقىنى چۈشەندۈرۈش قالدۇرۇلدى.

بىز مۇسبەت ساننىڭ مۇسبەت كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىسىنىڭ مەنىسىنى مۇنداق دەپ بەلگىلىۋالىمىز:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \quad (a>0,\ m,\ n\in \mathbf{N}^* \text{ ھەمدە } n>1).$$

شۇنىڭ بىلەن، شەرت $a>0$ ، $m,\ n\in \mathbf{N}^*$ ھەمدە $n>1$ ھازىرلانغان ئەھۋالدا، يىلتىزلىق ئىپادىلەرنى كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە كۆرۈنۈشىدە يېزىشقا بولىدۇ.

مەنپىي پۈتۈن كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنىڭ مەنىسىگە تەقلىد قىلغان ھالدا، مۇسبەت ساننىڭ مەنپىي كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىسىنىڭ مەنىسىنى مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a>0,\ m,\ n\in \mathbf{N}^* \text{ ھەمدە } n>1).$$

مەسىلەن،

$$5^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{5^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^4}},\ a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \quad (a>0).$$

0 نىڭ مۇسبەت كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىسى 0 گە تەڭ، 0 نىڭ مەنپىي كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىسى مەنىگە ئىگە ئەمەس.

كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنىڭ مەنىسى بەلگىلەنگەندىن كېيىن، كۆرسەتكۈچ ئۇقۇمى پۈتۈن كۆرسەتكۈچتىن راتسىئونال كۆرسەتكۈچكە كېڭەيگەن بولىدۇ.

پۈتۈن كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىگە دائىر ئەمەللەر خۇسۇسىيىتى راتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىگىمۇ ئوخشاشلا مۇۋاپىق كېلىدۇ، باشقىچە ئېيتقاندا، خالىغان راتسىئونال سان r، s لارغا نىسبەتەن، تۆۋەندىكى ئەمەللەر خۇسۇسىيىتى ھامان كۈچكە ئىگە بولىدۇ:

(1) $a^r a^s = a^{r+s}$ $(a>0,\ r,\ s \in \mathbf{Q})$;

(2) $(a^r)^s = a^{rs}$ $(a>0,\ r,\ s \in \mathbf{Q})$;

(3) $(ab)^r = a^r b^r$ $(a>0,\ b>0,\ r \in \mathbf{Q})$;

بۇ پاراگرافنىڭ بېشىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان 2 - مەسىلىدە، ئارخېئولوگلار جانلىق ئۆلۈپ 6 000 يىل، 10 000 يىل، 10 0000 يىلدىن كېيىن ئۇنىڭ تېنىدە قېپقالغان كاربون 14 مىقدارى P نىڭ قىممىتىنى دەل مۇشۇ راتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىگە دائىر بىلىملەردىن پايدىلىنىپ ھېسابلاپ چىققان. مەسىلەن،

$t = 6\,000$ بولغاندا، $P = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{600}{573}} = \sqrt[573]{\left(\frac{1}{2}\right)^{600}} \approx 0.484$ (0.001 گىچە ئېنىقلىقتا)، يەنى جانلىق ئۆلۈپ 6 000 يىلدىن كېيىن ئۇنىڭ تېنىدە قېپقالغان كاربون 14 نىڭ مىقدارى ئەسلىدىكىنىڭ تەخمىنەن 48.4% ىگە تەڭ بولىدۇ.

2 - مىسال تۆۋەندىكىلەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى:

$8^{\frac{2}{3}}$; $25^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

يېشىش:

$8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$;

$25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{2\times(-\frac{1}{2})} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = (2^{-1})^{-5} = 2^5 = 32$;

$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\times(-\frac{3}{4})} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$.

3 - مىسال تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە كۆرۈنۈشىدە ئىپادىلەيلى ($a>0$):

$a^3 \cdot \sqrt{a}$; $a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$.

يېشىش:

$a^3 \cdot \sqrt{a} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{3+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$;

$a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{2+\frac{2}{3}} = a^{\frac{8}{3}};$

$\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = (a \cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}.$

4 ـ مىسال تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى ھېسابلايلى (ھەربىر ئىپادىدىكى ھەرپلەر مۇسبەت سان):

(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}});$ (2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8.$

يېشىش:

(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$

$= [2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$

$= 4ab^0$

$= 4a;$

(2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8$

$= (m^{\frac{1}{4}})^8(n^{-\frac{3}{8}})^8$

$= m^2n^{-3}$

$= \frac{m^2}{n^3}.$

5 ـ مىسال تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى ھېسابلايلى:

(1) $(\sqrt[3]{25} - \sqrt{125}) \div \sqrt[4]{25};$ (2) $\frac{a^2}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$ $(a>0).$

يېشىش:

(1) $(\sqrt[3]{25} - \sqrt{125}) \div \sqrt[4]{25};$

$= (5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{3}{2}}) \div 5^{\frac{1}{2}}$

$= 5^{\frac{2}{3}} \div 5^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \div 5^{\frac{1}{2}}$

$= 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} - 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$

$= 5^{\frac{1}{6}} - 5$

$= \sqrt[6]{5} - 5;$

(2) $\frac{a^2}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$

$= \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}}$

$= a^{2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$

$= a^{\frac{5}{6}}$

$= \sqrt[6]{a^5}.$

ئىرراتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە

بىز يۇقىرىدا كۆرسەتكۈچنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى پۈتۈن ساندىن راتسىئونال سانغا كېڭەيتتۇق. ئەگەر $5^{\sqrt{2}}$ گە ئوخشاش كۆرسەتكۈچى ئىرراتسىئونال سان بولغان ئىپادىنى ئۇچراتساق، ئۇنى قانداق چۈشىنىش كېرەك؟

ئەمەلىيەتتە، $5^{\sqrt{2}}$ بىر ئېنىق ھەقىقىي ساننى ئىپادىلەيدۇ. ئۇنداق بولسا، ئۇنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى قانداق ئېنىقلاش كېرەك؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، ئالدى بىلەن تۆۋەندىكى جەدۋەلنى كۆزىتەيلى.

$\sqrt{2}$ نىڭ كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى	$5^{\sqrt{2}}$ نىڭ تەقرىبىي قىممىتى
1.4	9.518 269 694
1.41	9.672 669 973
1.414	9.735 171 039
1.414 2	9.738 305 174
1.414 21	9.738 461 907
1.414 213	9.738 508 928
1.414 213 5	9.738 516 765
1.414 213 56	9.738 517 705
1.414 213 562	9.738 517 736
…	…

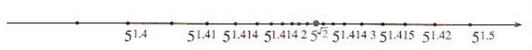
$\sqrt{2}$ نىڭ ئارتۇقى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى	$5^{\sqrt{2}}$ نىڭ تەقرىبىي قىممىتى
1.5	11.180 339 89
1.42	9.829 635 328
1.415	9.750 851 808
1.414 3	9.739 872 62
1.414 22	9.738 618 643
1.414 214	9.738 524 602
1.414 213 6	9.738 518 332
1.414 213 57	9.738 517 862
1.414 213 563	9.738 517 752
…	…

بۇ جەدۋەلدىن ئاسانلا بايقىيالايمىزكى:

$\sqrt{2}$ نىڭ ئارتۇقى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى $\sqrt{2}$ دىن چوڭ بولغان يۆنىلىش بويىچە $\sqrt{2}$ گە يېقىنلاشقاندا، $5^{\sqrt{2}}$ نىڭ تەقرىبىي قىممىتى $5^{\sqrt{2}}$ دىن چوڭ بولغان يۆنىلىش بويىچە $5^{\sqrt{2}}$ گە يېقىنلىشىدۇ؛

$\sqrt{2}$ نىڭ كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى $\sqrt{2}$ دىن كىچىك بولغان يۆنىلىش بويىچە $\sqrt{2}$ گە يېقىنلاشقاندا، $5^{\sqrt{2}}$ نىڭ تەقرىبىي قىممىتى $5^{\sqrt{2}}$ دىن كىچىك بولغان يۆنىلىش بويىچە $5^{\sqrt{2}}$ گە يېقىنلىشىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن، $5^{\sqrt{2}}$ بىر قاتار راتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە $5^{1.4}$، $5^{1.41}$، $5^{1.414}$، $5^{1.4142}$، … بىلەن يەنە بىر قاتار راتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە $5^{1.5}$، $5^{1.42}$، $5^{1.415}$، $5^{1.4143}$، … نىڭ يۇقىرىقى ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى بويىچە ئۆزگىرىشىنىڭ نەتىجىسى بولىدۇ. بۇ جەرياننى 1.1.2 ـ رەسىم ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ.



1.1.2 ـ رەسىم

ئومۇمەن، ئىرراتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە a^{α} ($a>0$، α بولسا ئىرراتسىئونال سان) بىر ئېنىق ھەقىقىي سان بولىدۇ. راتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنىڭ ئەمەللەر خۇسۇسىيىتى ئىرراتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىگىمۇ ئوخشاشلا مۇۋاپىق كېلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

يۇقىرىقى جەريانغا تەقلىد قىلىپ، ئىرراتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە $2^{\sqrt{3}}$ نىڭ مەنىسىنى چۈشەندۈرۈڭ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى يىلتىزلىق ئىپادە كۆرۈنۈشىدە ئىپادىلەڭ $(a>0)$:

$a^{\frac{1}{2}}$، $a^{\frac{3}{4}}$، $a^{-\frac{3}{5}}$، $a^{-\frac{2}{3}}$.

2. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە ئارقىلىق ئىپادىلەڭ:

(1) $\sqrt[3]{x^2}$;

(2) $\sqrt[4]{(a+b)^3}$ $(a+b>0)$;

(3) $\sqrt[3]{(m-n)^2}$ $(m>n)$;

(4) $\sqrt{(m-n)^4}$ $(m>n)$;

(5) $\sqrt{p^6q^5}$ $(p>0)$;

(6) $\frac{m^3}{\sqrt{m}}$.

3. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى ھېسابلاڭ:

(1) $\left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$;

(2) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$;

(3) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{8}}$;

(4) $2x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

2-1-2 كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيىتى

ئاساس (دەرىجىنىڭ ئاساسى) 0 دىن چوڭ بولغاندا، كۆرسەتكۈچنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى پۈتۈن ساندىن ھەقىقىي سانغا كېڭەيتىۋالدۇق. شۇنداق قىلىپ، مۇشۇ پاراگرافتىكى 2 ـ مەسىلىدە، خالىغان $t\geqslant 0$ گە نىسبەتەن، $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 730}}$ ھامان مەنىگە ئىگە بولىدۇ، يەنى ھەربىر ۋاقىت t غا نىسبەتەن، ئۇنىڭغا ماس كېلىدىغان بىردىنبىر ئېنىق قىممەت P ھامان مەۋجۇت بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئۆلگەن جانلىقنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 مىقدارى P ۋاقىت t نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ.

ئىزدىنىش

2 ـ مەسىلىدىكى فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 730}}$ $(t\geqslant 0)$

بىلەن 1 ـ مەسىلىدىكى فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى $y=1.073^x$ $(x\leqslant 20، x\in \mathbf{N}^*)$ قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟

ئەگەر $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\ 730}}$ بىلەن 1.073 نىڭ ئورنىغا a نى ئالماشتۇرساق، ئۇ ھالدا يۇقىرىقى ھەر ئىككى فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى

$$y=a^{x}$$

كۆرۈنۈشتە ئىپادىلىگىلى بولىدۇ، بۇنىڭدىكى كۆرسەتكۈچ ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x ، ئاساس a بولسا 0 دىن چوڭ ھەمدە 1 گە تەڭ بولمىغان تۇراقلىق مىقدار.

ئومۇمەن، $y=a^{x}$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ فۇنكسىيە **كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە** (exponential function) دەپ ئاتىلىدۇ، بۇنىڭدىكى x ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $\mathbf{R}$.

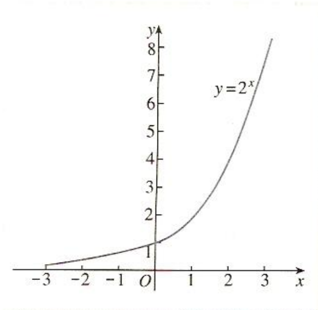
ئەمدى كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^{x}$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ نىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

ئالدى بىلەن فۇنكسىيە $y=2^{x}$ نىڭ گرافىكىنى سىزايلى.

ئۆزۈڭلار x، y لەرنىڭ ماس قىممەتلەر جەدۋىلى، يەنى 1.2 ـ جەدۋەلنى تاماملاپ، فۇنكسىيە $y=2^{x}$ نىڭ گرافىكىنى نۇقتا ئارقىلىق تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ سىزىڭلار (2.1.2 ـ رەسىم).

1.2 ـ جەدۋەل

x	y
−2	
−1.5	0.35
−1	
−0.5	0.71
0	
0.5	1.41
1	
1.5	2.83
2	



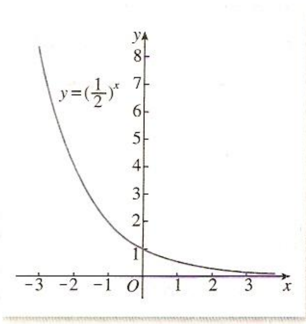
2.1.2 ـ رەسىم

ئاندىن فۇنكسىيە $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ نىڭ گرافىكىنى سىزايلى.

ئۆزۈڭلار x، y لەرنىڭ ماس قىممەتلەر جەدۋىلى، يەنى 2.2 ـ جەدۋەلنى تاماملاپ، بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى نۇقتا ئارقىلىق تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ سىزىڭلار (3.1.2 ـ رەسىم).

2.2 ـ جەدۋەل

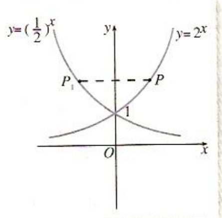
x	y
−2	
−1.5	
−1	2
−0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	



3.1.2 ـ رەسىم

مۇلاھىزە ؟

فۇنكسىيە $y=2^x$ نىڭ گرافىكى بىلەن فۇنكسىيە $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ نىڭ گرافىكىنى $y=2^x$ نىڭ گرافىكىدىن پايدىلىنىپ سىزغىلى بولامدۇ - يوق؟



4.1.2 - رەسىم

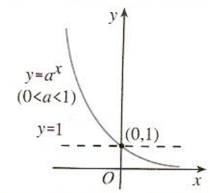
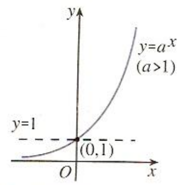
1.2 -، 2.2 - جەدۋەل ۋە 2.1.2 -، 3.1.2 - رەسىمدىن بايقاشقا بولىدۇكى، فۇنكسىيە $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ نىڭ گرافىكىنى $y=2^x$ نىڭ گرافىكى ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ بولۇپ، (x, y) نۇقتا بىلەن $(-x, y)$ نۇقتا y ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك بولغانلىقتىن، $y=2^x$ نىڭ گرافىكىدىكى خالىغان بىر $P(x, y)$ نۇقتىنىڭ y ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى $P_1(-x, y)$ چوقۇم $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدە ياتىدۇ، ئەكسىچە بولغاندىمۇ يەنە شۇنداق بولىدۇ. مۇشۇنداق سىممېترىكلىككە ئاساسەن، $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ نىڭ گرافىكىنى $y=2^x$ نىڭ گرافىكىدىن پايدىلىنىپ سىزىپ چىقىشقا بولىدۇ. (4.1.2 - رەسىم).

ئىزدىنىش

ئاساس a ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) نىڭ ئوخشاش بولمىغان بىرقانچە قىممىتىنى تاللاپ، ئوخشاش بىر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا ماس كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيەلەرنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ. بۇ گرافىكلارنى كۆزىتىپ، ئۇلاردا قايسى ئورتاق ئالاھىدىلىكلەر بارلىقىنى بايقىيالىدىڭىز؟

فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىشتا، جەدۋەل تۈزۈپ نۇقتا تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلانساق، شۇنداقلا ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلانساقمۇ بولىدۇ.

ئومۇمەن، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) نىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيىتى تۆۋەندىكى جەدۋەلدە كۆرسىتىلگەندەك بولىدۇ.

	$0<a<1$	$a>1$
گرافىكى		
ئېنىقلىنىش ساھەسى	**R**	
قىممەت ساھەسى	$(0, +\infty)$	
خۇسۇسىيىتى	(1) مۇقىم نۇقتا $(0, 1)$ دىن ئۆتىدۇ، يەنى $x=0$ بولغاندا، $y=1$ بولىدۇ	
	(2) **R** دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ	(2) **R** دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ

6 ـ مىسال كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $f(x)=a^x$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ نىڭ گرافىكى $(3, \pi)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن، $f(0)$، $f(1)$، $f(-3)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

تەھلىل: $f(0)$، $f(1)$، $f(-3)$ لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىش ئۈچۈن، ئالدى بىلەن كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $f(x)=a^x$ نىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى، يەنى ئالدى بىلەن a نىڭ قىممىتىنى تېپىشىمىز كېرەك، ھالبۇكى، ئاساس a نىڭ قىممىتىنى فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ $(3, \pi)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقىدىن ئىبارەت مۇشۇ شەرتكە ئاساسەن تاپقىلى بولىدۇ.

يېشىش: $f(x)=a^x$ نىڭ گرافىكى $(3, \pi)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى ئۈچۈن،

$$f(3)=\pi,$$

يەنى $a^3=\pi$ بولىدۇ، بۇنى يەشسەك $a=\pi^{\frac{1}{3}}$ كېلىپ چىقىدۇ، شۇڭا

$$f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، $f(0)=\pi^0=1$، $f(1)=\pi^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\pi}$، $f(-3)=\pi^{-1}=\frac{1}{\pi}$.

7 ـ مىسال تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر مىسالدىكى ئىككى قىممەتنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرايلى:

(1) $1.7^{2.5}$, 1.7^{3};

(2) $0.8^{-0.1}$, $0.8^{-0.2}$;

(3) $1.7^{0.3}$, $0.9^{3.1}$.

يېشىش: (1) $1.7^{2.5}$، 1.7^{3} لەرنى فۇنكسىيە $y=1.7^x$ نىڭ ئىككى فۇنكسىيە قىممىتى دەپ قاراشقا بولىدۇ. بۇنىڭدىكى ئاساس $1.7>1$ بولغانلىقتىن، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=1.7^x$ نىڭ **R** دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز.

$\because 2.5<3$, $\therefore 1.7^{2.5}<1.7^{3}$.

(2) $0.8^{-0.1}$، $0.8^{-0.2}$ لەرنى فۇنكسىيە $y=0.8^x$ نىڭ ئىككى فۇنكسىيە قىممىتى دەپ قاراشقا بولىدۇ. بۇنىڭدىكى ئاساس $0<0.8<1$ بولغانلىقتىن، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=0.8^x$ نىڭ **R** دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز.

$\because\ -0.1 > -0.2,\quad \therefore\ 0.8^{-0.1} < 0.8^{-0.2}.$

(3) $1.7^{0.3}$ ، $0.9^{3.1}$ لەرنى ئوخشاش بىر كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ ئىككى فۇنكسىيە قىممىتى دەپ قاراشقا بولمايدۇ. شۇڭا، ئالدى بىلەن مۇشۇ ئىككى سانلىق قىممەت ئارىلىقىدىكى بىر سانلىق قىممەتنى تېپىپ، بۇ سانلىق قىممەت بىلەن ئەسلىدىكى ئىككى سانلىق قىممەتنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى ئايرىم ـ ئايرىم سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق ئەسلىدىكى ئىككى سانلىق قىممەتنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتىنى ئېنىقلىساق بولىدۇ.

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن بىلەلەيمىزكى،

$$1.7^{0.3} > 1.7^{0} = 1,$$

$$0.9^{3.1} < 0.9^{0} = 1,$$

شۇڭا $1.7^{0.3} > 0.9^{3.1}$.

7 ـ مىسالدىن كۆرەلەيمىزكى، فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقى ھەمدە ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارلارنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتىدىن پايدىلىنىپ ماس فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلغىلى بولىدۇ.

8 ـ مىسال 1999 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىغا كەلگەندە، ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى تەخمىنەن 1.3 مىليارد بولغان. ئەگەر مۇشۇ يىلدىن كېيىن نوپۇسنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتىنى 1% تە كونترول قىلغىلى بولسا، 20 يىلدىن كېيىن ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچىلىك بولىدۇ (1 مىلياردقىچە ئېنىقلىقتا)؟

يېشىش: مۇشۇ يىلدىن كېيىن نوپۇسنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتىنى 1%، x يىلدىن كېيىنكى ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانىنى y مىليارد دەپ پەرەز قىلايلى.

1999 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىغا كەلگەندە، ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى تەخمىنەن 1.3 مىليارد بولغان؛

1 يىلدىن كېيىن (يەنى 2000 ـ يىلى) ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى:

$$1.3+1.3\times1\%=1.3\times(1+1\%)$$ (مىليارد);

2 يىلدىن كېيىن (يەنى 2001 ـ يىلى) ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى:

$$1.3\times(1+1\%)+1.3\times(1+1\%)\times1\%$$
$$=1.3\times(1+1\%)^2$$ (مىليارد);

3 يىلدىن كېيىن (يەنى 2002 ـ يىلى) ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى:

$$1.3\times(1+1\%)^2+1.3\times(1+1\%)^2\times1\%$$
$$=1.3\times(1+1\%)^3$$ (مىليارد);

......

شۇڭا، x يىلدىن كېيىن ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى:

$$y=1.3\times(1+1\%)^x=1.3\times1.01^x$$ (مىليارد).

$x=20$ بولغاندا، (مىليارد) $y=1.3\times1.01^{20}\approx1.6$.

شۇنىڭ ئۈچۈن، 20 يىلدىن كېيىن ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى ئەڭ كۆپ بولغاندا 1.6 مىليارد بولىدۇ.

ئەمەلىي مەسىلىلەردە، بىز كۆپ ھاللاردا 8 ـ مىسالدىكىگە ئوخشاش كۆرسەتكۈچنىڭ ئېشىش مودېلىنى ئۇچرىتىمىز: ئەسلىي مىقدارنى N، ھەر قېتىمقى ئېشىش نىسبىتىنى p، x قېتىم ئاشقاندىن كېيىن بۇ مىقدارنى ئېشىپ y كە يېتىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $y=N(1+p)^x\ (x\in\mathbf{N})$ بولىدۇ.

بىز $y=ka^x$ ($k \in \mathbf{R}$، $a>0$ ھەمدە $a \neq 1$) كۆرۈنۈشتىكى فۇنكسىيىنى كۆرسەتكۈچ تىپلىق فۇنكسىيە دەپ ئاتايمىز. بۇ ناھايىتى ئەسقاتىدىغان فۇنكسىيە مودېلىدۇر.

ئىزدىنىش

(1) ئەگەر يۇقىرىدا دېيىلگەن نوپۇسنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتى 1 پىرسەنت ئاشسا، 20 يىل، 33 يىلدىن كېيىنكى ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانىنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ئايرىم - ئايرىم ھېسابلاڭ.

(2) ئەگەر يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتى 2% بولسا، 2020 ~ 2100 - يىلى ئارىلىقىدا ھەر بەش يىل ئۆتكەندىكى نوپۇس سانىنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلاڭ.

(3) ئېلىمىز نوپۇس سانىنىڭ ئېشىشىدا قانداق يۈزلىنىش ئىپادىلەنگەن؟

(4) ئېلىمىزنىڭ پىلانلىق تۇغۇت سىياسىتىگە قانداق قارايسىز؟

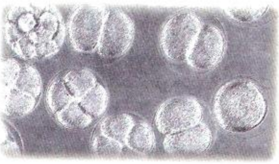
مەشىق

1. ئوخشاش بىر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تۆۋەندىكى ئىككى فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ:

(1) $y=3^x$; (2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. تۆۋەندىكى ئىككى فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=3^{\sqrt{x-2}}$; (2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.



3. مەلۇم خىل ھۈجەيرە بۆلۈنگەندە، 1 ى 2 گە، 2 سى 4 كە، 4 ى 8 گە، ... بۆلۈنىدۇ. مۇشۇنداق 1 ھۈجەيرە x قېتىم بۆلۈنگەندىن كېيىن ھاسىل بولغان ھۈجەيرە سانى y بىلەن x نىڭ فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى يېزىڭ.

1.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\sqrt[4]{100^4}$;　　(2) $\sqrt[5]{(-0.1)^5}$;

(3) $\sqrt{(\pi-4)^2}$;　　(4) $\sqrt[6]{(x-y)^6}$ $(x>y)$.

2. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى كەسىر كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە ئارقىلىق ئىپادىلەڭ (ھەربىر ئىپادىدىكى ھەرپلەر مۇسبەت سان):

(1) $\sqrt{\frac{b^3}{a}\sqrt{\frac{a^2}{b^6}}}$;　　(2) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}}}$;　　(3) $\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt[3]{m}\cdot\sqrt[4]{m}}{(\sqrt[6]{m})^5\cdot m^{\frac{1}{4}}}$.

3. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ (نەتىجىنى تۆت ئىناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېلىڭ):

(1) $5^{\frac{1}{3}}$;　　(2) $8.3^{\frac{1}{2}}$;　　(3) $3^{\sqrt{2}}$;　　(4) 2^{π}.

4. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى ھېسابلاڭ (ھەربىر ئىپادىدىكى ھەرپلەر مۇسبەت سان):

(1) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{7}{12}}$;　　(2) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{5}{6}}$;

(3) $(x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}})^{12}$;　　(4) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)$;

(5) $\left(\frac{16s^2t^{-6}}{25r^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$;　　(6) $(-2x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})(3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}})(-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}})$;

(7) $(2x^{\frac{1}{2}}+3y^{-\frac{1}{4}})(2x^{\frac{1}{2}}-3y^{-\frac{1}{4}})$;　　(8) $4x^{\frac{1}{4}}(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})\div(-6x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}})$.

5. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=2^{3-x}$;　　(2) $y=3^{2x+1}$;　　(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{5x}$;　　(4) $y=0.7^{\frac{1}{x}}$.

6. بىر خىل مەھسۇلاتنىڭ ئەسلىدىكى مەھسۇلات مىقدارى a ئىدى، بۇنىڭدىن كېيىنكى m يىل ئىچىدە مەھسۇلات مىقدارىنى ئوتتۇرا ھېساب بىلەن ھەر يىلى ئالدىنقى بىر يىلدىكىگە قارىغاندا $p\%$ تىن ئاشۇرۇش پىلانلانغان بولسا، مەھسۇلات مىقدارى y نىڭ يىل سانى x كە ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىنىڭ فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى يېزىڭ.

7. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر مىسالدىكى ئىككى ساننىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $3^{0.8}$, $3^{0.7}$;　　(2) $0.75^{-0.1}$, $0.75^{0.1}$;

(3) $1.01^{2.7}$, $1.01^{3.5}$;　　(4) $0.99^{3.3}$, $0.99^{4.5}$.

8. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەر بېرىلگەن، m بىلەن n نىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $2^m < 2^n$;　　　(2) $0.2^m < 0.2^n$;

(3) $a^m < a^n\ (0 < a < 1)$;　　　(4) $a^m > a^n\ (a > 1)$.

9. ئۆلگەن جانلىقنىڭ توقۇلمىسىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارى ئۆلمىگەن چاغدىكىسىنىڭ مىڭدىن بىرىگە يەتمىگەندە، كاربون 14 نى ئادەتتىكى رادىئوئاكتىپلىق تەكشۈرۈش ئەسۋابىدىن پايدىلىنىپ ئۆلچەش ئىمكانىيىتى بولماي قالىدۇ. ئۇنداق بولسا، توققۇز «يېرىم يىمىرىلىش دەۋرى» دىن ئۆتكەندىن كېيىن، ئۆلگەن جانلىقنىڭ توقۇلمىسىدىكى كاربون 14 نى ئادەتتىكى رادىئوئاكتىپلىق تەكشۈرۈش ئەسۋابىدىن پايدىلىنىپ ئۆلچىگىلى بولامدۇ - يوق؟

B گۇرۇپپا

1. تەڭسىزلىك $a^{2x-7} > a^{4x-1}$ $(a > 0$ ھەمدە $a \neq 1)$ دىكى x نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

2. $x + x^{-1} = 3$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$; $= \sqrt{5}$　　(2) $x^2 + x^{-2}$; $= 7$　　(3) $x^2 - x^{-2}$. $= \pm 3\sqrt{5}$

3. ئۆسۈمى دومىلىما (قوش) ئۆسۈم❶ بويىچە ھېسابلىنىدىغان بىر خىل پۇل ئامانەت قويۇشتا، دەسمايە a يۈەن، ھەربىر قەرەلدىكى ئۆسۈم نىسبىتى r ئىكەنلىكى بېرىلگەن. دەسمايە بىلەن ئۆسۈمنىڭ يىغىندىسىنى y يۈەن، ئامانەت قويۇش قەرەلىنى x دەپ پەرەز قىلىپ، دەسمايە بىلەن ئۆسۈمنىڭ يىغىندىسى y نىڭ ئامانەت قويۇش قەرەلى x كە ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىنىڭ فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى يېزىڭ. ئەگەر ئامانەت قويۇلغان 1000 يۈەن دەسمايىنىڭ ھەربىر قەرەلدىكى ئۆسۈم نىسبىتى 2.25% بولسا، بەش قەرەلدىن كېيىنكى دەسمايە بىلەن ئۆسۈمنىڭ يىغىندىسىنى ھېسابلاڭ (1 يۈەنگىچە ئېنىقلىقتا ئېلىڭ).

4. $y_1 = a^{3x+1}$، $y_2 = a^{-2x}$ (بۇ ئىككى ئىپادىدە $a > 0$ ھەمدە $a \neq 1$) دەپ پەرەز قىلىپ، x قانداق قىممەتنى ئالغاندا تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىنى ئېنىقلاڭ:

(1) $y_1 = y_2$;　　　(2) $y_1 > y_2$.

❶ دومىلىما ئۆسۈم ئۆسۈمنى ھېسابلاشتىكى بىر خىل ئۇسۇل بولۇپ، ئۇنىڭدا ئالدىنقى بىر قەرەلدىكى ئۆسۈم بىلەن دەسمايىنىڭ يىغىندىسى دەسمايە قىلىنىپ، ئاندىن كېيىنكى بىر قەرەلدىكى ئۆسۈم ھېسابلىنىدۇ. ئېلىمىزدە ھازىر يولغا قويۇلۇۋاتقان قەرەللىك پۇل ئامانەتتىكى ئاپتوماتىك يۆتكەپ ئامانەت قويۇش كەسپى ئۆسۈمى دومىلىما ئۆسۈم بويىچە ھېسابلىنىدىغان پۇل ئامانەت قويۇشقا ئوخشىشىپ كېتىدۇ.

2 - باب

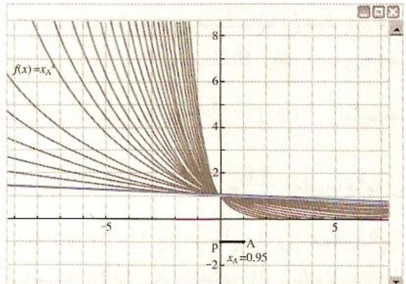
ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش

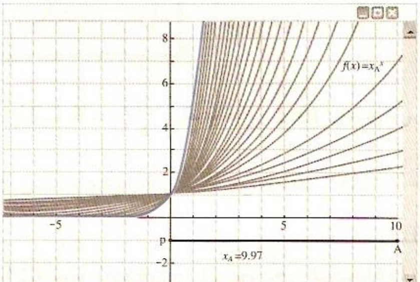
كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ نىڭ گرافىكى مۇشۇ فۇنكسىيەنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىشتىكى مۇھىم ۋاستە ھېسابلىنىدۇ. ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ گرافىك سىزىش ۋە تەھلىل قىلىش ئىقتىدارى ھەمدە ئۇنىڭ فۇنكسىيە گرافىكىغا نىسبەتەن بىۋاستە مەشغۇلات ئېلىپ بېرىشقا بولىدىغان ئەۋزەللىكلىرى (مەسىلەن، فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ ئۆزگىرىشىنى ھەرىكەتچان ھالەتتە كۆرسىتىپ بېرىش، ئۆزگىرىشىنى كەلتۈرۈپ چىقارغۇچى ھالقىلىق ئامىللارنى تەكرارلاش، گرافىكنىڭ قىسمەن جايلىرىنى چوڭايتىپ كۆرسىتىش دېگەندەك) بىزنىڭ فۇنكسىيىنىڭ بىر پۈتۈن ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى كۆزىتىشىمىزگە ئاسانلىق تۇغدۇرۇپ بېرىدۇ. ئۇنىڭ ئۈستىگە، ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ يۇقىرىقى ئىقتىدار ۋە ئەۋزەللىكلىرىدىن پايدىلىنىپ يەنە گرافىكنىڭ ئۇششاق تەپسىلاتلىرىنىمۇ كۆزەتكىلى بولىدۇ - دە، بۇنىڭ بىلەن فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ ئۆزگىرىش جەريانىدىن فۇنكسىيىنىڭ ئالاھىدىلىكىگە دائىر نۇرغۇن ئۇچۇرلارغا ئېرىشكىلى بولىدۇ. روشەنكى، بۇ بىزنىڭ فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتى ھەمدە ئوخشاش بولمىغان فۇنكسىيىلەر ئارىسىدىكى باغلىنىش ۋە پەرقلەرنى بىلىۋېلىشىمىز ھەم ئومۇملاشتۇرۇشىمىزغا زور قولايلىقلارنى يارىتىپ بېرىدۇ. ئەمدى كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىپ كۆرەيلى.

1. فۇنكسىيە $y=a^x$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ نىڭ گرافىكىنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ سىزىش. ئاساس a نۆلدىن چوڭ ھەمدە 1 گە تەڭ بولمىغان بارلىق ھەقىقىي سانلارنى ئالالايدىغانلىقى ئۈچۈن، ئاساس a نىڭ قىممىتىنى بىر ئۇچى y ئوققا مۇقىملاشتۇرۇلغان گورىزونتال كېسىك PA نىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن ئىپادىلىسەك، A نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى x_A دەل a نىڭ قىممىتى بولىدۇ.

2. 1 - رەسىمدىكىدەك $A(0<x_A<1)$ نۇقتىنى سولدىن ئوڭغا يۆتكىسەك، x_A نىڭ قىممىتى تەدرىجىي چوڭىيىدۇ، x_A نىڭ قىممىتى 1 گە بارغانسېرى يېقىنلاشقاندا، گرافىك تۈز سىزىق $y=1$ گە بارغانسېرى يېقىنلىشىدۇ؛ $x_A=1$ بولغاندا، گرافىك تۈز سىزىق $y=1$ نىڭ ئۆزى



1 - رەسىم



2 - رەسىم

بولىدۇ؛ 2 ـ رەسىمدىكىدەك، $A(x_A>1)$ نى ئوڭغا داۋاملىق يۆتكىسەك، گرافىكتا ئۆزگىرىش يۈز بېرىدۇ، 1 ـ چارەكتە، گرافىك x_A نىڭ تەدرىجىي چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ y ئوققا بارغانسېرى يېقىنلىشىدۇ، 2 ـ چارەكتە، گرافىك x_A نىڭ تەدرىجىي چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ x ئوققا بارغانسېرى يېقىنلىشىدۇ.

1.3 ـ، 2 ـ رەسىمدىن كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئاسانلا كۆرۈۋالايمىز:

(1) بارلىق فۇنكسىيە گرافىكلىرى $(0, 1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) بارلىق فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $(-\infty, +\infty)$، قىممەت ساھەسى $(0, +\infty)$ بولىدۇ؛

(3) 1 ـ رەسىمدە، $0<a<1$ بولغاندا، فۇنكسىيە گرافىكلىرىنىڭ ھەممىسى تۆۋەنلەش يۆزلىنىشىدە بولىدۇ، يەنى فۇنكسىيە تەدرىجىي كېمىيىدۇ؛ 2 ـ رەسىمدە، $a>1$ بولغاندا فۇنكسىيە گرافىكلىرىنىڭ ھەممىسى ئۆرلەش يۆزلىنىشىدە بولىدۇ، يەنى فۇنكسىيە تەدرىجىي ئاشىدۇ.

1 ـ، 2 ـ رەسىمنى داۋاملىق كۆزىتىپ، تۆۋەندىكى مەسىلىنى مۇھاكىمە قىلىڭ:

ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x ئوخشاش بىر ساننى ئالغاندا، ماس فۇنكسىيە قىممىتى y لەرنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتى قانداق بولىدۇ؟ بۇنىڭدىن قانداق قانۇنىيەتنى بايقىدىڭىز؟

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى ئۆزىڭىز ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ سىزىپ كۆرۈڭ، a نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى ئۆزگەرتىش ئارقىلىق، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى بىلىۋېلىڭ.

2-2 لوگارىفملىق فۇنكسىيە

1-2-2 لوگارىفما ۋە لوگارىفما ئەمىلى

مۇلاھىزە ؟

2.1.2 - ماۋزۇدا بېرىلگەن 8 - مىسالدىكى مۇناسىۋەت $y=1.3\times1.01^x$ گە ئاساسەن خالىغان بىر x يىلدىكى نوپۇس سانىنى ھېسابلاپ چىقالايمىز. ئەكسىچە، ئەگەر «قايسى يىلدىكى نوپۇس سانى 1.8 مىلىيارد، 2 مىليارد، 3 مىليارد... قا يېتىدۇ؟» دەپ سورالسا، بۇ مەسىلىنى قانداق ھەل قىلىش كېرەك؟

لوگارىفما

يۇقىرىقى مەسىلە ئەمەلىيەتتە ئايرىم - ئايرىم ھالدا مۇناسىۋەت $\frac{1.8}{1.3}=1.01^x$ ، $\frac{2}{1.3}=1.01^x$ ، $\frac{3}{1.3}=1.01^x$ ، ... لەرگە ئاساسەن x نىڭ قىممىتىنى تېپىش، يەنى بېرىلگەن ئاساس ۋە دەرىجىنىڭ قىممىتىگە ئاساسەن كۆرسەتكۈچنى تېپىشقا دائىر مەسىلىدۇر. بۇ دەل بىز مۇشۇ پاراگرافتا ئۆگىنىدىغان لوگارىفمىغا دائىر مەسىلىدۇر.

> «log» لاتىنچە logarithm (لوگارىفما) دېگەن سۆزنىڭ قىسقارتىپ يېزىلىشى.

ئومۇمەن، ئەگەر $a^x=N$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq1)$ بولسا، ئۇ ھالدا x سان ئاساس a بولغاندىكى N نىڭ **لوگارىفمىسى** (logarithm) دەپ ئاتىلىپ،

$$x=\log_a N$$

قىلىپ يېزىلىدۇ، بۇنىڭدىكى a **لوگارىفمىنىڭ ئاساسى**، N بولسا **لوگارىفمىلانغۇچى سان** دەپ ئاتىلىدۇ.

مەسىلەن، $\frac{1.8}{1.3}=1.01^x$ بولغانلىقتىن، x دېگىنىمىز ئاساس 1.01 بولغاندىكى $\frac{1.8}{1.3}$ نىڭ لوگارىفمىسى بولۇپ، ئۇ $x=\log_{1.01}\frac{1.8}{1.3}$ قىلىپ يېزىلىدۇ؛ $4^2=16$ بولغانلىقتىن، ئاساس 4 بولغاندىكى 16 نىڭ لوگارىفمىسى 2 بولۇپ، ئۇ $\log_4 16=2$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

ئادەتتە ئاساس 10 بولغاندىكى لوگارىفمىنى **ئونلۇق لوگارىفما** (common logarithm) دەپ ئاتاپ، $\log_{10}N$ نى $\lg N$ قىلىپ يازىمىز. ئۇنىڭدىن باشقا، پەن - تېخنىكىدا كۆپ ھاللاردا ئىرراتسىئونال

سان ⋯ $e=2.718\,28$ نى ئاساس قىلغان لوگارىفما ئىشلىتىلىدۇ، e نى ئاساس قىلغان لوگارىفما **تەبىئىي لوگارىفما** (natural logarithm) دەپ ئاتىلىپ، $\log_e N$ ئاددىي ھالدا $\ln N$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

«⇔»بەلگە «تەڭ كۈچلۈك» دېگەن مەنىنى بىلدۈرىدۇ.

لوگارىفمىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، لوگارىفما بىلەن كۆرسەتكۈچ ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$a>0$، $a\neq 1$ بولغاندا، $a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$.

لوگارىفما بىلەن كۆرسەتكۈچنىڭ ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتتىن پايدىلىنىپ بۇ ئىككى يەكۈننى ئىسپاتلاڭ.

كۆرسەتكۈچ بىلەن لوگارىفمىنىڭ بۇ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

مەنپىي سان بىلەن نۆلنىڭ لوگارىفمىسى يوق؛

$\log_a 1=0,\quad \log_a a=1.$

1 ـ مىسال تۆۋەندىكى كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادىلەرنى لوگارىفمىلىق ئىپادىگە، لوگارىفمىلىق ئىپادىلەرنى كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادىگە ئايلاندۇرايلى:

(1) $5^4=625$; (2) $2^{-6}=\dfrac{1}{64}$;

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^m=5.73$; (4) $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$;

(5) $\lg 0.01=-2$; (6) $\ln 10=2.303$.

يېشىش:

(1) $\log_5 625=4$; (2) $\log_2\dfrac{1}{64}=-6$;

(3) $\log_{\frac{1}{3}}5.73=m$; (4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=16$;

(5) $10^{-2}=0.01$; (6) $e^{2.303}=10$.

2 ـ مىسال تۆۋەندە بېرىلگەن ئىپادىلەردىكى x نىڭ قىممىتىنى تاپايلى:

(1) $\log_{64}x=-\dfrac{2}{3}$; (2) $\log_x 8=6$;

(3) $\lg 100=x$; (4) $-\ln e^2=x$.

يېشىش:

(1) $\because \log_{64}x=-\dfrac{2}{3}$,

$\therefore x=64^{-\frac{2}{3}}=(4^3)^{-\frac{2}{3}}=4^{-2}=\dfrac{1}{16}$;

(2) $\because \log_x 8=6$, $\therefore x^6=8$.

$\because x>0$,

$\therefore x=8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$;

(3) $\because \lg 100=x$,

$\therefore\ 10^x=100,$

$10^x=10^2,$

شۇڭا $x=2$؛

(4) $\because\ -\ln e^2=x,$

$\therefore\ \ln e^2=-x,$

$e^2=e^{-x},$

شۇڭا $x=-2$.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادىلەرنى لوگارىفملىق ئىپادىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $2^3=8$; (2) $2^5=32$;

(3) $2^{-1}=\frac{1}{2}$; (4) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

2. تۆۋەندىكى لوگارىفملىق ئىپادىلەرنى كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $\log_3 9=2$; (2) $\log_5 125=3$;

(3) $\log_2 \frac{1}{4}=-2$; (4) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$.

3. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\log_5 25$; (2) $\log_2 \frac{1}{16}$;

(3) $\lg 1\,000$; (4) $\lg 0.001$.

4. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\log_{15} 15$; (2) $\log_{0.4} 1$;

(3) $\log_9 81$; (4) $\log_{2.5} 6.25$;

(5) $\log_7 343$; (6) $\log_3 243$.

لوگارىفما ئەمىلى

ئىزدىنىش

كۆرسەتكۈچ بىلەن لوگارىفمنىڭ مۇناسىۋىتى ۋە كۆرسەتكۈچ ئەمىلىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىدىن پايدىلىنىپ، ماس ھالدىكى لوگارىفما ئەمىلىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

بولغانلىقتىن،

$$M=a^m,\quad N=a^n$$

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$MN=a^{m+n}.$$

لوگارىفمنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$\log_a M = m,\quad \log_a N = n,$$
$$\log_a (M \cdot N) = m + n.$$

شۇنداق قىلىپ، لوگارىفمنىڭ تۆۋەندىكى بىر ئەمەللەر خۇسۇسىيىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

ئوخشاشلا، ساۋاقداشلار يۇقىرىقى جەريانغا تەقلىد قىلىپ، $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ۋە $(a^m)^n = a^{mn}$ گە ئاساسەن لوگارىفما ئەمەلنىڭ قالغان خۇسۇسىيەتلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقارسا بولىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن، لوگارىفما ئەمەلىنىڭ تۆۋەندىكى خۇسۇسىيەتلىرىگە ئېرىشىمىز:

> ئەگەر $a > 0$ ھەمدە $a \neq 1$، $M > 0$، $N > 0$ بولسا، ئۇ ھالدا:
>
> (1) $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$;
>
> (2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;
>
> (3) $\log_a M^n = n\log_a M \ (n \in \mathbf{R})$.

3 ـ مىسال تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى $\log_a x$، $\log_a y$، $\log_a z$ لەر ئارقىلىق ئىپادىلەيلى:

(1) $\log_a \dfrac{xy}{z}$;　　　(2) $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

يېشىش:

(1) $\log_a \dfrac{xy}{z}$

$= \log_a (xy) - \log_a z$

$= \log_a x + \log_a y - \log_a z$;

(2) $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

$= \log_a(x^2\sqrt{y}) - \log_a \sqrt[3]{z}$

$= \log_a x^2 + \log_a \sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z}$

$= 2\log_a x + \dfrac{1}{2}\log_a y - \dfrac{1}{3}\log_a z$.

4 ـ مىسال تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تاپايلى:

(1) $\log_2 (4^7 \times 2^5)$;　　　(2) $\lg \sqrt[5]{100}$.

يېشىش:

(1) $\log_2 (4^7 \times 2^5)$

$= \log_2 4^7 + \log_2 2^5$

$= 7\log_2 4 + 5\log_2 2$

$= 7 \times 2 + 5 \times 1$

$= 19$;

(2) $\lg \sqrt[5]{100}$

$= \lg 10^{\frac{2}{5}}$

$= \frac{2}{5}$.

لوگارىفمنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن 1 گە تەڭ بولمىغان ھەرقانداق مۇسبەت ساننى لوگارىفمنىڭ ئاساسى قىلىشقا بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز. ماتېماتىكا تارىخىدا، كىشىلەرنىڭ زور تىرىشچانلىق كۆرسىتىشى بىلەن ئونلۇق لوگارىفما جەدۋىلى ۋە تەبىئىي (ناتۇرال) لوگارىفما جەدۋىلى تۈزۈپ چىقىلىپ، خالىغان مۇسبەت ساننىڭ ئونلۇق لوگارىفمىسى ياكى تەبىئىي لوگارىفمىسى جەدۋەلدىن ئىزدەش ئارقىلىق تېپىلىدىغان بولغان. نەتىجىدە، پەقەت باشقا سانلار ئاساس بولغاندىكى لوگارىفمىنى 10 ياكى e نى ئاساس قىلغان لوگارىفمغا ئالماشتۇرغىلى بولسىلا، 1 گە تەڭ بولمىغان ھەرقانداق مۇسبەت سان ئاساس بولغاندىكى لوگارىفمىنى تېپىشمۇ ئاسان ئىش بولۇپ قالاتتى.

ئىزدىنىش

تۆۋەندىكى ئاساسنى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسىنى لوگارىفمنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \ (a > 0 \text{ ھەمدە } a \neq 1;\ c > 0 \text{ ھەمدە } c \neq 1;\ b > 0).$$

مەسىلەن، ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى قايسى يىلى 1.8 مىلياردقا يېتىدىغانلىقىنى تېپىش ئۈچۈن، $x = \log_{1.01} \frac{1.8}{1.3}$ نىڭ قىممىتىنى تېپىشىمىز كېرەك. ئاساسنى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسى ۋە لوگارىفمىنىڭ ئەمەللەر خۇسۇسىيىتىگە ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$x = \log_{1.01} \frac{1.8}{1.3} = \frac{\lg \frac{1.8}{1.3}}{\lg 1.01} = \frac{\lg 1.8 - \lg 1.3}{\lg 1.01}$$

$$\approx \frac{0.2553 - 0.1139}{0.0043} = 32.8837 \approx 33 \text{ (يىل)}.$$

بۇنىڭدىن بىلەلەيمىزكى، ئەگەر نوپۇسنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتى 1% تە كونترول قىلىنسا، ئۇ ھالدا 2000 ـ يىلىنىڭ بېشىدىن باشلاپ، تەخمىنەن 33 يىل ئۆتكەندە، يەنى 2032 ـ يىلىنىڭ ئاخىرىغا كەلگەندە ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى 1.8 مىلياردقا يېتىدۇ.

5 ـ مىسال 20 ـ ئەسىرنىڭ 30 ـ يىللىرىدا رىختېر (C.F.Richter) يەر تەۋرەش ئېنېرگىيەسىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى ئىپادىلەپ بېرىدىغان بىر خىل ئۆلچەمنى بېكىتىپ چىققان، بۇنىڭدا يەر تەۋرەش ئېنېرگىيەسىنىڭ دەرىجىسى سېيسمومېتىر بىلەن ئۆلچىنىدۇ، يەر تەۋرەش ئېنېرگىيەسى قانچىكى چوڭ بولسا، سېيسمومېتىردا خاتىرىلەنگەن يەر تەۋرەش ئەگرى سىزىقىنىڭ ئامپلىتۇدىسىمۇ شۇنچە چوڭ بولىدۇ. بۇ دەل بىز دائىم دەيدىغان رىختېر تەۋرەش دەرىجىسى M بولۇپ، ئۇنى ھېسابلاش ئۇسۇلى مۇنداق:

$$M = \lg A - \lg A_0 .$$

بۇنىڭدىكى A ئۆلچەنگەن تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسى، A_0 بولسا «ئۆلچەملىك يەر تەۋرەش»نىڭ ئامپلىتۇدىسى (ئۆلچەملىك يەر تەۋرەش ئامپلىتۇدىسىنى ئىشلىتىشتىكى مەقسەت سېيسموممېتىردىن ئەمەلىي تەۋرەش مەركىزىگىچە بولغان ئارىلىق كەلتۈرۈپ چىقارغان چەتنەپ كېتىشنى تۈزىتىۋېلىش ئۈچۈندۇر).

(1) بىر قېتىملىق يەر تەۋرەشتە، تەۋرەش مەركىزىدىن 100 km يىراقلىقتىكى سېيسموممېتىردا خاتىرىلەنگەن ئەڭ چوڭ يەر تەۋرەش ئامپلىتۇدىسى 20، بۇ چاغدىكى ئۆلچەملىك يەر تەۋرەش ئامپلىتۇدىسى 0.001 دەپ پەرەز قىلىنغان بولسا، بۇ قېتىملىق يەر تەۋرەشنىڭ دەرىجىسىنى ھېسابلايلى (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا)؛

(2) 5 بال يەر تەۋرەشنىڭ كىشىدە قالدۇرىدىغان تەۋرەش سېزىمى بىرقەدەر روشەن بولىدۇ. 7.6 بال يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسى بەش بال يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسىنىڭ قانچە ھەسسىسىگە تەڭ كېلىدىغانلىقىنى ھېسابلايلى (1گىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش:

(1) $M = \lg 20 - \lg 0.001$

$$= \lg \frac{20}{0.001} = \lg 20\,000 = \lg 2 + \lg 10^4$$

$$\approx 4.3.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، بۇ قېتىملىق يەر تەۋرەشنىڭ دەرىجىسى رىتېر 4.3 بال بولغان.

(2) $M = \lg A - \lg A_0$ دىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$M = \lg \frac{A}{A_0} \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^M \Leftrightarrow A = A_0 \cdot 10^M .$$

$M = 7.6$ بولغاندا، يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسى $A_1 = A_0 \cdot 10^{7.6}$؛ $M = 5$ بولغاندا، يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسى $A_2 = A_0 \cdot 10^5$ بولىدۇ. شۇڭا، ئىككى قېتىملىق يەر تەۋرەشتىكى ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىلارنىڭ نىسبىتى:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 \cdot 10^{7.6}}{A_0 \cdot 10^5} = 10^{7.6-5} = 10^{2.6}$$

$$\approx 398.$$

جاۋابى: 7.6 بال يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسى 5 بال يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسىنىڭ تەخمىنەن 398 ھەسسىسىگە تەڭ كېلىدۇ.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، 7.6 بال يەر تەۋرەش بىلەن 5 بال يەر تەۋرەشنىڭ پەرقى 2.6 بال بولسىمۇ، ئەمما 7.6 بال يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسى 5 بال يەر تەۋرەشنىڭ ئەڭ چوڭ ئامپلىتۇدىسىنىڭ 398 ھەسسىسىگە تەڭ كېلىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، 7.6 بال يەر تەۋرەشنىڭ بۇزغۇنچىلىقى 5 بال يەر تەۋرەشنىڭكىدىن زور دەرىجىدە ئېشىپ كېتىدۇ.

6 ـ مىسال ئۆلگەن جانلىقنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ «يېرىم يىمىرىلىش دەۋرى» 5730 يىل بولىدۇ. خۇنەن چاڭشا شەھىرىدىكى خەن سۇلالىسى دەۋرىگە تەئەللۇق ماۋاڭدۈي قەبرىستانلىقىدىن چىققان ئايال جەسەت قېزىۋېلىنغان چاغدا ئۇنىڭ تېنىدە قېپقالغان كاربون 14 نىڭ مىقدارى ئەسلىي مىقدارىنىڭ تەخمىنەن 76.7% نى ئىگىلەيدۇ، ماۋاڭدۈي قەدىمىي قەبرىستانلىقىنىڭ يىلىنى ھېسابلاپ

كۆرەيلى.

يېشىش: ئالدى بىلەن جانلىق ئۆلۈپ t يىل ئۆتكەندىن كېيىن ئۇنىڭ ھەربىر گرام توقۇلمىسىدا قېپقالىدىغان كاربون 14 نىڭ مىقدارىنى ھېسابلايلى. جانلىق ئۆلگەن چاغدا ئۇنىڭ ھەربىر گرام توقۇلمىسىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارىنى 1، بىر يىلدىن كېيىن قېپقالىدىغان كاربون 14 نىڭ مىقدارىنى x دەپ پەرەز قىلساق، ئۆلگەن جانلىقنىڭ تېنىدە ئەسلىدە بار كاربون 14 ئېنىق قانۇنىيەت بويىچە ئاجىزلىشىدىغانلىقى ئۈچۈن، جانلىقنىڭ ئۆلگەن يىل سانى t بىلەن ئۇنىڭ ھەربىر گرام توقۇلمىسىدا قېپقالغان كاربون 14 نىڭ مىقدارى P ئارىسىدا تۆۋەندىكىدەك مۇناسىۋەت مەۋجۇت بولىدۇ:

ئۆلگەن يىل سانى t	1	2	3	…	t	…
كاربون 14 نىڭ مىقدارى P	x	x^2	x^3	…	x^t	…

شۇنىڭ ئۈچۈن، جانلىق ئۆلۈپ t يىل ئۆتكەندىن كېيىن ئۇنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارى $P=x^t$ بولىدۇ.

تەخمىنەن ھەر 5 730 يىل ئۆتكەندە، ئۆلگەن جانلىقنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارى ئاجىزلاپ ئەسلىدىكىنىڭ يېرىمىچىلىك بولۇپ قالىدىغانلىقى ئۈچۈن،

$$\frac{1}{2}=x^{5\,730},$$

بولىدۇ، شۇڭا

$$x=\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}},$$

شۇنداق قىلىپ، جانلىق ئۆلۈپ t يىل ئۆتكەندىن كېيىن ئۇنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ مىقدارى $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$ بولىدۇ.

لوگارىفما بىلەن كۆرسەتكۈچنىڭ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادە $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$ نى تۆۋەندىكىدەك لوگارىفمىلىق ئىپادە كۆرۈنۈشىدە يېزىشقا بولىدۇ:

$$t=\log_{\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}}}P.$$

خۇنەن چاڭشا شەھىرىدىكى خەن سۇلالىسى دەۋرىگە تەئەللۇق ماۋاڭدۇي قەبرىستانلىقىدىن چىققان ئايال جەسەتنىڭ تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ قالدۇق مىقدارى ئەسلىي مىقدارىنىڭ تەخمىنەن 76.7% نى ئىگىلەيدىغانلىقى، يەنى $P=0.767$ بولىدىغانلىقى ئۈچۈن،

$$t=\log_{\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}}}0.767.$$

ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق مۇنداق بولىدۇ:

$$t\approx 2\,193.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، ماۋاڭدۇي قەدىمىي قەبرىستانلىقىنىڭ يىل سانى 2 200 يىل ئىلگىرىكى چاغلارغا يېقىن كېلىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى $\lg x$، $\lg y$، $\lg z$ لەر ئارقىلىق ئىپادىلەڭ:

(1) $\lg(xyz)$;　　(2) $\lg \dfrac{xy^2}{z}$;

(3) $\lg \dfrac{xy^3}{\sqrt{z}}$;　　(4) $\lg \dfrac{\sqrt{x}}{y^2z}$;

2. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\log_3(27\times 9^2)$;　　(2) $\lg 100^2$;

(3) $\lg 0.00001$;　　(4) $\ln\sqrt{e}$.

3. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\log_2 6-\log_2 3$;　　(2) $\lg 5+\lg 2$;

(3) $\log_5 3+\log_5 \dfrac{1}{3}$;　　(4) $\log_3 5-\log_3 15$.

4. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى لوگارىفمىنىڭ ئاساسىنى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\log_a c\cdot\log_c a$;

(2) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 2$;

(3) $(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

لوگارىفمىنىڭ كەشىپ قىلىنىشى

16 -، 17 - ئەسىرلەر ئارىلىقىدا، ئاسترونومىيە، دېڭىز قاتنىشى، قۇرۇلۇش ۋە سودا ئىشلىرىنىڭ، شۇنداقلا ھەربىي ئىشلارنىڭ تەرەققىي قىلىشىغا ئەگىشىپ، رەقەملىك ھېسابلاش ئۇسۇلىنى ئىسلاھ قىلىش مەسىلىسى جىددىي ئورۇنداشقا تېگىشلىك ۋەزىپە بولۇپ قالدى. شۇنىڭ بىلەن شوتلاندىيىلىك ماتېماتىك ناپىر (J.Napier، 1550 ~ 1617 - يىللار) ئاسترونومىيە تەتقىقاتى بىلەن شۇغۇللىنىش جەريانىدا، ئۇنىڭدىكى ھېسابلاش مەسىلىلىرىنى ئاددىيلاشتۇرۇش ئۈچۈن لوگارىفمىنى كەشىپ قىلغان. لوگارىفمىنىڭ كەشىپ قىلىنىشى ماتېماتىكا تارىخىدىكى زور ئىش بولۇپ، ئاسترونومىيە ساھەسىدە ئالاھىدە ئالقىشلاندى. ئېنگېلس لوگارىفمىنىڭ كەشىپ قىلىنىشى، ئانالىتىك گېئومېترىيىنىڭ بارلىققا كېلىشى ۋە دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال ئىلمىنىڭ تۇرغۇزۇلۇشىنى 17 - ئەسىر ماتېماتىكىسىدىكى ئۈچ چوڭ مۇۋەپپەقىيەت دەپ ئاتىغان. گالىلېيمۇ: «ئەگەر ماڭا ماكان، زامان ۋە لوگارىفما بېرىلسە، بىر كائىنات بەرپا قىلغان بولاتتىم» دېگەن.

لوگارىفما كەشىپ قىلىنىشتىن ئىلگىرى، كىشىلەر تىرىگونومېترىيىلىك ئەمەللەردىكى تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ كۆپەيتمىسىنى تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەر-

نىڭ يىغىندىسى ياكى ئايرىمىسىغا ئايلاندۇرۇش ئۇسۇللىرىغا ناھايىتى پىششىق بولۇپ، گېرمانىيىلىك ماتېماتىك شتىفېل (M.Stifel، تەخمىنەن 1487 ~ 1567 ـ يىللار) نىڭ «ئۇنىۋېرسال ئارىفمېتىكا» (1544) دا بايان قىلىنغان

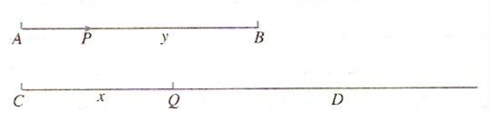
$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ \cdots \qquad (1)$$

بىلەن

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋىتى ($r^n \to n$) ۋە ئەمەللەر خۇسۇسىيىتى (يەنى ئۈستۈنكى بىر قۇردىكى رەقەملەرنىڭ كۆپەيتمىسى، بۆلۈنمىسى، دەرىجىگە كۆتۈرۈلۈشى ۋە يىلتىز چىقىرىلىشى ئاستىنقى بىر قۇردىكى رەقەملەرنىڭ يىغىندىسى، ئايرىمىسى، كۆپەيتمىسى، بۆلۈنمىسىگە ماس كېلىدۇ) كىشىلەر ئارىسىغا كەڭ تارقالغانىدى. ناپىر ئەمەللەر سىستېمىسىنى كۆپ يىل تەتقىق قىلىش ئارقىلىق، 1614 ـ يىلى «ئاجايىپ لوگارىفما قانۇنلىرىنىڭ چۈشەندۈرۈلۈشى» دېگەن كىتابىنى نەشر قىلدۇرغان، كىتابتا كىنېماتىكا پايدىلىنىلغان بولۇپ، لوگارىفما ئۇسۇللىرى گېئومېترىيىلىك ئاتالغۇلار ئارقىلىق شەرھلەنگەن.

رەسىمدىكىدەك، P، Q ئىككى نۇقتىنى ئوخشاش دەسلەپكى تېزلىكتە ھەرىكەت قىلىدۇ دەپ پەرەز قىلىمىز. Q نۇقتا CD تۈز سىزىقنى بويلاپ تەكشى ھەرىكەت قىلىدۇ ھەمدە $CQ=x$ بولىدۇ؛ P نۇقتا AB كېسمك (ئۇزۇنلۇقى 10^7 بىرلىككە تەڭ) نى بويلاپ ھەرىكەت قىلىدۇ، ئۇنىڭ ھەرقانداق بىر نۇقتىدىكى تېزلىك قىممىتى ئۇ تېخى بېسىپ ئۆتمىگەن ئارىلىق ($PB=y$) قا تەڭ. ئەگەر P بىلەن Q نى بىرلا ۋاقىتتا ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا A ۋە C دىن يولغا چىقىدۇ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا x نى y نىڭ لوگارىفمىسى دەپ ئېنىقلىما بېرىمىز.



ناپىرنىڭ قارىشىچە، (1) دىكى ئىككى سانىنىڭ ئارىلىقى ئىمكانقەدەر كىچىك بولۇشى كېرەك، شۇڭا ئۇ $r=1-10^{-7}=0.999\,999\,9$ نى تاللىۋالغان. ئۇنلۇق كەسىر چېكىتنىڭ ئاۋارىچىلىكىدىن قۇتۇلۇش ئۈچۈن، ئۇ يەنە ھەربىر دەرىجىنى 10^7 گە كۆپەيتكەن، شۇنىڭ بىلەن AB كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقى 10^7 بىرلىككە تەڭ بولغان. شۇنداق قىلىپ، ناپىر لوگارىفمىسىدىكى x بىلەن y نىڭ ماسلىق مۇناسىۋىتىنى ھازىرقى ماتېماتىكىلىق بەلگىلەر بىلەن بايان قىلساق مۇنداق بولىدۇ:

$$y=10^7\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{x}{10^7}}.$$

بۇنىڭدىكى e تەبىئىي لوگارىفمىنىڭ ئاساسىدۇر. ناپىر لوگارىفمىدىن پايدىلىنىپ $0° \sim 90°$ قىچە بولغان ھەر $1'$ ئارىلىقنىڭ سەككىز خانىلىق تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە جەدۋىلىنى تۈزۈپ چىققان.

ناپىرنىڭ دوستى بىرىگس (H.Briggs، 1561 ~ 1631 ـ يىللار) لوگارىفمىغا ئۆزگەرتىش كىرگۈزۈپ، ئۇنى كەڭ تارقاتقان. ئۇ «ئاجايىپ لوگارىفما قانۇنلىرىنىڭ چۈشەندۈرۈلۈشى» دېگەن كىتابىنى تەتقىق قىلىش ئارقىلىق ئۇنىڭدىكى لوگارىفمىنى ئىشلىتىش ناھايىتى قولايسىز

ئىكەنلىكىنى ھېس قىلغان. شۇنىڭ بىلەن ئۇ ناپىر بىلەن مەسلىھەتلىشىپ، 1 نىڭ لوگارىفمىسىنى 0، 10 نىڭ لوگارىفمىسىنى 1 قىلىپ بەلگىلىگەن، شۇنىڭ بىلەن ھازىر قوللىنىلىۋاتقان 10 نى ئاساس قىلغان ئونلۇق لوگارىفما مەيدانغا كەلگەن. بىزنىڭ سانلار سىستېمىمىز ئونلۇق سىستېما بولغانلىقتىن، ئۇ سانلىق قىممەتلەرنى ھېسابلاشتا ئونلۇق لوگارىفمىنىڭ ئەۋزەللىكىگە ئىگە. برىگس 1624 - يىلى «لوگارىفملىق ئارىفمېتىكا» دېگەن كىتابىنى نەشر قىلدۇرۇپ، 10 نى ئاساس قىلغان 1 ~ 20 000 غىچە ۋە 90 000 ~ 100 000 غىچە بولغان 14 خانىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئونلۇق لوگارىفما جەدۋىلىنى ئېلان قىلغان.

لوگارىفمىنىڭ ئەمەللەر قائىدىسىگە ئاساسەن، كىشىلەر يەنە لوگارىفملىق ھېسابلاش سىزغۇچى (لېنىيكى)نى كەشىپ قىلغان. 300 يىلدىن كۆپرەك ۋاقىتتىن بۇيان، لوگارىفملىق ھېسابلاش سىزغۇچى ئىزچىل تۈردە ئىلىم - پەن خادىملىرىنىڭ بولۇپمۇ قۇرۇلۇش تېخنىك خادىملىرىنىڭ زۆرۈر ھېسابلاش قورالى بولۇپ كەلگەن، تاكى 20 - ئەسىرنىڭ 70 - يىللىرىغا كەلگەندىلا ئاندىن ئۇنىڭ ئورنىنى ئېلېكترونلۇق ھېسابلىغۇچ ئالغان. گەرچە لوگارىفملىق ھېسابلاش سىزغۇچى، لوگارىفما جەدۋىلى بىر خىل ھېسابلاش قورالى بولۇش سۈپىتى بىلەن ئانچە مۇھىم بولماي قالغان بولسىمۇ، ئەمما لوگارىفملىق ئىدىيىۋى ئۇسۇل ئۆزىنىڭ ھاياتىي كۈچىنى يەنىلا نامايان قىلىپ كەلمەكتە.

لوگارىفمىنىڭ كەشىپ قىلىنىش جەريانىدىن شۇنى بايقىيالايمىزكى، ناپىر لوگارىفما ئۇقۇمىنى مۇھاكىمە قىلغاندا، كۆرسەتكۈچ بىلەن لوگارىفمىنىڭ ئۆزئارا تەتۈر مۇناسىۋىتىدىن پايدىلانمىغان، بۇنداق بولۇشىدىكى ئاساسىي سەۋەب — ئەينى چاغدا كۆرسەتكۈچ ئۇقۇمى تېخى ئايدىڭلاشتۇرۇلمىغان بولۇپ، ھەتتا كۆرسەتكۈچ بەلگىسىنىمۇ 20 نەچچە يىلدىن كېيىن، يەنى 1637 - يىلى فرانسىيىلىك ماتېماتىك دېكارت (R. Descartes، 1596 ~ 1650 - يىللار) ئاندىن ئىشلىتىشكە باشلىغان. 18 - ئەسىرگە كەلگەندە، شۋېتسارىيىلىك ماتېماتىك ئېيلېر كۆرسەتكۈچ بىلەن لوگارىفمىنىڭ ئۆزئارا تەتۈر مۇناسىۋەتتە بولىدىغانلىقىنى بايقىغان. 1770 - يىلى نەشر قىلىنغان بىر ئەسەردە، ئېيلېر ئەڭ ئاۋۋال $y=a^x$ دىن پايدىلىنىپ $x=\log_a y$ كە ئېنىقلىما بەرگەن ھەمدە «لوگارىفمىنىڭ كېلىپ چىقىش مەنبەسى كۆرسەتكۈچتۇر» دەپ كۆرسەتكەن. شۇنىڭ بىلەن، لوگارىفمىنىڭ ئىجاد قىلىنىشى كۆرسەتكۈچتىن بۇرۇن بولۇپ، ماتېماتىكا تارىخىدا ئاجايىپ خەۋەر بولغان.

لوگارىفمىنىڭ كەشىپ قىلىنىش جەريانىدىن شۇنى كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئىجتىمائىي ئىشلەپچىقىرىش ۋە پەن - تېخنىكىنىڭ ئېھتىياجى ماتېماتىكا تەرەققىياتىنىڭ مۇھىم ھەرىكەتلەندۈرگۈچ كۈچى ھېسابلىنىدۇ. لوگارىفما بىلەن كۆرسەتكۈچ ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنىڭ تۇرغۇزۇلۇش جەريانى ياخشىراق بەلگە سىستېمىسىدىن پايدىلىنىشنىڭ ماتېماتىكا تەرەققىياتىدا ئىنتايىن مۇھىملىقىنى ئىپادىلەيدۇ. ئەمەلىيەتتە قوللىنىشقا ئەپلىك ماتېماتىكىلىق بەلگىلەر كىشىلەرنىڭ تەپەككۇر يۈكىنى زور دەرىجىدە يەڭگىللىتىدۇ. دېمەك ماتېماتىكلار ماتېماتىكىلىق بەلگە سىستېمىسىنىڭ تەرەققىي قىلىشى ۋە مۇكەممەللىشىشى ئۈچۈن ئۇزاق مۇددەت جاپالىق تىرىشقان.

2-2-2 لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيىتى

1.2.2 ـ ماۋزۇدا بېرىلگەن 6 ـ مىسالدىكىدەك، ئارخېئولوگلار ئادەتتە قېزىۋېلىنغان يادىكارلىق، قەدىمىي خارابىلىكلەردىكى ئۆلگەن جانلىقنىڭ يېپىشما قالدۇقىنى ئېلىپ، قېزىۋېلىنغان يادىكارلىق ياكى قەدىمىي خارابىلىكنىڭ يىلىنى $t=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}P$ دىن پايدىلىنىپ مۆلچەرلەپ ھېسابلايدۇ. مەسىلىنىڭ ئەمەلىي مەنىسىدىن بىلەلەيمىزكى، ھەربىر كاربون 14 نىڭ مىقدارى P غا نىسبەتەن، ماسلىق مۇناسىۋىتى $t=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}P$ بويىچە بىردىنبىر ئېنىق يىل t ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ، شۇڭا t دېگىنىمىز P نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ.

ئومۇمەن، فۇنكسىيە $y=\log_a x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) **لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە** (logarithmic function) دەپ ئاتىلىدۇ، بۇنىڭدىكى x ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولۇپ، فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى $(0, +\infty)$ بولىدۇ.

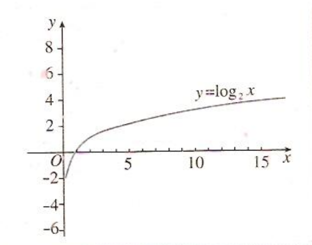
ئەمدى لوگارىفمىلىق فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

ئىشنى فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ ۋە $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ نى مۇھاكىمە قىلىشتىن باشلايلى.

ئۆزۈڭلار x، y لەرنىڭ ماس قىممەتلەر جەدۋىلى، يەنى 3.2 ـ جەدۋەلنى تاماملاپ، فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ نىڭ گرافىكىنى نۇقتا ئارقىلىق تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ سىزىڭلار (1.2.2 ـ رەسىم).

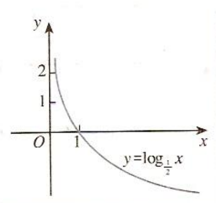
3.2 ـ جەدۋەل

x	y
0.5	−1
1	0
2	1
4	
6	
8	
12	
16	

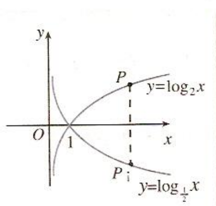


1.2.2 ـ رەسىم

ئوخشاشلا، $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ نىڭ گرافىكىنىمۇ x، y لەرنىڭ ماس قىممەتلەر جەدۋىلىنى تۈزۈۋېلىپ، ئاندىن نۇقتا ئارقىلىق تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ سىزىپ چىقالايمىز (2.2.2 ـ رەسىم).



2.2.2 ـ رەسىم



3.2.2 ـ رەسىم

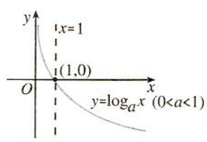
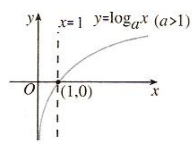
ئاساسنى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ $y=\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. (x, y)، $(x, -y)$ نۇقتىلار x ئوقىقا نىسبەتەن سىممېترىك بولغانلىقتىن، $y=\log_2 x$ بىلەن $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ نىڭ گرافىكلىرى x ئوقىقا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، 1.2.2 ـ رەسىمگە ئاساسەن فۇنكسىيە $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ نىڭ گرافىكىنى سىزىپ چىقالايمىز (3.2.2 ـ رەسىم).

ئىزدىنىش

ئاساس a ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) نىڭ ئوخشاش بولمىغان بىرقانچە قىممىتىنى ئېلىپ، ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا ماس لوگارىفملىق فۇنكسىيە گرافىكلىرىنى سىزىڭ ھەمدە ئۇلارنى كۆزىتىڭ. بۇ گرافىكلاردا قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىك بار ئىكەن؟

فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىشتا، جەدۋەل تۈزۈپ نۇقتا تەسۋىرلەش ئۇسۇلىدىن پايدىلانساق، شۇنداقلا ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلانساقمۇ بولىدۇ.

ئومۇمەن، لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y=\log_a x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) نىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيىتى تۆۋەندىكى جەدۋەلدە كۆرسىتىلگەندەك بولىدۇ:

	$0<a<1$	$a>1$
گرافىكى		
ئېنىقلىنىش ساھەسى	$(0, +\infty)$	
قىممەت ساھەسى	**R**	
خۇسۇسىيىتى	(1) مۇقىم نۇقتا $(1, 0)$ دىن ئۆتىدۇ، يەنى $x=1$ بولغاندا، $y=0$ بولىدۇ	
	(2) $(0, +\infty)$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ	(2) $(0, +\infty)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ

7 ـ مىسال تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تاپايلى:

(1) $y=\log_a x^2$; (2) $y=\log_a (4-x)$.

يېشىش: (1) $x^2>0$، يەنى $x\neq 0$ بولغانلىقتىن، فۇنكسىيە $y=\log_a x^2$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى مۇنداق بولىدۇ:

$$\{x|x\neq 0\}.$$

(2) $4-x>0$، يەنى $x<4$ بولغانلىقتىن، فۇنكسىيە $y=\log_a (4-x)$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى

مۇنداق بولىدۇ:

$$\{x|x<4\}.$$

8 ـ مىسال تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى قىممەتنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرايلى:

(1) $\log_2 3.4$, $\log_2 8.5$;

(2) $\log_{0.3} 1.8$, $\log_{0.3} 2.7$;

(3) $\log_a 5.1$, $\log_a 5.9$ ($a \neq 1$ ھەمدە $a>0$).

يېشىش: (1) فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە ھەمدە $3.4<8.5$ بولغانلىقتىن،

$$\log_2 3.4<\log_2 8.5;$$

(2) فۇنكسىيە $y=\log_{0.3} x$ ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە ھەمدە $1.8<2.7$ بولغانلىقتىن،

$$\log_{0.3} 1.8>\log_{0.3} 2.7;$$

(3) لوگارىفما ئاساسى a نىڭ 1 دىن چوڭ ياكى كىچىك بولۇشى لوگارىفمىلىق فۇنكسىيىنىڭ ئېشىش ـ كېمىيىشچانلىقىنى بەلگىلەيدۇ. شۇڭا، بۇ يەردە ئاساس a نىڭ 1 دىن چوڭ ۋە 1 دىن كىچىك بولۇشىدىن ئىبارەت ئىككى ئەھۋالغا ئايرىپ مۇھاكىمە قىلىشقا توغرا كېلىدۇ.

$a>1$ بولغاندا، فۇنكسىيە $y=\log_a x$ ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە ھەمدە $5.1<5.9$ بولغانلىقتىن،

$$\log_a 5.1<\log_a 5.9;$$

$0<a<1$ بولغاندا، فۇنكسىيە $y=\log_a x$ ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە ھەمدە $5.1<5.9$ بولغانلىقتىن؛

$$\log_a 5.1>\log_a 5.9.$$

9 ـ مىسال ئېرىتمىنىڭ كىسلاتا ـ ئىشقارلىق دەرىجىسىنى ئۆلچەش.

ئېرىتمىنىڭ كىسلاتا ـ ئىشقارلىق دەرىجىسى pH قىممىتى ئارقىلىق سۈرەتلىنىدۇ. pH نى ھېسابلاش فورمۇلىسى $pH=-\lg[H^+]$ بولۇپ، بۇنىڭدىكى $[H^+]$ ئېرىتمىدىكى ھىدروگېن ئىئونىنىڭ قويۇقلۇق دەرىجىسىنى ئىپادىلەيدۇ، بىرلىكى: mol/L.

(1) لوگارىفمىلىق فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتى ۋە pH نى ھېسابلاش فورمۇلىسىغا ئاساسەن، ئېرىتمىنىڭ كىسلاتا ـ ئىشقارلىق دەرىجىسى بىلەن ئېرىتمىدىكى ھىدروگېن ئىئونىنىڭ قويۇقلۇق دەرىجىسى ئارىسىدىكى ئۆزگىرىش مۇناسىۋىتىنى چۈشەندۈرەيلى؛

(2) ساپ سۇدىكى ھىدروگېن ئىئونىنىڭ قويۇقلۇق دەرىجىسى $[H^+]=10^{-7}$ mol/L ئىكەنلىكى بېرىلگەن، ساپ سۇنىڭ pH قىممىتىنى ھېسابلايلى.

يېشىش: (1) لوگارىفمىلىق فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىگە ئاساسەن، $(0, +\infty)$ دا $\lg[H^+]$ نىڭ قىممىتى $[H^+]$ نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ چوڭىيىدىغانلىقتىن، $-\lg[H^+]$ نىڭ قىممىتى ماس ھالدا

كىچىكلەپ بارىدۇ، شۇنىڭ بىلەن $pH=-\lg[H^+]$ غا ئاساسەن، pH قىممىتى $[H^+]$ نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ كىچىكلەيدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز. شۇڭا، ئېرىتمىدىكى ھىدروگېن ئىئونىنىڭ قويۇقلۇق دەرىجىسى قانچىكى چوڭ بولسا، pH قىممىتى شۇنچە كىچىك، يەنى ئېرىتمىنىڭ كىسلاتالىقى شۇنچە كۈچلۈك بولىدۇ.

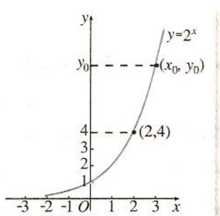
ئاشقازان كىسلاتاسىدىكى ھىدروگېن ئىئونىنىڭ قويۇقلۇق دەرىجىسى 2.5×10^{-2} mol/L بولسا، ئاشقازان كىسلاتاسىنىڭ pH قىممىتى قانچە بولىدۇ؟

(2) $[H^+]=10^{-7}$ بولغاندا، $pH=-\lg10^{-7}=7$ بولىدۇ. شۇڭا، ساپ سۇنىڭ pH قىممىتى 7 بولىدۇ.

ئەمەلىيەتتە، يېمەك - ئىچمەكنى نازارەت قىلىش - تەكشۈرۈش تارماقلىرى ساپ سۇنىڭ سۈپىتىنى نۇرغۇن تۈرلەر بويىچە تەكشۈرىدۇ، pH قىممىتىنى تەكشۈرۈش ئاشۇ تۈرلەرنىڭ بىرى ھېسابلىنىدۇ. دۆلەت ئۆلچىمىدە ئىچىدىغان ساپ سۇنىڭ pH قىممىتى 5.0 ~ 7.0 ئارىلىقىدا بولۇشى كېرەك دەپ بەلگىلەنگەن.

ئىزدىنىش

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=2^x$ تە، x ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، y بولسا ئەگىشىپ ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولىدۇ. ئەگەر y ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، x ئەگىشىپ ئۆزگەرگۈچى مىقدار قىلىنسا، ئۇ ھالدا x چوقۇم y نىڭ فۇنكسىيىسى بولامدۇ؟ ئەگەر راستتىنلا شۇنداق بولسا، ئۇلار ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋىتى قانداق بولىدۇ؟ ئەگەر ئۇنداق بولمايدۇ دەپ قارىسىڭىز، سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.



4.2.2 - رەسىم

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=2^x$ تە، x ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار ($x\in\mathbf{R}$)، y بولسا x نىڭ فۇنكسىيىسى ($y\in(0,+\infty)$) ھەمدە ئۇ $\mathbf{R}$ دا مونوتون ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ. شۇنى بايقاشقا بولىدۇكى، y نىڭ مۇسبەت يېرىم ئوقى ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا ئارقىلىق x ئوقىنىڭ پاراللېل سىزىقىنى ئۆتكۈزسەك، بۇ پاراللېل سىزىق بىلەن $y=2^x$ نىڭ گرافىكى بىر ۋە پەقەت بىرلا كېسىشىش نۇقتىسىغا ئىگە بولىدۇ (4.2.2 - رەسىم). ئۇنىڭ ئۈستىگە، كۆرسەتكۈچ بىلەن لوگارىفمنىڭ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادە $y=2^x$ تىن لوگارىفملىق ئىپادە $x=\log_2 y$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. شۇنداق قىلىپ، خالىغان بىر $y\in(0,+\infty)$ كە نىسبەتەن، $x=\log_2 y$ ئىپادە ئارقىلىق x نىڭ $\mathbf{R}$ دىكى بىردىنبىر ئېنىق قىممىتى ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا y نى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، x نى y نىڭ فۇنكسىيىسى دەپ قاراشقا بولىدۇ. بۇ چاغدا بىز $x=\log_2 y$ ($y\in(0,+\infty)$) نى فۇنكسىيە $y=2^x$ ($x\in\mathbf{R}$) نىڭ تەتۈر فۇنكسىيىسى (inverse function) دەيمىز.

فۇنكسىيە $x=\log_2 y$ تە، y ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، x بولسا فۇنكسىيە بولىدۇ. لېكىن ئادەتتە بىز x ئارقىلىق ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنى، y ئارقىلىق فۇنكسىيىنى ئىپادىلەشكە ئادەتلەنگەن.

شۇ سەۋەبتىن، بىز كۆپ ھاللاردا فۇنكسىيە $x=\log_2 y$ دىكى x، y ھەرپلەرنىڭ ئورنىنى ئالماشتۇرۇپ، ئۇنى $y=\log_2 x$ قىلىپ يازىمىز. شۇنداق قىلىپ، لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ $(x\in(0,\ +\infty))$ كۆرسەتكۆچلۈك فۇنكسىيە $y=2^x$ $(x\in\mathbf{R})$ نىڭ تەتۈر فۇنكسىيىسى بولىدۇ.

يۇقىرىقى مۇھاكىمىلەردىن بىلەلەيمىزكى، لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ $(x\in(0,\ +\infty)$ كۆرسەتكۆچلۈك فۇنكسىيە $y=2^x$ $(x\in\mathbf{R})$ نىڭ تەتۈر فۇنكسىيىسى، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، كۆرسەتكۆچلۈك فۇنكسىيە $y=2^x$ $(x\in\mathbf{R})$ مۇ لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ $(x\in(0,\ +\infty))$ نىڭ تەتۈر فۇنكسىيىسى بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، كۆرسەتكۆچلۈك فۇنكسىيە $y=2^x$ $(x\in\mathbf{R})$ بىلەن لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ $(x\in(0,\ +\infty))$ ئۆزئارا تەتۈر فۇنكسىيىلەردۇر.

يۇقىرىدىكى بايانلارغا تەقلىد قىلىپ، لوگارىفملىق فۇنكسىيە $y=\log_a x$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ بىلەن كۆرسەتكۆچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ نىڭ ئۆزئارا تەتۈر فۇنكسىيىلەر بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ.

مەشىق

1. فۇنكسىيە $y=\log_3 x$ بىلەن $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە بۇ ئىككى فۇنكسىيىنىڭ ئوخشايدىغان ۋە ئوخشىمايدىغان جايلىرىنى چۈشەندۈرۈڭ.

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=\log_5(1-x)$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$;

(3) $y=\log_7\dfrac{1}{1-3x}$;　　(4) $y=\sqrt{\log_3 x}$.

3. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى قىممەتنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $\log_{10}6$, $\log_{10}8$;　　(2) $\log_{0.5}6$, $\log_{0.5}4$;

(3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5$, $\log_{\frac{2}{3}}0.6$;　　(4) $\log_{1.5}1.6$, $\log_{1.5}1.4$.

$\ln|1+\frac{M}{m}|=6$ $1+\frac{M}{m}=e^6=$

11 01,5

$\frac{M}{m}=1100$

2.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادىلەرنى لوگارىفملىق ئىپادىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $3^x=1$;　　(2) $4^x=\frac{1}{6}$;

(3) $4^x=2$;　　(4) $2^x=0.5$;

(5) $10^x=25$;　　(6) $5^x=6$.

2. تۆۋەندىكى لوگارىفملىق ئىپادىلەرنى كۆرسەتكۈچلۈك ئىپادىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $x=\log_5 27$;　　(2) $x=\log_8 7$;

(3) $x=\log_4 3$;　　(4) $x=\log_7 \frac{1}{3}$;

(5) $x=\lg 0.3$; $10^x=0.3$　　(6) $x=\ln\sqrt{3}$.

3. ھېسابلاڭ:

(1) $\log_a 2+\log_a \frac{1}{2}$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 0$);　　(2) $\log_3 18-\log_3 2$;

(3) $\lg \frac{1}{4}-\lg 25$;　　(4) $2\log_5 10+\log_5 0.25$;

(5) $2\log_5 25-3\log_2 64$;　　(6) $\log_2(\log_2 16)$.

4. $\lg 2=a$، $\lg 3=b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\lg 6$;　　(2) $\log_3 4$;

(3) $\log_2 12$;　　(4) $\lg\frac{3}{2}$.

5. x نىڭ لوگارىفمىسى بېرىلگەن، x نى تېپىڭ:

(1) $\lg x=\lg a+\lg b$;　　(2) $\log_a x=\log_a m-\log_a n$;

(3) $\lg x=3\lg n-\lg m$;　　(4) $\log_a x=\frac{1}{2}\log_a b-\log_a c$.

$a(1+7.3\%)^x=4a$　$x=\log_{1.073}4\approx 20$ (يىل)

6. ئەگەر ئىلىمىز GDP قىممىتىنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتى %7.3 بولسا، تەخمىنەن قانچە يىلدىن كېيىن ئىلىمىزنىڭ GDP قىممىتى 1999 ـ يىلدىكىسى ئاساسىدا ئىككى قاتلىنىدۇ؟

7. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=\sqrt[3]{\log_2 x}$; $(0,+\infty)$　　(2) $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$. $(\frac{3}{4},1]$

8. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەر بېرىلگەن، مۇسبەت سان m بىلەن n نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $\log_3 m<\log_3 n$;　　(2) $\log_{0.3} m>\log_{0.3} n$;

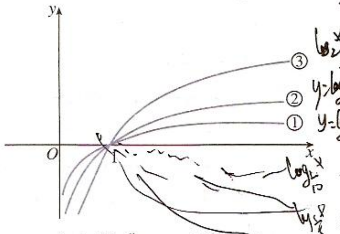
(3) $\log_a m<\log_a n(0<a<1)$;　　(4) $\log_a m>\log_a n(a>1)$.

2.718.

9. ھاۋانىڭ قارشىلىق كۈچىنى ھېسابقا ئالمىغان شەرت ئاستىدا، راكېتانىڭ ئەڭ يۇقىرى تېز-لىكى v m/s، يېقىلغۇنىڭ ماسسىسى M kg، راكېتا (يېقىلغۇدىن باشقا) نىڭ ماسسىسى m kg لارنىڭ فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋىتى ($v = 2000\ln(1+\frac{M}{m})$) بولىدۇ. ئۇنداق بولسا يېقىلغۇنىڭ ماسسىسى راكې-تا ماسسىسىنىڭ قانچە ھەسسىسى بولغاندا، راكېتانىڭ ئەڭ يۇقىرى تېزلىكى 12 km/s غا يېتىدۇ؟

$\frac{M}{m} \approx 402.$

10. رەسىمدە فۇنكسىيە $y = \lg x$، $y = \log_5 x$، $y = \log_2 x$ لارنىڭ گرافىكى بېرىلدى.



(10 ـ مىسال ئۈچۈن)

(1) قايسى فۇنكسىيە قايسى گرافىكقا ماس كېلىدىغانلىقىنى ھەمدە نېمە ئۈچۈن شۇنداق بولىدىغانلىقىنىڭ سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ؛

(2) بېرىلگەن گرافىكلارغا ئاساسلىنىپ، مۇشۇ كوئور-دىنات سىستېمىسىدا $y = \log_{\frac{1}{10}} x$، $y = \log_{\frac{1}{5}} x$، $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ لارنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ؛

(3) دىكى تەلەپ بويىچە سىزىلغان بۇ گرافىكلاردىن نېمىنى بايقىدىڭىز؟ (2)

11. (1) تۆۋەندىكى ئىپادىنىڭ قىممىتىنى ئاساسنى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ:

$\log_2 25 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 9$;

(2) ئاساسنى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ:

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

12. ئاتلانتىك ئوكيان سالمون بېلىقى ھەر يىلى سۇ ئېقىنى-غا قارشى ئۈزۈپ، ماكانىغا قايتىپ تۇخۇملايدۇ. سالمون بېلىقى-نى تەتقىق قىلىدىغان ئالىملار ئۇنىڭ ئۈزۈش تېزلىكىنى فۇنك-سىيە $v = \frac{1}{2}\log_3 \frac{O}{100}$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقىنى باي-قىغان، بۇ ئىپادىدىكى بىرلىك m/s بولۇپ، O بولسا سالمون بېلىقىنىڭ ئوكسىگېن سەرپ قىلىش مىقدارىنىڭ بىرلىك سانى.

(1) بىر سالمون بېلىقىنىڭ ئوكسىگېن سەرپ قىلىش مىقدارى 2700 بىرلىك بولغاندا، ئۇنىڭ ئۈزۈش تېزلىكى قانچىلىك بولىدۇ؟

(2) جىم تۇرغان بىر سالمون بېلىقىنىڭ ئوكسىگېن سەرپ قىلىش مىقدارىنىڭ بىرلىك سانىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئەگەر $x\log_3 4 = 1$ بولسا، $4^x + 4^{-x}$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

2. ئەگەر $\log_a \frac{3}{4} < 1$ ($a > 0$ ھەمدە $a \neq 1$) بولسا، ھەقىقىي سان a نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

3. ئاۋاز بېسىمى دەرىجىسى D (بىرلىكى: dB) نى ھېسابلاش فورمۇلىسى

$$D=10\lg\left(\frac{I}{10^{-16}}\right)$$

بولۇپ، بۇنىڭدىكى I ئاۋاز كۈچىنىشى (بىرلىكى: W/cm^2) نى ئىپادىلەيدۇ. ئاۋاز كۈچىنىشى $10^{-16}W/cm^2$ دىن كىچىك بولغاندا ئادەم ئاۋازنى ئاڭلىيالمايدۇ.

(1) ئادەملەرنىڭ تۆۋەن ئاۋازدا پاراڭلاشقان ($I=10^{-13}W/cm^2$) چاغدىكى ئاۋاز بېسىم دەرىجىسىنى تېپىڭ؛

(2) ئادەملەرنىڭ ئادەتتە پاراڭلاشقان ($I=3.16\times10^{-6}W/cm^2$) چاغدىكى ئاۋاز بېسىم دەرىجىسىنى تېپىڭ (1db غىچە ئېنىقلىقتا)؛

(3) سىمفونىيە كونسېرتلىرىدا كانايچىلار ئالدىدا ئولتۇرۇپ ئاڭلىغان ($I=5.01\times10^{-6}W/cm^2$) دىكى ئاۋاز بېسىم دەرىجىسىنى تېپىڭ (1 dB غىچە ئېنىقلىقتا).

4. فۇنكسىيە $f(x)=\log_a(x+1)$، $g(x)=\log_a(1-x)$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq1$) بېرىلگەن.

(1) فۇنكسىيە $f(x)+g(x)$ نىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ؛

(2) فۇنكسىيە $f(x)+g(x)$ نىڭ تاق - جۈپلۈكىگە ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

5. (1) «ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى خالىغان ھەقىقىي سان a، b لارغا نىسبەتەن، ھامان $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$ بولىدۇ» دېگەن شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان فۇنكسىيىدىن بىرقانچىنى مىسال كەلتۈرۈڭ، بۇ فۇنكسىيىلەرنىڭ قانداق ئورتاق خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە ئىكەنلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

(2) «ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى خالىغان ھەقىقىي سان a، b لارغا نىسبەتەن، ھامان $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$ بولىدۇ» دېگەن شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان فۇنكسىيىدىن بىرقانچىنى مىسال كەلتۈرۈڭ، بۇ فۇنكسىيىلەرنىڭ قانداق ئورتاق خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە ئىكەنلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

ئۆزئارا تەتۈر فۇنكسىيىلەر بولىدىغان ئىككى فۇنكسىيە گرافىكلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) بىلەن لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە $y=\log_a x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) نىڭ ئۆزئارا تەتۈر فۇنكسىيىلەر بولىدىغانلىقى بىزگە مەلۇم. ئۇنداق بولسا، بۇ ئىككى فۇنكسىيىنىڭ گرافىكلىرى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ تۆۋەندە بىرقانچە مەسىلە بېرىلدى، ئۆگەنگەن ماتېماتىكىلىق بىلىملىرىڭىزدىن پايدىلىنىپ ئىزدىنىپ كۆرۈڭ، قېنى ئۇلاردىكى سىرلارنى بايقىيالامسىزكىن.

1 ـ مەسىلە ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا (ئابسىېسسا ئوقى بىلەن ئوردىنات ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇق بىرلىكى بىردەك) كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=2^x$ بىلەن ئۇنىڭ تەتۈر فۇنكسىيىسى $y=\log_2 x$ نىڭ گرافىكىنى سىزىڭ، بۇ ئىككى فۇنكسىيە گرافىكى ئارىسىدا قانداق سىممېترىكلىك مۇناسىۋەت بارلىقىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟

2 ـ مەسىلە $y=2^x$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدىن بىرقانچە نۇقتىنى، مەسىلەن، $P_1\left(-1,\frac{1}{2}\right)$، $P_2(0,1)$، $P_3(1,2)$ لارنى ئېلىڭ، P_1، P_2، P_3 لەرنىڭ $y=x$ كە نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىلىرىنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم نېمە بولىدۇ؟ بۇ نۇقتىلار $y=\log_2 x$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدە ياتامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

3 ـ مەسىلە ئەگەر $P_0(x_0,y_0)$ نۇقتا فۇنكسىيە $y=2^x$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدە ياتسا، ئۇ ھالدا P_0 نىڭ تۈز سىزىق $y=x$ كە نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى فۇنكسىيە $y=\log_2 x$ نىڭ گرافىكى ئۈستىدە ياتامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

4 ـ مەسىلە يۇقىرىقىلاردىن قانداق يەكۈننى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ؟

5 ـ مەسىلە يۇقىرىقى يەكۈن كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) بىلەن ئۇنىڭ تەتۈر فۇنكسىيىسى $y=\log_a x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) كە نىسبەتەن يەنىلا كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

3-2 دەرىجىلىك فۇنكسىيە

ئالدى بىلەن بىز بىرقانچە كونكرېت مەسىلىنى كۆرۈپ باقايلى:

(1) ئەگەر راھىلە ھەر كىلوگرامىنىڭ باھاسى 1 يۈەن بولغان كۆكتاتتىن w كىلوگرام سېتىۋالغان بولسا، ئۇ ھالدا ئۇ مال ساتقۇچىغا (يۈەن)$p=w$ تۆلىشى كېرەك، بۇ يەردىكى p بولسا w نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ؛

(2) ئەگەر كۋادراتنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى a بولسا، ئۇ ھالدا كۋادراتنىڭ يۈزى $S=a^2$ بولۇپ، بۇ يەردىكى S بولسا a نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ؛

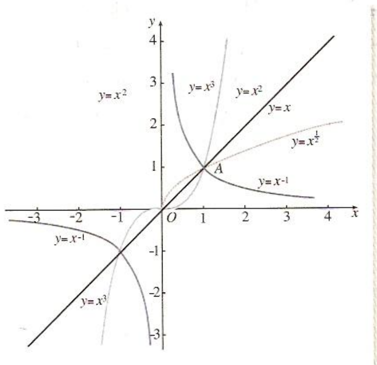
(3) ئەگەر كۇبنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى a بولسا، ئۇ ھالدا كۇبنىڭ ھەجمى $V=a^3$ بولۇپ، بۇ يەردىكى V بولسا a نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ؛

(4) ئەگەر كۋادرات شەكىللىك بىر پارچە يەرنىڭ مەيدانى S بولسا، ئۇ ھالدا بۇ كۋادراتنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى $a=S^{\frac{1}{2}}$ بولۇپ، بۇ يەردىكى a بولسا S نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ؛

(5) ئەگەر بىر ئادەم t s ئىچىدە ۋېلسىپىتلىك 1 km ماڭغان بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئادەمنىڭ ئوتتۇرىچە ۋېلسىپىت مىنىش تېزلىكى $v=t^{-1}$km/s بولۇپ، بۇ يەردىكى v بولسا t نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

يۇقىرىقى مەسىلىلەردىكى فۇنكسىيەلەر قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟



1.3.2 ـ رەسىم

يۇقىرىقى مەسىلىلەرگە چېتىلىدىغان فۇنكسىيەلەرنىڭ ھەممىسى $y=x^{\alpha}$ كۆرۈنۈشتىكى فۇنكسىيەلەردۇر.

ئومۇمەن، فۇنكسىيە $y=x^{\alpha}$ **دەرىجىلىك فۇنكسىيە** (Power function) دەپ ئاتىلىدۇ، بۇنىڭدىكى x ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار، α بولسا تۇراقلىق سان بولىدۇ.

دەرىجىلىك فۇنكسىيىگە نىسبەتەن، بىز پەقەت $\alpha=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ بولغاندىكى ئەھۋاللارنىلا مۇھاكىمە قىلىمىز.

ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق

كوئوردېنات سىستېمىسىدا دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x$ ، $y=x^2$ ، $y=x^3$ ، $y=x^{\frac{1}{2}}$ ، $y=x^{-1}$ لەرنىڭ گرافىكىنى سىزايلى (1.3.2 ـ رەسىم).

ئىزدىنىش

1.3.2 ـ رەسىمنى كۆزىتىپ، بايقىغان يەكۈنىڭىزنى جەدۋەلگە تولدۇرۇڭ.

	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
ئېنىقلىنىش ساھەسى					
قىممەت ساھەسى					
جۈپ ـ تاقلىقى					
مونوتونلۇقى					
ئورتاق نۇقتىسى					

1.3.2 ـ رەسىم ۋە جەدۋەلگە ئاساسەن تۆۋەندىكىلەرنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

(1) فۇنكسىيە $y=x$ ، $y=x^2$ ، $y=x^3$ ، $y=x^{\frac{1}{2}}$ ، $y=x^{-1}$ لەرنىڭ گرافىكلىرى (1, 1) نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) فۇنكسىيە $y=x$ ، $y=x^3$ ، $y=x^{-1}$ لەر تاق فۇنكسىيە، $y=x^2$ جۈپ فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(3) ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا فۇنكسىيە $y=x$ ، $y=x^2$ ، $y=x^3$ ، $y=x^{\frac{1}{2}}$ لەر ئاشقۇچى فۇنكسىيە، $y=x^{-1}$ بولسا كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(4) 1 ـ چارەكتە، فۇنكسىيە $y=x^{-1}$ نىڭ گرافىكى يۇقىرىغا قاراپ y ئوققا چەكسىز يېقىنلىشىدۇ، ئوڭغا قاراپ x ئوققا چەكسىز يېقىنلىشىدۇ.

1 ـ مىسال دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=\sqrt{x}$ نىڭ $[0, +\infty)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات: خالىغان $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ نى ئالساق ھەمدە $x_1 < x_2$ بولسا، ئۇ ھالدا

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$$

$$=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

$$=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}},$$

چۈنكى $x_1-x_2<0$ ، $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$ ،

شۇنىڭ ئۈچۈن $f(x_1)<f(x_2)$ ، يەنى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=\sqrt{x}$ ئىنتېرۋال $[0, +\infty)$دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

3.2 ـ كۆنۈكمە

1. فۇنكسىيە $y=\frac{1}{x^2}$ ، $y=2x^2$ ، $y=x^2+x$ ، $y=1$ لەرنىڭ قايسىسى دەرىجىلىك فۇنكسىيە بولىدۇ؟

2. دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ گرافىكى $(2, \sqrt{2})$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن، بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى تېپىڭ. $y=x^a$, $(2,\sqrt{2})$ $a=\frac{1}{2}$ ∴ $y=x^{\frac{1}{2}}$ $(x\geq 0)$

3. بېسىم پەرقى مۇقىم (بېسىم پەرقى تۇراقلىق سان) بولغاندا، گازنىڭ دۈگىلەك تۇرۇبىدىن ئۆتكەندىكى ئېقىش سۈرئىتى v (بىرلىكى: cm^3/s) بىلەن تۇرۇبا رادىئۇسى r (بىرلىكى: cm) نىڭ 4 - دەرىجىسى ئوڭ تاناسىپ تۈزىدۇ. $v=k\cdot r^4 (k>0)$

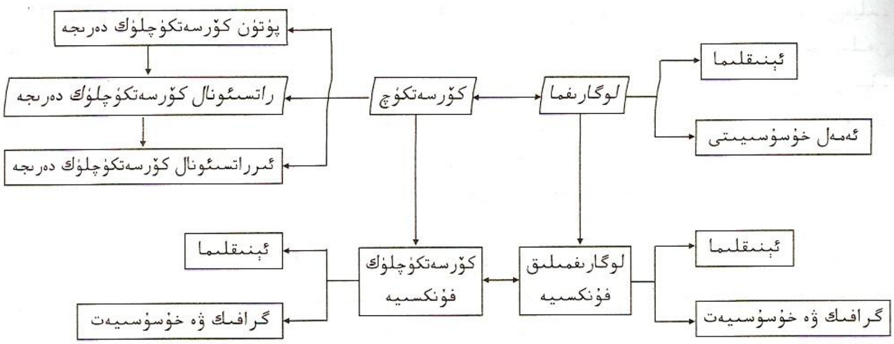
(1) گازنىڭ ئېقىش سۈرئىتى v نىڭ تۇرۇبا رادىئۇسى r غا دائىر فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى يېزىڭ؛

(2) ئەگەر گازنىڭ رادىئۇسى 3 cm بولغان تۇرۇبىدىن ئۆتكەندىكى ئېقىش سۈرئىتى $400\ cm^3/s$ بولسا، مۇشۇ گازنىڭ رادىئۇسى r بولغان تۇرۇبىدىن ئۆتكەندىكى ئېقىش سۈرئىتى v نىڭ ئىپادىسىنى تېپىڭ؛ (2) $r=3$, $v=400$ $k=\frac{400}{81}$ ∴ $v=\frac{400}{81}r^4$

(3) (2) دە دېيىلگەن گاز رادىئۇسى 5 cm بولغان تۇرۇبىدىن ئۆتكەن بولسا، بۇ گازنىڭ ئېقىش سۈرئىتىنى ھېسابلاڭ ($1cm^3/s$ قىچە ئېنىقلىقتا). $r=5$. ∴ $v=\frac{400}{81}\cdot 5^4 = \frac{400}{81}\times 5^4 \approx 3086 (cm^3/s)$

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. فۇنكسىيە ئوبيېكتىپ دۇنيادىكى ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان مۇھىم ماتېماتىكىلىق مودېل بولۇپ، ئوخشاش بولمىغان ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى ئوخشاش بولمىغان فۇنكسىيە مودېللىرى بىلەن تەسۋىرلەشكە توغرا كېلىدۇ. بۇ بابتا ئۆگەنگەن ئوخشاش بولمىغان تىپتىكى ئۈچ خىل فۇنكسىيە مودېلى ئوبيېكتىپ دۇنيادىكى ئوخشاش بولمىغان ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىگە ئىگە، يەنى ئوخشاش بولمىغان ماسلىق مۇناسىۋىتىگە ئىگە ئۈچ خىل ئۆزگىرىش ھادىسىسىنى سۈرەتلەپ بېرىدۇ.

2. كۆرسەتكۈچ ۋە لوگارىفما ئۇقۇملىرى رېئال ئارقا كۆرۈنۈشتىن مەيدانغا كەلگەن، سىز بۇ ھەقتە بىرقانچە ئەمەلىي مىسال كەلتۈرەلەمسىز؟

بىز مۇسبەت پۈتۈن كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنى كېڭەيتىش ئارقىلىق راتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنى ۋۇجۇدقا كەلتۈرۈپ، يەنە «راتسىئونال ساننى ئىرراتسىئونال سانغا يېقىنلاشتۇرۇش» ئىدىيىسىدىن پايدىلىنىپ ھەقىقىي كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە بىلەن تونۇشۇۋالدۇق. بۇ جەريان ماتېماتىكىلىق ئۇقۇمنى كېڭەيتىشتىن ئىبارەت ئاساسىي ئىدىيىنى گەۋدىلەندۈرۈپ بېرىدۇ. سىزنىڭچە، بۇ جەرياندا نېمىلەرنى ئۆگىنىۋالدىڭىز؟

3. بىز مۇسبەت پۈتۈن كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنى كېڭەيتىش ئارقىلىق راتسىئونال كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجە ۋە ھەقىقىي كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنىڭ ئەمەل خۇسۇسىيىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىپ، يەنە لوگارىفما بىلەن كۆرسەتكۈچنىڭ ئۆزئارا باغلىنىشى ۋە كۆرسەتكۈچلۈك دەرىجىنىڭ ئەمەل خۇسۇسىيىتىنى ئاساس قىلغان ھالدا لوگارىفمىنىڭ ئەمەل خۇسۇسىيىتىگە ئىگە بولدۇق. ئۇنداق بولسا، لوگارىفمىنىڭ ئەمەل خۇسۇسىيىتىنى ئۆزىڭىز مۇستەقىل كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

4. كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ $(a>0$ ھەمدە $a\neq 1)$ ئوبيېكتىپ دۇنيادىكى نۇرغۇن شەيئىلەرنىڭ تەرەققىيات ئۆزگىرىشىنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان مۇھىم فۇنكسىيە مودېلى بولۇپ، ئۇ بىز تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ باسقۇچىدا ئۆگەنگەن تۇنجى فۇنكسىيە مودېلى ھېسابلىنىدۇ. ئۇنداق بولسا، كۆرسەت-

كۆچلۈك فۇنكسىيە ئۇقۇمى ۋە ئۇنىڭ خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلىش جەريانىنى ئەسلىيەلەمسىز؟ ئۇنىڭدىن بىر فۇنكسىيىنى مۇھاكىمە قىلىشتا قوللىنىلىدىغان ئىدىيىۋى ئۇسۇلنى ھېس قىلالامدىڭىز-مۇ؟ لوگارىفملىق فۇنكسىيىنى مۇھاكىمە قىلىش جەريانىنى ئەسلىيەلەمسىز؟ سىزنىڭچە كۆرسەتكۆچلۈك فۇنكسىيە ۋە لوگارىفملىق فۇنكسىيە خۇسۇسىيەتلىرىنىڭ رولى نېمە؟

5. ماتېماتىكىنىڭ تەرەققىيات تارىخىدا، رېئال ئىشلەپچىقىرىش ئەمەلىيىتىنىڭ ئېھتىياجى تۈپەيلىدىن، لوگارىفما ئۇقۇمى كۆرسەتكۆچتىن بالدۇر مەيدانغا كەلگەن، ئۇنىڭ ئۈستىگە، لوگارىفما بىلەن كۆرسەتكۆچنىڭ ئۆزئارا تەتۈر مۇناسىۋەتتە بولىدىغانلىقى تېخىمۇ كېيىن بايقالغان. ھالبۇكى، بىز نۆۋەتتىكى ئۆگىنىشىمىزنى كۆرسەتكۆچتىن باشلاپ، لوگارىفما ئۇقۇمىنى لوگارىفما بىلەن كۆرسەتكۆچنىڭ ئۆزئارا تەتۈر مۇناسىۋىتىگە ئاساسلىنىپ چىقاردۇق. سىزنىڭچە، دەرسلىكتىكى مۇشۇنداق ئورۇنلاشتۇرۇلۇشنىڭ قانداق پايدىلىق تەرىپى بار؟ يېتەرسىز تەرىپىچۇ؟

6. بىر تۈردىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلىش دېگەنلىك ئەمەلىيەتتە مۇشۇ تۈردىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىككە ئىگە ئىكەنلىكى ئۈستىدە ئىزدىنىش دېگەنلىكتۇر. مەسىلەن، خالىغان $a>0$ گە نىسبەتەن $a^0=1$ بولىدىغانلىقتىن، كۆرسەتكۆچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$) نىڭ گرافىكى ھامان $(0, 1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ. سىز مۇشۇ ئىدىيىگە ئاساسلىنىپ ھەمدە فۇنكسىيە $y=x$، $y=x^2$، $y=x^3$، $y=x^{-1}$، $y=x^{\frac{1}{2}}$ لەرنىڭ گرافىكلىرىغا بىرلەشتۈرۈپ، دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^\alpha$ ھەمدە $\alpha\in \mathbf{R}$ نىڭ ئاساسىي خۇسۇسىيىتى ئۈستىدە مۇھاكىمە ئېلىپ بارالامسىز؟

7. فۇنكسىيىنى مۇھاكىمە قىلغاندا ئۇنىڭ گرافىكىنىڭ رولىغا تولۇق ئەھمىيەت بېرىش كېرەك. ئۇنىڭدىن باشقا، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيە گرافىكىنى ئاسانلا سىزىپ چىققىلى ھەمدە فۇنكسىيىنىڭ ئۆزگىرىش جەريانىنى ھەرىكەتچان ھالدا كۆزەتكىلى بولىدۇ، بۇ بىزنىڭ فۇنكسىيە خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلىشىمىز ئۈچۈن زور قولايلىق يارىتىپ بېرىدۇ.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $121^{\frac{1}{2}}$;   (2) $\left(\frac{64}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;   (3) $10\,000^{-\frac{3}{4}}$;   (4) $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

2. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$;

(2) $(a^2-2+a^{-2})\div(a^2-a^{-2})$.

3. (1) $\lg 2=a$ ، $\lg 3=b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\log_{12}5$ نى a ، b لار ئارقىلىق ئىپادىلەڭ؛

(2) $\log_2 3=a$ ، $\log_3 7=b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\log_{14}56$ نى a ، b لار ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.

4. تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$;   (2) $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

5. تۆۋەندىكى فۇنكسىيەلەرنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ:

(1) $y=\dfrac{1}{\log_3(3x-2)}$;

(2) $y=\log_a(2-x)$ ($a>0$ ھەمدە $a\neq 1$);

(3) $y=\log_a(1-x)^2$ ($a\neq 1$ ھەمدە $a>0$).

6. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى قىممەتنىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $\log_6 7$, $\log_7 6$;   (2) $\log_3 \pi$, $\log_2 0.8$.

7. $f(x)=3^x$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$;

(2) $f(x)\div f(y)=f(x-y)$.

8. $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ ، $a, b\in(-1, 1)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلاڭ:

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

9. كالا سۈتىنى يېڭى پېتى ساقلاش ۋاقتى ساقلىغان چاغدىكى تېمپېراتۇرىنىڭ يۇقىرى - تۆۋەنلىكىگە قاراپ ئوخشاش بولمايدۇ، يېڭى پېتى ساقلاش ۋاقتى بىلەن ساقلاش تېمپېراتۇرىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت كۆرسەتكۈچ تىپلىق فۇنكسىيە بولىدۇ دەپ پەرەز قىلىنغان. ئەگەر كالا سۈتىنى 0℃ لۇق توڭلاتقۇغا قويغاندىكى يېڭى پېتى ساقلاش ۋاقتى تەخمىنەن $192\,\text{h}$ ، 22℃ لۇق ئاشخانىغا قويغاندىكى

يېڭى پېتى ساقلاش ۋاقتى تەخمىنەن $42\,h$ بولسا:

(1) يېڭى پېتى ساقلاش ۋاقتى y (بىرلىكى: h) نىڭ ساقلاش تېمپېراتۇرىسى x (بىرلىكى: ℃) كە دائىر فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى يېزىڭ؛

(2) (1) دىكى يەكۈندىن پايدىلىنىپ، ساقلاش تېمپېراتۇرىسى 30℃ ۋە 16℃ بولغان چاغدىكى يېڭى پېتى ساقلاش ۋاقتىنى ئېيتىپ بېرىڭ (1h قىچە ئېنىقلىقتا)؛

(3) يۇقىرىقى سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن، بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.

10. دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ گرافىكى $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن، بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى تېپىڭ ھەمدە فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىپ، ئۇنىڭ جۈپ ـ تاقلىقى ۋە مونوتونلۇقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

B گۇرۇپپا

1. توپلام $A=\{y\,|\,y=\log_2 x,\ x>1\}$، $B=\{y\,|\,y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x>1\}$ لار بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا $A\cap B=(\quad)$.

(A) $\{y\,|\,0<y<\frac{1}{2}\}$ (B) $\{y\,|\,0<y<1\}$

(C) $\{y\,|\,\frac{1}{2}<y<1\}$ (D) $\varnothing$

2. ئەگەر $2^a=5^b=10$ بولسا، ئۇ ھالدا $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ ______.

3. فۇنكسىيە $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$ $(a\in\mathbf{R})$ بېرىلگەن.

(1) $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقى ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرۈڭ؛

(2) $f(x)$ فۇنكسىيىنى تاق فۇنكسىيە قىلىدىغان ھەقىقىي سان a مەۋجۇتمۇ؟

4. فۇنكسىيە $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$، $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $[g(x)]^2-[f(x)]^2=1$;

(2) $f(2x)=2f(x)\cdot g(x)$;

(3) $g(2x)=[g(x)]^2+[f(x)]^2$.

5. جىسىمنى سوغۇق ھاۋادا سوۋۇتقاندا، ئەگەر جىسىمنىڭ ئەسلىدىكى تېمپېراتۇرىسى θ_1℃، ھاۋانىڭ تېمپېراتۇرىسى θ_0℃ بولسا، t min ئۆتكەندىكى جىسىمنىڭ تېمپېراتۇرىسى θ℃ نى فورمۇلا

$$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$$

دىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولىدۇ، بۇ يەردىكى k بولسا جىسىم بىلەن ھاۋانىڭ تېگىشىش ئەھۋالىغا قاراپ بەلگىلىنىدىغان مۇسبەت تۇراقلىق سان. 62℃ لۇق جىسىم 15℃ لۇق ھاۋادا سوۋۇتۇلغاندا 1 min ئۆتكەندىن كېيىن جىسىمنىڭ تېمپېراتۇرىسى 52℃ قا چۈشكەن بولسا، يۇقىرىقى ئىپادىدىكى k نىڭ قىمـ-

مىنۇتنى تېپىڭ (1 خانىلىق ئىناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېنىقلىقتا)، ئاندىن جىسىم سوۋۇشقا باشلاپ قانچە مىنۇت ئۆتكەندە ئۇنىڭ تېمپېراتۇرىسى 42℃، 32℃ قا چۈشىدىغانلىقىنى ئايرىم - ئايرىم ھېسابلاڭ. جىسىم 12℃ قىچە سوۋۇمدۇ - يوق؟

6. مەلۇم زاۋۇت كېرەكسىز گازنى ئاۋۋال سۈزۈپ، ئاندىن قويۇپ بېرىدۇ. سۈزۈش جەريانىدىكى كېرەكسىز گازدىكى بۇلغىما مىقدارى P mg/L بىلەن ۋاقىت t h ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت:

$$P=P_0 e^{-kt}.$$

ئەگەر ئالدىنقى 5 سائەتتە بۇلغىمىنىڭ 10% ى يوقىتىلغان بولسا:

(1) 10 سائەتتىن كېيىن بۇلغىمىنىڭ قانچە پىرسەنتى ئېشىپ قالىدۇ؟

(2) بۇلغىمىنى 50% ئازايتىش ئۈچۈن قانچىلىك ۋاقىت كېتىدۇ (1 h قىچە ئېنىقلىقتا)؟

(3) بۇلغىما مىقدارىنىڭ ۋاقىت ئۆزگىرىشىگە دائىر فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە گرافىكتا ھېسابلاش نەتىجىسىنى ئىپادىلەڭ.

3 ـ باب

فۇنكسىيىنىڭ قوللىنىلىشى

3ـ1 فۇنكسىيە ۋە تەڭلىمە

3ـ2 فۇنكسىيە مودېلى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى

بىز فۇنكسىيە ئۇقۇمى ۋە فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى، شۇنداقلا بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە قاتارلىق ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيە مودېللىرىنى ئۆگىنىپ، ئۇلاردىن پايدىلىنىپ رېئال دۇنيادىكى ئوخشاش بولمىغان ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى سۈرەتلەشكە بولىدىغانلىقىنى بىلىۋالدۇق. مەسىلەن، تەبىئىي شارائىتتىكى ھۈجەيرىنىڭ بۆلۈنۈشى، نوپۇسنىڭ ئېشىشى، جانلىق تېنىدىكى كاربون 14 نىڭ ئاجىزلىششى دېگەندەك ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە مودېلى بىلەن تەسۋىرلەشكە بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، بىر ئەمەلىي مەسىلىگە دۇچ كەلگەندە، ئۇنى ھەل قىلىش ئۈچۈن ماس فۇنكسىيە مودېلىنى قانداق تاللاش كېرەك؟

بۇ بابتا، فۇنكسىيە مودېلىنى تۇرغۇزۇش جەريانى ۋە ئۇسۇلىنى بىر قىسىم ئەمەلىي مەسىلىلەر ئارقىلىق ھېس قىلىپ، فۇنكسىيە ئىدىيىسىدىن دەسلەپكى قەدەمدە پايدىلىنىپ رېئال تۇرمۇشتىكى بەزى ئاددىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىمىز. ئۇنىڭدىن باشقا، بىز يەنە فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى ۋە خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىپ، تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى تېپىشتىكى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىنى ئۆگىنىمىز ھەمدە بۇ جەرياندا فۇنكسىيە بىلەن تەڭلىمىنىڭ باغلىنىشىنى چۈشىنىۋالىمىز.

3

ئىدېئال مۇھىتتا، تۇر توپىنىڭ سانى
كۆرسەتكۈچ بويىچە كۆپىيىدۇ؛ چەكلەنگەن مۇ-
ھىتتا، تۇر توپى سانىنىڭ كۆپىيىشى كۆرسەتكۈچ بو-
يىچە كۆپىيىشتىن لوگارىفما بويىچە كۆپىيىشكە
ئۆزگىرىدۇ ھەمدە تەدرىجىي ھالدا تۇرغۇنلىشىشقا
يۈزلىنىدۇ. ئۇنداق بولسا، بۇ ھادىسىلەرنى تەسۋىرلەش
ئۈچۈن، ئوخشاش بولمىغان فۇنكسىيە مودېللى-
رىنى قانداق تاللاش كېرەك؟

1-3 فۇنكسىيە ۋە تەڭلىمە

1-1-3 تەڭلىمىنىڭ يىلتىزى ۋە فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى

مۇلاھىزە؟

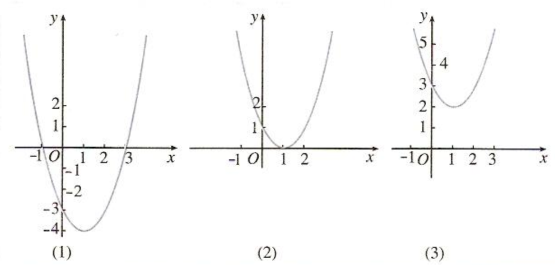
بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ نىڭ يىلتىزى بىلەن ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

ئالدى بىلەن بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە ۋە ئۇنىڭغا ماس كېلىدىغان ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىدىن بىرقانچىنى كۆزىتىپ باقايلى، مەسىلەن:

تەڭلىمە $x^2-2x-3=0$ بىلەن فۇنكسىيە $y=x^2-2x-3$؛

تەڭلىمە $x^2-2x+1=0$ بىلەن فۇنكسىيە $y=x^2-2x+1$؛

تەڭلىمە $x^2-2x+3=0$ بىلەن فۇنكسىيە $y=x^2-2x+3$.



1.1.3 ـ رەسىم

ئاسانلا بىلەلەيمىزكى، تەڭلىمە $x^2-2x-3=0$ نىڭ $x_1=-1$، $x_2=3$ تىن ئىبارەت ئىككى ھەقىقىي يىلتىزى بار بولۇپ، فۇنكسىيە $y=x^2-2x-3$ نىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقىنىڭ $(-1, 0)$، $(3, 0)$ دىن ئىبارەت ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بار بولىدۇ (1.1.3 ـ رەسىم (1) دىكىدەك). دېمەك، تەڭلىمە $x^2-2x-3=0$ نىڭ ئىككى ھەقىقىي يىلتىزى دەل فۇنكسىيە $y=x^2-2x-3$ نىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىلىرىنىڭ ئابسىسساسى بولىدۇ.

تەڭلىمە $x^2-2x+1=0$ نىڭ $x_1=x_2=1$ دىن ئىبارەت ئۆز ئارا تەڭ ئىككى ھەقىقىي يىلتىزى بار بولۇپ، فۇنكسىيە $y=x^2-2x+1$ نىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ $(1,0)$ دىن ئىبارەت بىردىنبىر كېسىشىش نۇقتىسى بار بولىدۇ (1.1.3 ـ رەسىم (2) دىكىدەك). دېمەك، تەڭلىمە $x^2-2x+1=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى دەل فۇنكسىيە $y=x^2-2x+1$ نىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئابسىسساسى بولىدۇ.

تەڭلىمە $x^2-2x+3=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى مەۋجۇت ئەمەس، فۇنكسىيە $y=x^2-2x+3$ نىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىمۇ مەۋجۇت ئەمەس (1.1.3 ـ رەسىم (3) تىكىدەك).

يۇقىرىقى مۇناسىۋەتلەر ئادەتتىكى بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ ۋە ئۇنىڭغا ماس كېلىدىغان ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ غا نىسبەتەنمۇ كۈچكە ئىگە بولىۋېرىدۇ.

ئېنىقلىغۇچى $\Delta=b^2-4ac$ دەپ پەرەز قىلىنسا، ئۇ ھالدا:

(1) $\Delta>0$ بولغاندا، بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ x_1، x_2 دىن ئىبارەت ئۆز ئارا تەڭ بولمىغان ئىككى ھەقىقىي يىلتىزى بار بولۇپ، ئۇنىڭغا ماس كېلىدىغان ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ $(x_1,0)$، $(x_2,0)$ دىن ئىبارەت ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بار بولىدۇ؛

(2) $\Delta=0$ بولغاندا، بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ $x_1=x_2$ دىن ئىبارەت ئۆز ئارا تەڭ بولغان ئىككى ھەقىقىي يىلتىزى بار بولۇپ، ئۇنىڭغا ماس كېلىدىغان ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ $(x_1,0)$ دىن ئىبارەت بىردىنبىر كېسىشىش نۇقتىسى بار بولىدۇ؛

(3) $\Delta<0$ بولغاندا، بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ ھەقىقىي يىلتىزى مەۋجۇت ئەمەس، ئۇنىڭغا ماس كېلىدىغان ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىمۇ مەۋجۇت ئەمەس.

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ماس بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە يىلتىزى بىلەن بولغان مۇناسىۋىتىنى ئومۇمىي ئەھۋالغا كېڭەيتىشكە بولىدۇ. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئالدى بىلەن فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى ئۇقۇمىنى ئوتتۇرىغا قويىمىز:

$y=f(x)$ فۇنكسىيىگە نىسبەتەن، $f(x)=0$ نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان ھەقىقىي سان x فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ **نۆل نۇقتىسى** (zero point) دەپ ئاتىلىدۇ.

شۇنداق قىلىپ، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى تەڭلىمە $f(x)=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى، يەنى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئابسىسساسى بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن:

تەڭلىمە $f(x)=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى بار

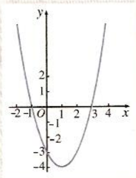
$\Leftrightarrow$ **$y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بار**

$\Leftrightarrow$ **$y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بار**

بۇنىڭدىن بىلەلەيمىزكى، تەڭلىمە $f(x)=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزىنى تېپىش دېگەنلىك $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسىنى ئېنىقلاش دېگەنلىك بولىدۇ. ئومۇمەن، يىلتىزىنى فورمۇلا ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولمايدىغان تەڭلىمە $f(x)=0$ گە نىسبەتەن، ئالدى بىلەن ئۇنى $y=f(x)$ فۇنكسىيە بىلەن باغلاشتۇرۇۋالىمىز، ئاندىن فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىپ نۆل نۇقتىنى تېپىپ، بۇ ئارقىلىق تەڭلىمىنىڭ يىلتىزىنى تاپىمىز.

ئىزدىنىش

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=x^2-2x-3$ نىڭ گرافىكى (2.1.3 ـ رەسىم) نى كۆزىتىش ئارقىلىق، فۇنكسىيە $f(x)=x^2-2x-3$ نىڭ ئىنتېرۋال $[-2, 1]$ دا نۆل نۇقتىغا ئىگە ئىكەنلىكىنى بايقاشقا بولىدۇ. $f(-2)$ بىلەن $f(1)$ نىڭ كۆپەيتمىسىنى ھېسابلاپ، بۇ كۆپەيتمىدە قانداق ئالاھىدىلىك بارلىقىنى بايقىيالامسىز؟ بۇ خىل ئالاھىدىلىك ئىنتېرۋال $[2, 4]$ دىمۇ يەنىلا مەۋجۇت بولامدۇ؟



2.1.3 ـ رەسىم

بايقاشقا بولىدۇكى، $f(-2)\cdot f(1)<0$ بولۇپ، $f(x)=x^2-2x-3$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $(-2, 1)$ دا نۆل نۇقتا $x=-1$ گە ئىگە ھەمدە ئۇ تەڭلىمە $x^2-2x-3=0$ نىڭ بىر يىلتىزى بولىدۇ. ئوخشاشلا، $f(2)\cdot f(4)<0$ بولۇپ، $f(x)=x^2-2x-3$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $(2, 4)$ دا نۆل نۇقتا $x=3$ كە ئىگە ھەمدە ئۇ تەڭلىمە $x^2-2x-3=0$ نىڭ يەنە بىر يىلتىزى بولىدۇ.

ئۆزۈڭلار بىرقانچە فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىپ ۋە كۆزىتىپ، يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش نەتىجىنى كەلتۈرۈپ چىقارغىلى بولىدىغان ـ بولمايدىغانلىقىغا قاراپ بېقىڭلار.

ئومۇمەن:

ئەگەر $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى گرافىكى ئۈزلۈكسىز ئەگرى سىزىق بولۇپ، يەنە $f(a)\cdot f(b)<0$ بولسا، ئۇ ھالدا $y=f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال (a, b) دا نۆل نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ، يەنى $f(c)=0$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان شۇنداق بىر $c\in(a, b)$ مەۋجۇت بولۇپ، بۇ c مۇ تەڭلىمە $f(x)=0$ نىڭ يىلتىزى بولىدۇ.

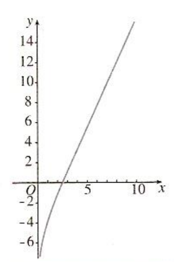
1 ـ مىسال $f(x)=\ln x+2x-6$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسىنىڭ سانىنى تاپايلى.

يېشىش: ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ x، $f(x)$ لەرنىڭ ماس قىممەتلەر جەدۋىلى (1.3 ـ جەدۋەل) نى تۈزەيلى ھەمدە فۇنكسىيە گرافىكى (3.1.3 ـ رەسىم) نى سىزايلى.

1.3 ـ جەدۋەل

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−4	−1.3069	1.0986	3.3863	5.6094	7.7918	9.9459	12.0794	14.1972

بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلىيالامسىز؟



3.1.3 ـ رەسىم

1.3 ـ جەدۋەل ۋە 3.1.3 ـ رەسىمدىن بىلەلەيمىزكى، $f(2)<0$، $f(3)>0$ بولغانلىقتىن، $f(2)\cdot f(3)<0$ بولىدۇ، بۇ، $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال (2, 3) ئىچىدە نۆل نۇقتىغا ئىگە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ. $f(x)$ فۇنكسىيە ئېنىقلىنىش ساھەسى $(0, +\infty)$ ئىچىدە ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولغانلىقتىن، ئۇ پەقەت بىرلا نۆل نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ.

مەشىق

1. فۇنكسىيە گرافىكىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەرنىڭ يىلتىزى بار ـ يوقلۇقىغا ھۆكۈم قىلىڭ، قانچە يىلتىزى بار؟

(1) $-x^2+3x+5=0$;

(2) $2x(x-2)=-3$;

(3) $x^2=4x-4$;

(4) $5x^2+2x=3x^2+5$.

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكىنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ سىزىڭ ھەمدە فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى تۇرغان تەخمىنىي ئىنتېرۋالنى كۆرسىتىپ بېرىڭ:

$f(1)=1>0$, $f(1.5)=-2.875<0$ (1, 1.5)上有一个零点

(1) $f(x)=-x^3-3x+5$;

(2) $f(x)=2x\cdot\ln(x-2)-3$; $f(3)<0$, $f(4)>0$

(3) $f(x)=e^{x-1}+4x-4$;

(4) $f(x)=3(x+2)(x-3)(x+4)+x$.

$f(0)<0$, $f(1)>0$
(0, 1)上有一个零点

$f(-4)<0$, $f(-3)>0$
$f(-2)<0$, $f(2)<0$, $f(3)>0$
$\therefore$ (-4, -3), (-3, -2), (2, 3)上各有一个零点

2-1-3 تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىش

مۇلاھىزە ؟

بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ يىلتىزىنى فورمۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىشقا بولىدۇ، ھالبۇكى، تەڭلىمە $\ln x+2x-6=0$ نىڭ يېشىمىنى تېپىشقا بولىدىغان فورمۇلا مەۋجۇت ئەمەس. ئۇنداق بولسا، فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بىلەن ماس تەڭلىمە يىلتىزىنىڭ مۇناسىۋىتىگە باغلاپ، فۇنكسىيىگە دائىر بىلىملەردىن پايدىلىنىپ بۇ تەڭلىمىنىڭ يىلتىزىنى تېپىشقا بولامدۇ ـ يوق؟

$f(x)=\ln x+2x-6$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال (2, 3) ئىچىدە نۆل نۇقتىغا ئىگە ئىكەنلىكى بىزگە مەلۇم. ئۇنداق بولسا، مۇشۇ نۆل نۇقتىنى قانداق تېپىش كېرەك؟

بۇ مەسىلە ئۈستىدە بىۋاسىتە پىكىر يۈرگۈزۈپ باقايلى: ئەگەر نۆل نۇقتا تۇرغان دائىرىنى ئىمكانىيەتنىڭ بارىچە كىچىكلەتكىلى بولسا، ئۇ ھالدا تەلەپ قىلىنغان بەلگىلىك ئېنىقلىق دەرىجىسىگە نىسبەتەن نۆل نۇقتىنىڭ تەقرىبىي قىممىتىگە ئېرىشكىلى بولىدۇ. ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، تۆۋەندە نۆل نۇقتا تۇرغان دائىرىنى «ئوتتۇرا نۇقتىنى ئېلىش» ❶ ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تەدرىجىي كىچىكلىتىمىز.

> ❶ ئادەتتە $x=\dfrac{a+b}{2}$ نى ئىنتېرۋال (a, b) نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى دەپ ئاتايمىز.

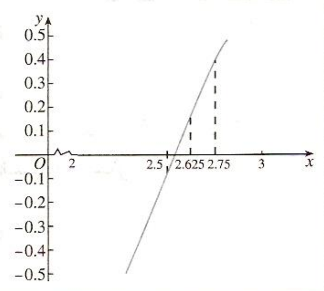
ئىنتېرۋال (2, 3) نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى 2.5 نى ئېلىپ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ $f(2.5)\approx-0.084$ نى ھېسابلاپ چىقىمىز. $f(2.5)\cdot f(3)<0$ بولغانلىقتىن، نۆل نۇقتا ئىنتېرۋال (2.5, 3) ئىچىدە بولىدۇ.

ئاندىن ئىنتېرۋال $(2.5, 3)$ نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى 2.75 نى ئېلىپ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ $f(2.75)\approx 0.512$ نى ھېسابلاپ چىقىمىز. $f(2.5)\cdot f(2.75)<0$ بولغانلىقتىن، نۆل نۇقتا ئىنتېرۋال $(2.5, 2.75)$ ئىچىدە بولىدۇ.

$(2, 3)\supsetneqq(2.5, 3)\supsetneqq(2.5, 2.75)$ بولغانلىقتىن، بۇ يەردىكى نۆل نۇقتا تۇرغان دائىرە ھەقىقەتەنمۇ بارغانسېرى كىچىكلىگەن. ئەگەر يۇقىرىقى باسقۇچنى تەكرار قوللانساق، ئۇ ھالدا نۆل نۇقتا تۇرغان دائىرە يەنىمۇ كىچىكلەپ بارىدۇ (2.3 ـ جەدۋەل ۋە 4.1.3 ـ رەسىمگە قاراڭ). شۇنداق قىلىپ، بەلگىلىك ئېنىقلىق دەرىجىسىگە نىسبەتەن، يۇقىرىقى باسقۇچنى چەكلىك قېتىم تەكرارلىغاندىن كېيىن، نۆل نۇقتا تۇرغان ئىنتېرۋال ئىچىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنى فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى قىلىپ ئېلىشقا بولىدۇ. ئالاھىدە ئېيتىپ ئۆتۈش كېرەككى، ئىنتېرۋالنىڭ ئىككى ئۇچ نۇقتىسىنىمۇ نۆل نۇقتىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى قىلىپ ئېلىشقا بولىدۇ. مەسىلەن، ئېنىقلىق دەرىجىسى 0.01 بولغاندا، $|2.5390625-2.53125|=0.0078125<0.01$ بولغانلىقتىن، $x=2.53125$ نى فۇنكسىيە $f(x)=\ln x+2x-6$ نىڭ نۆل نۇقتىسىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى، يەنى تەڭلىمە $\ln x+2x-6=0$ نىڭ يىلتىزىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى قىلىپ ئېلىشقا بولىدۇ.

2.3 ـ جەدۋەل

ئىنتېرۋال	ئوتتۇرا نۇقتىنىڭ قىممىتى	فۇنكسىيىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىدىكى تەقرىبىي قىممىتى
$(2, 3)$	2.5	−0.084
$(2.5, 3)$	2.75	0.512
$(2.5, 2.75)$	2.625	0.215
$(2.5, 2.625)$	2.5625	0.066
$(2.5, 2.5625)$	2.53125	−0.009
$(2.53125, 2.5625)$	2.546875	0.029
$(2.53125, 2.546875)$	2.5390625	0.010
$(2.53125, 2.5390625)$	2.53515625	0.001



4.1.3 ـ رەسىم

ئىنتېرۋال $[a, b]$ دا ئۈزلۈكسىز بولغان ھەمدە $f(a)\cdot f(b)<0$ نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان $y=f(x)$ فۇنكسىيىگە نىسبەتەن، $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى تۇرغان ئىنتېرۋالنى داۋاملىق ئىككىگە بۆلۈش ئارقىلىق ئىنتېرۋالنىڭ ئىككى ئۇچ نۇقتىسىنى نۆل نۇقتىغا يېقىنلاشتۇرۇپ، يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ نۆل نۇقتىنىڭ تەقرىبىي قىممىتىنى تېپىش ئۇسۇلى **ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلى** (bisection) دەپ ئاتىلىدۇ.

ئېنىقلىق دەرىجىسى ε بېرىلگەندە، $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسىنىڭ تەقرىبىي قىممىتىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىش باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

1. ئىنتېرۋال $[a, b]$ نى ئېنىقلاپ، $f(a)\cdot f(b)<0$ نى ئىسپاتلايمىز ھەمدە ئېنىقلىق دەرىجىسى ε نى بېكىتىمىز؛

2. ئىنتېرۋال (a, b) نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى c نى تاپىمىز؛

3. $f(c)$ نى ھېسابلايمىز؛

(1) ئەگەر $f(c)=0$ بولسا، ئۇ ھالدا c دەل فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $f(a)\cdot f(c)<0$ بولسا، ئۇ ھالدا $b=c$ دەپ ئالىمىز (بۇ چاغدا نۆل نۇقتا $x_0\in(a, c)$ بولىدۇ)؛

(3) ئەگەر $f(c)\cdot f(b)<0$ بولسا، ئۇ ھالدا $a=c$ دەپ ئالىمىز (بۇ چاغدا نۆل نۇقتا $x_0\in(c, b)$ بولىدۇ).

❶ $\varepsilon > |a-b|$ دىن بىلەلەيمىزكى، ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى خالىغان بىر قىممەت نۆل نۇقتا x_0 نىڭ ئېنىقلىق دەرىجىسى ε نى قانائەتلەندۈرىدىغان تەقرىبىي قىممىتى بولىدۇ (ئويلاپ بېقىڭ، نېمە ئۈچۈن شۇنداق بولىدۇ؟). ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، بۇ يەردە ئىنتېرۋالنىڭ ئۇچ نۇقتىسى a (ياكى b) نى نۆل نۇقتىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى قىلىپ ئالىمىز.

4. ئېنىقلىق دەرىجىسى ε غا يەتكەن ـ يەتمىگەنلىكىگە ھۆكۈم قىلىمىز: ئەگەر $\varepsilon > |a-b|$ بولسا، ئۇ ھالدا نۆل نۇقتىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى a (ياكى b) بولىدۇ;❶ ئەگەر $\varepsilon > |a-b|$ دېگەن بۇ شەرت قانائەتلەندۈرۈلمىسە، ئۇ ھالدا $2 \sim 4$ كىچە بولغان باسقۇچلارنى يەنە بىر قېتىم تەكرارلايمىز.

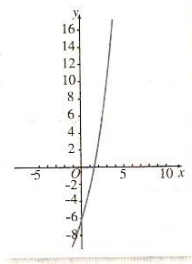
فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بىلەن ماس تەڭلىمە يىلتىزىنىڭ مۇناسىۋىتىگە ئاساسەن، تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپالايمىز. بۇ يەردىكى ھېسابلاش مىقدارى بىرقەدەر كۆپ، ئۇنىڭ ئۈستىگە ئوخشاش باسقۇچلار تەكرار ھېسابلىنىدىغانلىقى ئۈچۈن، مۇئەييەن ھېسابلاش تەرتىپىنى لايىھىلىگۈلىپ، ھېسابلاشنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ تاماملىساق بولىدۇ.

2 ـ مىسال ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، تەڭلىمە $2^x + 3x = 7$ نىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپايلى (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

يېشىش: ئەسلىي تەڭلىمىنى $2^x + 3x - 7 = 0$ قىلىپ يېزىشقا بولىدۇ، $f(x) = 2^x + 3x - 7$ دەپ ئېلىپ، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيە $f(x) = 2^x + 3x - 7$ نىڭ ماس قىممەتلىرى جەدۋىلى (3.3 ـ جەدۋەل) نى تۈزىمىز ھەمدە ئۇنىڭ گرافىكى (5.1.3 ـ رەسىم) نى سىزىمىز.

3.3 ـ جەدۋەل

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x) = 2^x + 3x - 7$	-6	-2	3	10	21	40	75	142	273



5.1.3 ـ رەسىم

5.1.3 ـ رەسىم ياكى 3.3 ـ جەدۋەلنى كۆزىتىپ $f(1) \cdot f(2) < 0$ بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز، بۇ، بېرىلگەن فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $(1, 2)$ ئىچىدە نۆل نۇقتا x_0 گە ئىگە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

ئىنتېرۋال $(1, 2)$ نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى $x_1 = 1.5$ نى ئېلىپ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ $f(1.5) \approx 0.33$ نى ھېسابلاپ چىقىمىز. $f(1) \cdot f(1.5) < 0$ بولغانلىقتىن، $x_0 \in (1, 1.5)$ بولىدۇ.

ئاندىن ئىنتېرۋال $(1, 1.5)$ نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى $x_2 = 1.25$ نى ئېلىپ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ $f(1.25) \approx -0.87$ نى ھېسابلاپ چىقىمىز. $f(1.25) \cdot f(1.5) < 0$ بولغانلىقتىن، $x_0 \in (1.25, 1.5)$ بولىدۇ.

ئوخشاش يول بىلەن، $x_0 \in (1.375, 1.5)$ ، $x_0 \in (1.375, 1.4375)$ گە ئېرىشكىلى بولىدۇ.

$$|1.375 - 1.4375| = 0.0625 < 0.1$$

بولغانلىقتىن، ئەسلىي تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمى ئۈچۈن 1.4375 نى ئېلىشقا بولىدۇ.

مەشىق

1. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال (0, 1) ئىچىدىكى نۆل نۇقتىسىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

2. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، تەڭلىمە $x=3-\lg x$ نىڭ ئىنتېرۋال (2, 3) ئىچىدىكى تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

جوڭگو ۋە چەت ئەل تارىخىدىكى تەڭلىمىنىڭ يېشىمىنى تېپىش مەسىلىسى

ئىنسانلار ئەقىل ـ پاراسىتىگە تايىنىپ نامەلۇمنى مەلۇمغا تۇتاشتۇرىدىغان نۇرغۇن كۆۋرۈكلەرنى بەرپا قىلغان، تەڭلىمىنىڭ يېشىمىنى تېپىش دەل شۇلار ئىچىدىكى جۇلالىنىپ تۇرغان بىر كۆۋرۈكتۇر. بۇگۈنكى كۈندە ھەر خىل تەڭلىمىلەرنى يېشىش ئۇسۇلىنى دەرسلىكتىن بىلىۋالغىلى بولىسىمۇ، ئەمما بۇ ئۇسۇللارنىڭ ھەممىسى ئۇزاق تارىخىي جەريانلارنى بېشىدىن ئۆتكۈزگەن.

ئېلىمىزنىڭ قەدىمكى زاماندىكى ماتېماتىكا ئالىملىرى بىر قىسىم تەڭلىمىلەرنىڭ يېشىمىنى تېپىش مەسىلىسىنى بىرقەدەر سىستېمىلىق ھەل قىلغان. تەخمىنەن مىلادىيە 50 ~ 100 ـ يىللىرى تۈزۈلگەن «توققۇز بابلىق ھېساب» دېگەن كىتابتا، بىرىنچى دەرىجىلىك، ئىككىنچى دەرىجىلىك ۋە مۇسبەت كوئېففىتسېنتلىق ئۈچىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ يىلتىزىنى تېپىشتىكى كونكرېت ئۇسۇل ئارىفمېتىكىلىق ئۇسۇل شەكلىدە ئوتتۇرىغا قويۇلغان. 7 ـ ئەسىردە، سۈي، تاڭ سۇلالىلىرى دەۋرىدىكى ماتېماتىكا ئالىمى ۋاڭ شياۋتۇڭ ئۈچىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ مۇسبەت يىلتىزىنى تېپىشنىڭ سانلىق قىممەت ئۇسۇلىنى تېپىپ چىققان؛ 11 ـ ئەسىردە، شىمالىي سۇڭ سۇلالىسى دەۋرىدىكى ماتېماتىكا ئالىمى جياشيەن «خۇاڭدى توققۇز بابلىق ھېسابلاش ئۇسۇلىنىڭ تەپسىلاتلىرى» دېگەن كىتابىدا «يىلتىز چىقىرىش ئۇسۇلىنىڭ ئەسلىي سخېمىسى (بۇ سخېما كېيىنچە جياشيەن ئۈچبۇلۇڭى دەپ ئاتالغان)» نى ئوتتۇرىغا قويۇپ، ئۈچىنچى ياكى ئۇنىڭدىن يۇقىرى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنى «ھېسابلاش جەدۋىلى بويىچە يىلتىز چىقىرىش ئۇسۇلى» دىن پايدىلىنىپ يەشكەن. ئۇ مۇشۇ كىتابىدا يەنە تېخىمۇ ئاددىي بىر خىل ئۇسۇل — «يۇقىرى دەرىجىلىك دەرىجىلەرنىڭ مۇسبەت يىلتىزىنى تېپىش ئۇسۇلى» نى ئوتتۇرىغا قويغان؛ 13 ـ ئەسىردە، جەنۇبىي سۇڭ سۇلالىسى دەۋرىدىكى ماتېماتىكا ئالىمى چىن جيۇشاۋ «توققۇز بابلىق ماتېماتىكا كىتاب» دېگەن ئەسىرىدە «مۇسبەت ـ مەنپىي سانلارنىڭ يىلتىزىنى تېپىش ئۇسۇلى»نى ئوتتۇرىغا قويۇپ، خالىغان رەقەملىك تەڭلىمىنى ھېسابلاش چوكىلىرىنى تىزىش ئارقىلىق يېشىشتىن ئىبارەت ئۇنۇملۇك ئۇسۇلنى بارلىققا كەلتۈرگەن، بۇ ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ خالىغان دەرىجىلىك ئالگېبرالىق تەڭلىمىنىڭ مۇسبەت يىلتىزىنى تاپقىلى بولاتتى.

چەت ئەللىك ماتېماتىكلارمۇ تەڭلىمىنىڭ يېشىمىنى تېپىش ئۈستىدە نۇرغۇن تەتقىقاتلارنى ئېلىپ بارغان. 9 - ئەسىردە، ئەرەب ماتېماتىكى ئال خارەزىم (al – khowārizmī، تەخمىنەن 780 ~ تەخمىنەن 850 - يىللار، ئوتتۇرا ئاسىيادا تۇغۇلغان) بىرىنچى، ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنى يېشىشنىڭ ئومۇمىي ئۇسۇلىنى ئوتتۇرىغا قويغان؛ 1541 - يىلى، ئىتالىيىلىك ماتېماتىك تارتالىيا (N.Tartaglia، تەخمىنەن 1499 ~ 1557 - يىللار) ئۈچىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنى يېشىشنىڭ ئومۇمىي ئۇسۇلىنى ئوتتۇرىغا قويغان؛ 1545 - يىلى، ئىتالىيىلىك ماتېماتىك كاردانو (G.Cardano، 1501 ~ 1576 - يىللار) «كاتتا تېخنىكىلار» دېگەن مەشھۇر كىتابىدا تارتالىيانىڭ يېشىش ئۇسۇلىنى يەنىمۇ راۋاجلاندۇرغان ھەمدە بۇ كىتابىغا فېرارى (L.Ferrari، 1522 ~ 1565 - يىللار) ئوتتۇرىغا قويغان تۆتىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنى يېشىشنىڭ ئومۇمىي ئۇسۇلىنى يېزىپ قالدۇرغان.

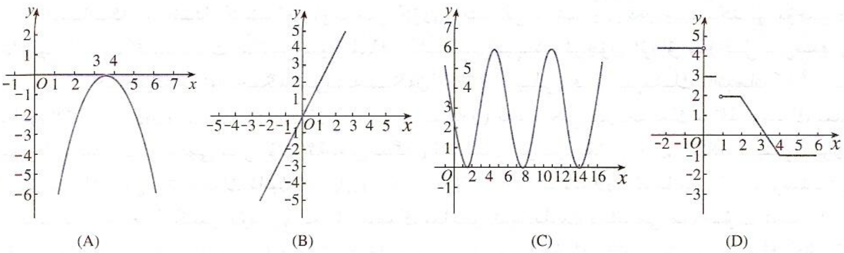
ماتېماتىكا تارىخىدا، كىشىلەر ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى بەشىنچى دەرىجىلىكتىن يۇقىرى ئالگېبرالىق تەڭلىمىنىڭ يىلتىز ئىپادىلىك يېشىمىنى تېپىش ئۈچۈن ئۇزاق مەزگىل تىرىشقان بولسىمۇ، ھېچقانداق نەتىجىگە ئېرىشەلمىگەن. 1778 - يىلى، فرانسىيىلىك ماتېماتىكا ئۇستازى لاگراڭ (J.–L.Lagrange، 1736 ~ 1813 - يىللار) بەشىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىنىڭ يىلتىز ئىپادىلىك يېشىمى مەۋجۇت ئەمەس دېگەن قىياسنى ئوتتۇرىغا قويغان. 1824 - يىلى، نورۋېگىيىلىك ياش ماتېماتىك ئابېل (N.H.Abel، 1802 ~ 1829 - يىللار) ئومۇمىي كۆرۈنۈشتىكى بەشىنچى دەرىجىلىكتىن يۇقىرى تەڭلىمىنىڭ يىلتىز ئىپادىلىك يېشىمى مەۋجۇت ئەمەسلىكىنى مۇۋەپپەقىيەتلىك ئىسپاتلىغان. 1828 - يىلى، فرانسىيىلىك تالانتلىق ماتېماتىك گالۇۋا (E.Galois، 1811 ~ 1832 - يىللار) يىلتىز چىقىرىش ئەمەلىدىن پايدىلىنىپ يېشىمىنى تېپىشقا بولمايدىغان كونكرېت تەڭلىمىنىڭ مەۋجۇت ئىكەنلىكىنى ئەپچىل ھەم ئاددىي ھالدا ئىسپاتلاپ، يەنە ئالگېبرالىق تەڭلىمىنىڭ يېشىمىنى يىلتىزلىق ئىپادىدىن پايدىلىنىپ تېپىشقا بولىدىغان - بولمايدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسىنىمۇ ئوتتۇرىغا قويغان.

گەرچە كۆرسەتكۈچلۈك تەڭلىمە، لوگارىفمىلىق تەڭلىمە قاتارلىق ترانسېندېنت تەڭلىمىلەر ۋە بەشىنچى دەرىجىلىكتىن يۇقىرى ئالگېبرالىق تەڭلىمىلەرنىڭ يېشىمىنى ئالگېبرالىق ئەمەللەردىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولمىسىمۇ، لېكىن ئۇلارنى يېشىشتىكى سانلىق قىممەت ئۇسۇلى ھازىرقى زامان ھېسابلاش تېخنىكىسىنىڭ تەرەققىي قىلىشىغا ئەگىشىپ كەڭ قوللىنىلىشقا ئېرىشتى، مەسىلەن، ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلى، نيۇتون ئۇسۇلى، تەقلىدىي نيۇتون ئۇسۇلى، خوردا ئۆتكۈزۈش ئۇسۇلى دېگەندەك.

1.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. (A)، (B)، (C)، (D) فۇنكسىيە گرافىكلىرى بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بار (ئۇ-رۇنۇش نۇقتىسمۇ كېسىشىش نۇقتىسى دەپ قارىلىدۇ)، بۇلارنىڭ ئىچىدىكى فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولمايدىغىنى ( ).



2. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى ئۈزلۈكسىز ئىكەنلىكى ھەمدە تۆۋەندىكى ماس قىممەتلەر جەدۋىلى بېرىلگەن:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	136.136	15.552	-3.92	10.88	-52.488	-232.064

$f(x)$ فۇنكسىيە قايسى ئىنتېرۋاللاردا نۆل نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

3. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، تەڭلىمە $(x+1)(x-2)(x-3)=1$ نىڭ ئىنتېرۋال $(-1, 0)$ ئىچىدىكى تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

4. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، تەڭلىمە $0.8^x-1=\ln x$ نىڭ ئىنتېرۋال $(0, 1)$ ئىچىدىكى تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

5. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، فۇنكسىيە $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$ نىڭ ئىنتېرۋال $(2, 3)$ *ئىچىدىكى نۆل نۇقتىسىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).*

B گۇرۇپپا

1. ئالدى بىلەن تەڭلىمە $2x^2-3x-1=0$ نىڭ يېشىمىنى يىلتىز تېپىش فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ، ئاندىن ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، بۇ تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

2. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، تەڭلىمە $x^3+5=6x^2+3x$ نىڭ تەقرىبىي يېـ- شىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

3. فۇنكسىيە بېرىلگەن: $f(x)=-x^2-3x-2$

(1) ئەگەر $g(x)=2-[f(x)]^2$ بولسا، $g(x)$ نىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى تېپىڭ؛

(2) ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، $g(x)$ فۇنكسىيىسىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ؛

(3) $g(x)$ فۇنكسىيىسىنىڭ نۆل نۇقتىسىنى تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

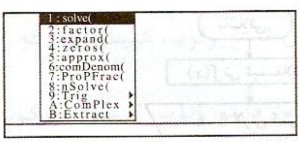
تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ تېپىش

بىر تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ ئاسانلا تاپقىلى بولىدۇ. بۇ يەردە مۇشۇ پاراگرافتىكى 2 ـ مىسالنى مىسال قىلىپ، ساۋاقداشلارغا ئىككى خىل ئۇسۇلنى تونۇشتۇرۇپ ئۆتىمىز.

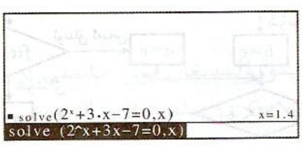
1. تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ئالگېبرالىق ئاپتوماتىك يېشىم تېپىش ئىقتىدارىدىن پايدىلىنىپ تېپىش.

(1) ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىكى لەيلىمە چېكىتلىك سانىنى بەش خانىلىق قىلىپ بەلگىلىۋالىمىز؛

(2) بۇيرۇق «solve (تەڭلىمە يېشىش)» نى تاللايمىز؛



(3) تەڭلىمە «$2^x+3x=7$» نى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرغا كىرگۈزۈپ، تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئاپتوماتىك تېپىپ چىقىمىز.

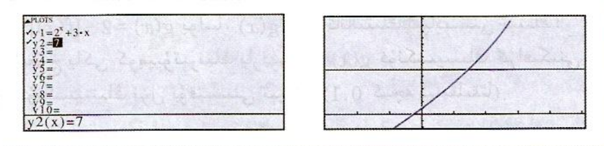


2. تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ گرافىك سىزىش ئىقتىدارىدىن پايدىلىنىپ تېپىش.

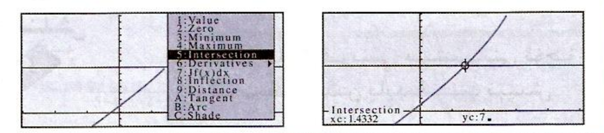
(1) ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىكى لەيلىمە چېكىتلىك سانىنى ئىككى خانىلىق قىلىپ

بەلگىلىۋالىمىز؛

(2) فۇنكسىيە «$y_1 = 2^x + 3x$» بىلەن «$y_2 = 7$» نى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرغا ئايرىم - ئايرىم كىرگۈزۈپ، بۇ ئىككى فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىمىز؛

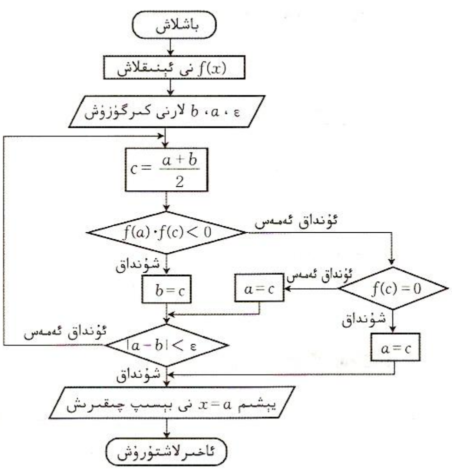


(3) ئىككى گرافىكنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تاپساق، تەڭلىمە $2^x + 3x = 7$ نىڭ تەقرىبىي يېشىمى كېلىپ چىقىدۇ.



تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ نېمە ئۈچۈن تېز ھەم ئەپچىللا تاپقىلى بولىدۇ؟ ئەمەلىيەتتە، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرغا تەڭلىمىنى يېشىشتىكى سانلىق قىممەت ئۇسۇلىنىڭ پروگراممىسى ئورۇنلاشتۇرۇلغان بولۇپ، ماس تەڭلىمە ۋە ئېنىقلىق دەرىجىسى (ئىناۋەتلىك رەقەم) كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېر شۇ پروگراممىا بويىچە ھېسابلاش ئېلىپ بارالايدۇ. ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى تېپىش پروگراممىسىنى ئۆزىمىز تۈزۈپ باقساقمۇ بولىدۇ.

تۆۋەندە 2 - مىسالنى يېشىش ئۇسۇلىنىڭ رامكىلىق سخېمىسى بېرىلدى:



2-3 فۇنكسىيە مودېلى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى

بىزگە مەلۇمكى، فۇنكسىيە رېئال دۇنيادىكى ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان ئاساسىي ماتېماتىكىلىق مودېل بولۇپ، ئوخشاش بولمىغان ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى ئوخشاش بولمىغان فۇنكسىيە مودېللىرى بىلەن تەسۋىرلەشكە توغرا كېلىدۇ. ئۇنداق بولسا، بىر ئەمەلىي مەسىلىگە دۇچ كەلگەندە، ئۇنى تەسۋىرلەش ئۈچۈن مۇۋاپىق فۇنكسىيە مودېلىنى قانداق تاللاش كېرەك؟

1-2-3 ئېشىشى ئوخشاش بولمىغان بىرقانچە خىل فۇنكسىيە مودېلى

ئالدى بىلەن ئىككى كونكرېت مەسىلىنى كۆرۈپ باقايلى.

1 - مىسال پۇلىڭىزنى مەبلەغ سېلىشقا ئىشلەتمەكچى بولسىڭىز، ئۈچ خىل مەبلەغ سېلىش لايىھىسىدىن بىرنى تاللىۋالسىڭىز بولىدۇ، بۇ ئۈچ خىل لايىھىنىڭ پۇل قايتۇرۇلۇش ئەھۋالى تۆۋەندىكىچە:

1 - لايىھە: ھەر كۈنى 40 يۈەن قايتۇرۇلىدۇ؛

2 - لايىھە: 1 - كۈنى 10 يۈەن قايتۇرۇلۇپ، كېيىن ھەر كۈنى ئالدىنقى بىر كۈندىكىدىن 10 يۈەن ئارتۇق قايتۇرۇلىدۇ؛

3 - لايىھە: 1 - كۈنى 0.4 يۈەن قايتۇرۇلۇپ، كېيىن ھەركۈنى ئالدىنقى بىر كۈندىكىنىڭ ئىككى ھەسسىسىچىلىك قايتۇرۇلىدۇ.

قايسى خىل لايىھىنى تاللايسىز؟

تەھلىل: ئالدى بىلەن ئۈچ خىل مەبلەغ سېلىش لايىھىسىگە ماس كېلىدىغان فۇنكسىيە مودېللىرىنى تۇرغۇزۇۋېلىپ، ئاندىن ئۇلارنىڭ ئېشىش ئەھۋالىنى سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق لايىھە تاللاشنى ئاساس بىلەن تەمىن ئېتىمىز.

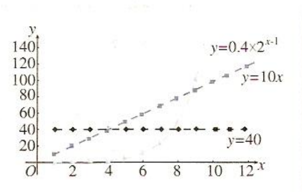
يېشىش: x ىنچى كۈنى قايتۇرۇلىدىغان پۇل سانىنى y يۈەن دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا 1 - لايىھىنى فۇنكسىيە $y=40$ $(x \in \mathbf{N}^*)$ بىلەن؛ 2 - لايىھىنى فۇنكسىيە $y=10x$ $(x \in \mathbf{N}^*)$ بىلەن؛ 3 - لايىھىنى فۇنكسىيە $y=0.4 \times 2^{x-1}$ $(x \in \mathbf{N}^*)$ بىلەن تەسۋىرلەشكە بولىدۇ. بۇ ئۈچ فۇنكسىيە مودېلىنىڭ بىرىنچىسى تۇراقلىق فۇنكسىيە بولۇپ، قالغان ئىككىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيە مودېلى بولىدۇ. ئۈچ لايىھىنىڭ بىرىنى تاللاش ئۈچۈن، ئۈچ فۇنكسىيە مودېلىنىڭ ئېشىش ئەھۋالىنى تەھلىل قىلىشقا توغرا كېلىدۇ.

ئالدى بىلەن ئۈچ خىل لايىھەدە قايتۇرۇلىدىغان پۇلنىڭ ئېشىش ئەھۋالىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپ-يۇتېردىن پايدىلىنىپ ھېسابلاپ باقايلى (3.4 ـ جەدۋەل).

4.3 ـ جەدۋەل

كۈن/x	يۈەن/y	يۈەن/ئېشىش مىقدارى	يۈەن/y	يۈەن/ئېشىش مىقدارى	يۈەن/y	يۈەن/ئېشىش مىقدارى
	1 ـ لايىھە		2 ـ لايىھە		3 ـ لايىھە	
1	40		10		0.4	
2	40	0	20	10	0.8	0.4
3	40	0	30	10	1.6	0.8
4	40	0	40	10	3.2	1.6
5	40	0	50	10	6.4	3.2
6	40	0	60	10	12.8	6.4
7	40	0	70	10	25.6	12.8
8	40	0	80	10	51.2	25.6
9	40	0	90	10	102.4	51.2
10	40	0	100	10	204.8	102.4
…	…	…	…	…	…	…
30	40	0	300	10	214 748 364.8	107 374 182.4

ئاندىن ئۈچ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىمىز (2.1.3 ـ رەسىم).



1.2.3 ـ رەسىم

فۇنكسىيە گرافىكى مەسىلە تەھلىل قىلىشىمىزنىڭ ياخشى ياردەمچىسىدۇر. كۆزىتىشكە ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، تارقاق نۇقتىلارنى ئۇزۇك سىزىق بىلەن تۇتاشتۇرۇۋالىمىز.

كۆرەلەيمىزكى، ئاساسى 2 بولغان كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە مودېلىنىڭ ئېشىش سۈرئىتى سىزىقلىق فۇنكسىيە مودېلىنىڭكىدىن زور دەرىجىدە تېز بولىدۇ. ئەمدى «كۆرسەتكۈچنىڭ پارتلىشى» نىڭ مەنىسىگە نىسبەتەن قانداق يېڭى چۈشەنچە ھاسىل قىلدىڭىز؟

مۇشۇ تەھلىلگە ئاساسەن، بەش كۈن ئىچىدىكى مەبلەغ سېلىشتا 1 ـ لايىھەنى، 5 ~ 8 كۈن ئارىلىقىدىكى مەبلەغ سېلىشتا 2 ـ لايىھەنى، 8 كۈندىن يۇقىرى بولغان ئەھۋالدىكى مەبلەغ سېلىشتا 3 ـ لايىھەنى تاللاش كېرەك، دەپ يەكۈن چىقارساق بولامدۇ ـ يوق؟

3.4 ـ جەدۋەل ۋە 1.2.3 ـ رەسىمدىن 1 ـ لايىھەدىكىسى تۇراقلىق فۇنكسىيە، 2 ـ، 3 ـ لايىھەلەردىكىسى ئوخشاشلا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولۇپ، 3 ـ لايىھەدىكى فۇنكسىيە بىلەن 2 ـ لايىھەدىكى فۇنكسىيىنىڭ ئېشىش ئەھۋالىدا زور ئوخشىماسلىق بارلىقىنى بىلەلەيمىز. شۇنى كۆرەلەيمىزكى، 1 ـ، 2 ـ لايىھەلەردە 1 ـ كۈنى قايتۇرۇلىدىغىنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا 3 ـ لايىھەدىكىنىڭ 100 ھەسسىسى ۋە 25 ھەسسىسى بولسىمۇ، ئەمما ئۇلاردىكى ئېشىش مىقدارى مۇقىم بولىدۇ، 3 ـ لايىھەدىكىسى بولسا «كۆرسەتكۈچنىڭ ئېشىشى» بولۇپ، ئۇنىڭدىكى «ئېشىش مىقدارى» ھەسسىلەپ ئېشىپ بارىدۇ ھەمدە 7 ـ كۈنىدىن باشلاپ 3 ـ لايىـ

ھەدىكىنىڭ ئېشىش سۈرئىتى قالغان ئىككى لايىھەدىكى ئېشىش سۈرئىتىدىن كۆپ تېز بولۇپ، بۇنداق ئېشىش سۈرئىتىگە 1 -، 2 - لايىھەدىكىنىڭ ئېشىش سۈرئىتى ھەرگىز يېتەلمەيدۇ. ھەر كۈنى قايتۇرۇلغان پۇل سانىدىن قارىغاندا، 1 ~ 3 - كۈنىگىچە 1 - لايىھەدە قايتۇرۇلغىنى ئەڭ كۆپ بولىدۇ؛ 4 - كۈنى 1 -، 2 - لايىھەلەردە قايتۇرۇلغان پۇل سانى ئوخشاش بولۇپ، 3 - لايىھەدىكىسى ئەڭ ئاز بولىدۇ؛ 5 ~ 8 - كۈنىگىچە 2 - لايىھەدە قايتۇرۇلغىنى ئەڭ كۆپ بولىدۇ؛ 9 - كۈنىدىن باشلاپ، 3 - لايىھەدە قايتۇرۇلغىنى قالغان ئىككى لايىھەدىكىدىن زور دەرىجىدە كۆپ بولۇپ، 30 - كۈنگە كەلگەندە قايتۇرۇلىدىغان پۇل سانى 200 مىليون يۈەندىن ئېشىپ كېتىدۇ.

ئەمدى قايتۇرۇلغان پۇل سانىنىڭ جۇغلانمىسىنى كۆرۈپ باقايلى، ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى جەدۋەلنى تۈزىمىز:

كۈنلەر / يۈەن/قايتۇرۇلغىنى / لايىھە	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 - لايىھە	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440
2 - لايىھە	10	30	60	100	150	210	280	360	450	550	660
3 - لايىھە	0.4	1.2	2.8	6	12.4	25.2	50.8	102	204.4	409.2	818.8

شۇنىڭ ئۈچۈن، 1 ~ 6 كۈن ئارىلىقىدىكى مەبلەغ سېلىشتا 1 - لايىھەنى؛ 7 كۈنلۈك مەبلەغ سېلىشتا 1 - ياكى 2 - لايىھەنى؛ 8 ~ 10 كۈن ئارىلىقىدىكى مەبلەغ سېلىشتا 2 - لايىھەنى؛ 11 كۈن (11 - كۈنىنمۇ ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) دىن يۇقىرى بولغان ئەھۋالدىكى مەبلەغ سېلىشتا 3 - لايىھەنى تاللاش كېرەك.

يۇقىرىقى مىسالدىكىسى پەقەت پەرەز قىلىنغان ئەھۋال بولسىمۇ، ئۇنىڭدىن يەنىلا ئېشىش تىپىدىكى ئوخشاش بولمىغان فۇنكسىيە مودېللىرىنىڭ ئېشىش ئۆزگىرىشىدە زور ئوخشىماسلىقلارنىڭ مەۋجۇتلۇقىنى ھېس قىلالايمىز.

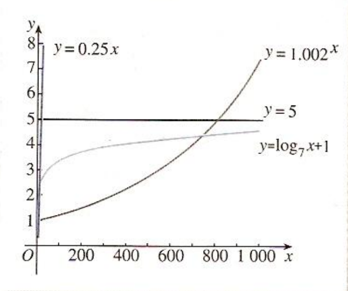
2 - مىسال مەلۇم شىركەت 1000 تۈمەن[1] يۈەن پايدا ئېلىش نىشانىنى ئەمەلگە ئاشۇرۇش ئۈچۈن، سېتىش خادىملىرىنى رىغبەتلەندۈرۈش مۇكاپات لايىھەسىنى تۈزۈپ چىقماقچى بولدى: سېتىش پايدىسى 10 تۈمەن يۈەنگە يەتكەندە، سېتىش پايدىسى بويىچە مۇكاپات بېرىلىدۇ ھەمدە مۇكاپات سوممىسى y (بىرلىكى: تۈمەن يۈەن) سېتىش پايدىسى x (بىرلىكى: تۈمەن يۈەن) نىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ ئاشۇرۇلىدۇ، ئەمما مۇكاپات سوممىسىنىڭ ئومۇمىي سانى 5 تۈمەن يۈەندىن، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، مۇكاپات سوممىسى پايدىنىڭ 25% دىن ئېشىپ كەتمەيدۇ. ھازىر $y=0.25x$، $y=\log_7 x+1$، $y=1.002^x$ تىن ئىبارەت ئۈچ مۇكاپات مودېلى بار، بۇلارنىڭ ئىچىدە قايسى مودېل شىركەتنىڭ تەلىپىگە ئۇيغۇن كېلىدۇ؟

[1] خەنزۇچە دەرسلىكتە بېرىلگەن فۇنكسىيە ئىپادىلىرى ۋە كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى سانلىق مەلۇماتلارنى ئەينەن ئېلىش زۆرۈرىيىتى تۈپەيلىدىن، بۇ مىسالدا «تۈمەن» سانى قوللىنىلدى، 10000 = 10 مىڭ = 1 تۈمەن.

تەھلىل: ئەگەر مەلۇم مۇكاپات مودېلى شىركەتنىڭ تەلىپىگە ئۇيغۇن كەلسە، ئۇ ھالدا مۇشۇ مودېل بويىچە مۇكاپاتلىغاندا مۇكاپاتنىڭ ئومۇمىي سوممىسى 5 تۈمەن يۈەندىن، شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، مۇكاپات سوممىسى پايدىنىڭ 25% دىنمۇ ئېشىپ كەتمەسلىكى كېرەك، شىركەتنىڭ ئومۇمىي پايدا ئېلىش نىشانى 1000 تۈمەن يۈەن بولغانلىقتىن، خادىملارنىڭ سېتىش پايدىسى ئادەتتە شىركەتنىڭ ئومۇمىي پايدىسىدىن ئېشىپ كەتمەيدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، بۇ ئۈچ مودېلنىڭ شىركەت تەلىپىگە ئۇيغۇن كېلىدى-

غان ـ كەلمەيدىغانلىقىنى ئىنتېرۋال $[10,\ 1000]$ دا تەكشۈرۈپ كۆرسەكلا بولىدۇ.

ئالدى بىلەن فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىمىز، ئاندىن گرافىكنى كۆزىتىش ئارقىلىق دەسلەپكى يەكۈنگە ئېرىشىپ، كونكرېت ھېسابلاش ئارقىلىق يەكۈننىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلىمىز.



2.2.3 ـ رەسىم

يېشىش: ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، فۇنكسىيە $y=5$، $y=0.25x$، $y=\log_7 x+1$، $y=1.002^x$ لەرنىڭ گرافىكىنى سىزىمىز (2.2.3 ـ رەسىم). بۇ گرافىكلارنى كۆزىتىش ئارقىلىق بايقىيالايمىزكى، ئىنتېرۋال $[10,\ 1000]$ دا مودېل $y=0.25x$، $y=1.002^x$ لەرنىڭ گرافىكىنىڭ بىر قىسمى تۈز سىزىق $y=5$ نىڭ ئۈستى تەرىپىدە بولۇپ، پەقەت مودېل $y=\log_7 x+1$ نىڭ گرافىكىلا باشتىن ـ ئاخىر $y=5$ نىڭ ئاستى تەرىپىدە بولىدۇ، بۇ، پەقەت مودېل $y=\log_7 x+1$ بويىچە مۇكاپاتلىغاندىلا ئاندىن شىركەتنىڭ تەلىپىگە ئۇيغۇن كېلىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ. ئەمدى ھېسابلاش ئارقىلىق بۇ يەكۈننىڭ توغرا ـ خاتالىقىغا ھۆكۈم قىلايلى.

ئالدى بىلەن قايسى مودېلدىكى مۇكاپاتنىڭ ئومۇمىي سوممىسى 5 تۈمەن يۈەندىن ئېشىپ كەتمەيدىغانلىقىنى ھېسابلايمىز.

مودېل $y=0.25x$ ئىنتېرۋال $[10,\ 1000]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولۇپ، $x=20$ بولغاندا $y=5$ بولىدىغانلىقتىن، $x>20$ بولغاندا $y>5$ بولىدۇ ـ دە، بۇ مودېل تەلەپكە ئۇيغۇن كەلمەيدۇ.

مودېل $y=1.002^x$ نىڭ گرافىكىغا ئاساسلانساق ھەمدە ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانساق، ئىنتېرۋال $(805,\ 806)$ ئىچىدىكى بىر x_0 نۇقتىنىڭ $1.002^{x_0}=5$ نى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز، بۇ فۇنكسىيە مودېلى ئىنتېرۋال $[10,\ 1000]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولغانلىقتىن، $x>x_0$ بولغاندا $y>5$ بولىدۇ ـ دە، بۇ مودېلمۇ تەلەپكە ئۇيغۇن كەلمەيدۇ.

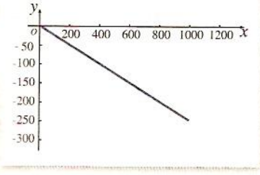
لوگارىفما بويىچە ئېشىش مودېلى ئېشىش سۈرئىتى ئاستىراق بولغان ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىگە مۇۋاپىق كېلىدۇ.

مودېل $y=\log_7 x+1$ ئىنتېرۋال $[10,\ 1000]$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولۇپ، $x=1000$ بولغاندا $y=\log_7 1000+1\approx 4.55<5$ بولىدىغانلىقتىن، بۇ مودېل مۇكاپاتنىڭ ئومۇمىي سوممىسى 5 تۈمەن يۈەندىن ئېشىپ كەتمەسلىكى كېرەك دېگەن بۇ شەرتكە ئۇيغۇن كېلىدۇ.

ئەمدى مودېل $y=\log_7 x+1$ بويىچە مۇكاپاتلىغاندا، مۇكاپات سوممىسى پايدىنىڭ %25 دىن ئېشىپ كېتىدىغان ـ كەتمەيدىغانلىقىنى، يەنى $x\in[10,\ 1000]$ بولغاندا،

$$\frac{y}{x}=\frac{\log_7 x+1}{x}\leqslant 0.25$$

نىڭ كۈچكە ئىگە بولىدىغان ـ بولمايدىغانلىقىنى ھېسابلايمىز.



3.2.3 ـ رەسىم

$f(x)=\log_7 x+1-0.25x$، $x\in[10,\ 1000]$ دەپ ئېلىپ، $f(x)$ نىڭ گرافىكىنى ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ سىزساق (3.2.3 ـ رەسىم)، گرافىكتىن بۇ فۇنكسىيىنىڭ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز،

$$\therefore\ f(x)<f(10)\approx -0.3167<0,$$

يەنى

$$\log_7 x + 1 < 0.25x.$$

شۇڭا، $x \in [10, 1000]$ بولغاندا، $\frac{\log_7 x + 1}{x} < 0.25$ بولۇپ، بۇ، مودېل $y = \log_7 x + 1$ بويىچە مۇكاپاتلىغاندا، مۇكاپات سوممىسى پايدىنىڭ 25% ىدىن ئېشىپ كەتمەيدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرۇش ئارقىلىق بىلەلەيمىزكى، مودېل $y = \log_7 x + 1$ شىركەتنىڭ تەلىپىگە ھەقىقەتەن ئۇيغۇن كېلىدۇ.

مەشىق

1. ئۆزگەرگۈچى مىقدار y_1، y_2، y_3، y_4 لەرنىڭ ئۆزگەرگۈچى مىقدار x كە ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىگە دائىر سانلىق مەلۇماتلار تۆۋەندىكى جەدۋەلدە بېرىلدى:

x	0	5	10	15	20	25	30
y_1	5	130	505	1130	2005	3130	4505
y_2	5	94.478	1785.2	33733	6.37×10^5	1.2×10^7	2.28×10^8
y_3	5	30	55	80	105	130	155
y_4	5	2.3107	1.4295	1.1407	1.0461	1.0151	1.005

x كە نىسبەتەن كۆرسەتكۈچ تىپلىق فۇنكسىيە بويىچە ئۆزگىرىدىغان ئۆزگەرگۈچى مىقدار ______ .

2. مەلۇم خىل كومپيۇتېر ۋىرۇسى ئېلېكترونلۇق پوچتا يوللانمىسى ئارقىلىق تارقىلىدۇ. ئەگەر مەلۇم كومپيۇتېر مۇشۇ خىل ۋىرۇس بىلەن يۇقۇملانسا، بۇ كومپيۇتېر كېيىنكى قېتىملىق ۋىرۇس قوزغىلىشىدا بىر قېتىم ۋىرۇس تارقىتىپ، تېخى ۋىرۇس بىلەن يۇقۇملانمىغان باشقا 20 كومپيۇتېرنى يۇقۇملاندۇرىدۇ. ھازىر 1 ـ قېتىملىق ۋىرۇس قوزغىلىشىدا 10 كومپيۇتېر يۇقۇملانغان بولسا، 5 ـ قېتىملىق ۋىرۇس قوزغىلىشىدا قانچە كومپيۇتېر يۇقۇملىنىدۇ؟

لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە $y = \log_a x$ $(a > 1)$، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y = a^x$ $(a > 1)$ ۋە دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y = x^n$ $(n > 0)$ لارنىڭ ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا ئوخشاشلا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقى بىزگە مەلۇم. يۇقىرىقى ئىككى مىسالدىن كۆرەلەيمىزكى، بۇ ئۈچ تۈرلۈك فۇنكسىيىنىڭ ئېشىشىدا پەرق بار. ئۇنداق بولسا، بۇ خىل پەرقنىڭ كونكرېت ئەھۋالى زادى قانداق بولىدۇ؟

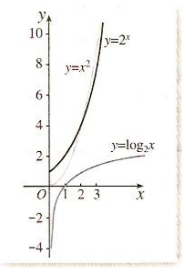
تۆۋەندە فۇنكسىيە $y = 2^x$، $y = x^2$، $y = \log_2 x$ لارنى مىسال قىلىپ ئىزدىنىپ كۆرەيلى.

ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ، ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن فۇنكسىيىنىڭ ماس قىممەتلەر جەدۋىلى (5.3 ـ جەدۋەل) نى تۈزىمىز ھەمدە ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا بۇ ئۈچ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى (4.2.3 ـ رەسىم) نى سىزىمىز. كۆرۈشكە بولىدۇكى، بۇ فۇنكسىيىلەرنىڭ ئۈچىلىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولسىمۇ، ئەمما ئۇلارنىڭ ئېشىش سۈرئىتى ئوخشاش ئەمەس.

5.3 ـ جەدۋەل

x	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	…
$y = 2^x$	1.149	1.516	2	2.639	3.482	4.595	6.063	8	10.556	…
$y = x^2$	0.04	0.36	1	1.96	3.24	4.84	6.76	9	11.56	…
$y = \log_2 x$	−2.322	−0.737	0	0.485	0.848	1.138	1.379	1.585	1.766	…

ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ، ئىككى گرافىكنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنى فۇنكسىيە $y=x^2-2^x$ نىڭ نۆل نۇقتىسىنى تېپىش ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقارسىڭىز بولىدۇ.



4.2.3 - رەسىم

كۆزىتىش

گرافىكتا تەڭسىزلىك

$$\log_2 x<2^x<x^2,$$
$$\log_2 x<x^2<2^x$$

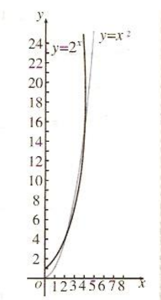
لارنى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى ئايرىم - ئايرىم بەلگىلەپ چىقىڭ.

ئەمدى $y=2^x$ بىلەن $y=x^2$ نىڭ ئېشىش ئەھۋالىنى كەڭرەك دائىرىدە كۆزىتىپ باقايلى.

6.3 - جەدۋەل ۋە 5.2.3 - رەسىمدىن $y=2^x$ بىلەن $y=x^2$ نىڭ گرافىكىنىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بارلىقىنى كۆرەلەيمىز، بۇ، 2^x بىلەن x^2 ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوخشاش بولمىغان ئىنتېرۋاللىرىدا ئوخشاش بولمىغان چوڭ - كىچىكلىك مۇناسىۋەتكە ئىگە بولۇپ، بەزىدە $2^x>x^2$، بەزىدە يەنە $2^x<x^2$ بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

6.3 - جەدۋەل

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$y=2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	…
$y=x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	…



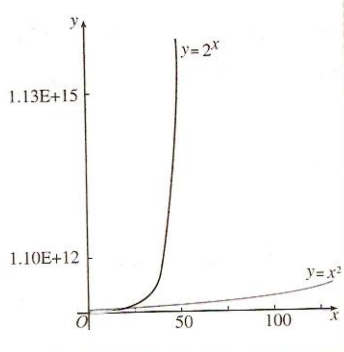
5.2.3 - رەسىم

لېكىن يەنە شۇنىمۇ كۆرەلەيمىزكى، ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار x قانچىكى چوڭايغانسېرى، 2^x نىڭ قىممىتى تېز سۈرئەتتە ئېشىپ بېرىپ، $y=2^x$ نىڭ گرافىكى خۇددى x ئوق بىلەن تىك بولۇپ قالغاندەكلا بولىدۇ، 2^x گە سېلىشتۇرغاندا، x^2 نىڭ ئېشىشىنى تىلغا ئالغۇچىلىكى يوق دېسەكمۇ بولىدۇ (6.2.3 ـ رەسىم ۋە 7.3 ـ جەدۋەلگە قاراڭ).

7.3 ـ جەدۋەل

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	…
$y_1=2^x$	1	1 024	1.05E+06	1.07E+09	1.10E+12	1.13E+15	1.15E+18	1.18E+21	1.21E+24	…
$y_2=x^2$	0	100	400	900	1 600	2 500	3 600	4 900	6 400	…

هېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېردا 1.05×10^6 كۆرۈنۈشتىكى ئىپادىلەر كۆپ ھاللاردا 1.05E+06 ياكى 1.05E6 قىلىپ ئىپادىلىنىدۇ، بۇنىڭدىكى «E» ھەرپ 10^6 نىڭ «ئاساسى»، يەنى 10 نى، كەينىدىكى پۈتۈن سان 6 بولسا 10^6 نىڭ كۆرسەتكۈچىنى ئىپادىلەيدۇ.



6.2.3 ـ رەسىم

ئىزدىنىش

$y=x^2$ بىلەن $y=\log_2 x$ نىڭ ئېشىش ئەھۋالىنى گرافىكتىن پايدىلىنىپ سېلىشتۇرالامسىز؟

ئومۇمەن، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ $(a>1)$ بىلەن دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^n$ $(n>0)$ ئۈستىدە ئىزدىنىش ئارقىلىق بايقىيالايمىزكى، ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا n نىڭ قىممىتى مەيلى a دىن قانچىلىك چوڭ بولۇشىدىن قەتئىينەزەر، x نىڭ بەلگىلىك ئۆزگىرىش دائىرىسى ئىچىدە a^x نىڭ x^n دىن كىچىك بولۇپ قېلىشى مۇمكىن بولسىمۇ، لېكىن a^x نىڭ ئېشىشى x^n نىڭ ئېشىشىدىن تېز بولغانلىقتىن، ھامان بىر x_0 مەۋجۇت بولۇپ، $x>x_0$ بولغاندا $a^x>x^n$ بولىدۇ.

يۇقىرىدىكىگە ئوخشاشلا، لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە $y=\log_a x$ $(a>1)$ بىلەن دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=x^n$ $(n>0)$ غا نىسبەتەن، ئىنتېرۋال $(0, +\infty)$ دا $\log_a x$ نىڭ ئېشىشى x نىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ بارغانسېرى ئاستىلاپ، فۇنكسىيە گرافىكى تەدرىجىي ھالدا x ئوق بىلەن پاراللېل بولۇپ قالغاندەكلا بولىدۇ. x نىڭ بەلگىلىك ئۆزگىرىش دائىرىسى ئىچىدە، $\log_a x$ نىڭ x^n دىن چوڭ بولۇپ قېلىشى مۇمكىن بولسىمۇ، $\log_a x$ نىڭ ئېشىشى x^n نىڭ ئېشىشىدىن ئاستا بولغانلىقتىن، ھامان بىر x_0 مەۋجۇت بولۇپ، $x>x_0$ بولغاندا $\log_a x<x^n$ بولىدۇ.

يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق، ئىنتېرۋال $(0,+\infty)$ دا فۇنكسىيە $y=a^x$ $(a>1)$، $y=\log_a x$ $(a>1)$، $y=x^n$ $(n>0)$ لارنىڭ ھەممىسى ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولسىمۇ، لېكىن ئۇلارنىڭ ئېشىش سۈرئىتىمۇ، شۇنداقلا ئېشىشتىكى «دەرىجە تەرتىپى» مۇ ئوخشاش بولمايدۇ. $y=a^x$ $(a>1)$ نىڭ ئېشىش سۈرئىتى x نىڭ چوڭىيىشىغا ئەگىشىپ بارغانسېرى تېزلىشىپ، $y=x^n$ $(n>0)$ نىڭ سۈرئىتىدىن ئېشىپ كېتىدۇ ھەمدە ئۇنىڭدىن زور دەرىجىدە چوڭ بولىدۇ، ھالبۇكى، $y=\log_a x$ $(a>1)$ نىڭ ئېشىش سۈرئىتى بولسا بارغانسېرى ئاستىلاپ كېتىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ھامان بىر x_0 مەۋجۇت بولۇپ، $x>x_0$ بولغاندا $\log_a x<x^n<a^x$ بولىدۇ.

ئىزدىنىش

فۇنكسىيە $y=a^x$ $(0<a<1)$، $y=x^n$ $(n<0)$، $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ لارنىڭ ئىنتېرۋال $(0,+\infty)$ دىكى كېمىيىش ئەھۋالىنى يۇقىرىقى ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ مۇھاكىمە قىلالامسىز؟

مەشىق

ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ ئېشىش ئەھۋالىنى سېلىشتۇرۇڭ:

(1) $y=0.1e^x-100,\ x\in[1,10]$;

(2) $y=20\ln x+100,\ x\in[1,10]$;

(3) $y=20x,\ x\in[1,10]$.

2-2-3 فۇنكسىيە مودېلىنىڭ ئەمەلىي قوللىنىلىشىغا دائىر مىساللار

بىز بىرىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفمىلىق فۇنكسىيە ۋە دەرىجىلىك فۇنكسىيىلەرنى ئۆگىنىپ ئۆتتۇق، بۇ فۇنكسىيىلەر رېئال دۇنيا بىلەن زىچ باغلىنىشلىق بولۇپ، كەڭ دائىرىدە قوللىنىلىدۇ. ئەمدى مۇشۇ فۇنكسىيىلەرنىڭ قوللىنىلىشىنى بىر قىسىم ئەمەلىي مىساللار ئارقىلىق ھېس قىلىپ، ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش داۋامىدا فۇنكسىيە مودېلى تۇرغۇزۇش جەريانىنى ئۆز بېشىمىزدىن ئۆتكۈزۈپ كۆرەيلى.

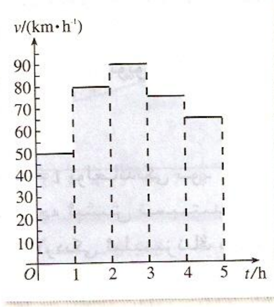
3 ـ مىسال بىر ئاپتوموبىلنىڭ مەلۇم بۆلەك يولدىكى مېڭىش تېزلىكى بىلەن ۋاقىتنىڭ مۇناسىۋىتى 7.2.3 ـ رەسىمدە بېرىلدى.

(1) 7.2.3 ـ رەسىمدىكى بويالغان قىسىمنىڭ يۈزىنى تاپايلى ھەمدە تېپىلغان بۇ يۈزنىڭ ئەمەلىي مەنىسىنى چۈشەندۈرەيلى.

(2) ئەگەر ئاپتوموبىل بۇ بىر بۆلەك يولنى مېڭىشتىن ئىلگىرى ئۇنىڭ مۇساپە جەدۋىلىدە خاتىرى-

لەنگەن سان 2004km بولسا، مۇشۇ بىر بۆلەك يولنى ماڭغاندا ئاپتوموبىلنىڭ مۇساپە جەدۋىلىدە خاتىـ-رىلەنگەن سان $s\text{km}$ نىڭ ۋاقىت $t\text{h}$ قا دائىر فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى تاپايلى ھەمدە ماس فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزايلى.

7.2.3 - رەسىمگە ئاساسەن، ئاپتوموبىلنىڭ ماڭغان يولىنىڭ ۋاقىت ئۆزگىرىشىگە دائىر فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزالامسىز؟



7.2.3 - رەسىم

يېشىش: (1) بويالغان قىسىمنىڭ يۈزى:

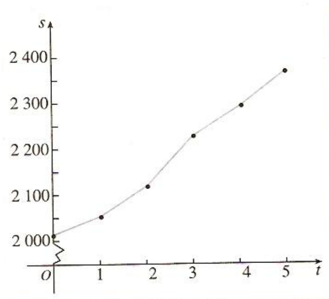
$$50\times1+80\times1+90\times1+75\times1+65\times1=360.$$

بويالغان قىسىمنىڭ يۈزى ئاپتوموبىلنىڭ مۇشۇ 5 سائەت ئىچىدە ماڭغان يولى 360km ئىكەنلىكىنى ئىپادىلەيدۇ.

(2) 7.2.3 - رەسىمگە ئاساسەن مۇنداق بولىدۇ:

$$s=\begin{cases}50t+2\,004, & 0\leqslant t<1,\\ 80(t-1)+2\,054, & 1\leqslant t<2,\\ 90(t-2)+2\,134, & 2\leqslant t<3,\\ 75(t-3)+2\,224, & 3\leqslant t<4.\\ 65(t-4)+2\,299, & 4\leqslant t\leqslant 5.\end{cases}$$

بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى 8.2.3 - رەسىمدە كۆرسىتىلدى.



8.2.3 - رەسىم

ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش جەريانىدا فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ رولى ناھايىتى چوڭ بولىدۇ، شۇنىڭ ئۈچۈن، رەسىم (گرافىك) دىكى سانلارنى ئوقۇش قابىلىيىتىمىزنى ئۆستۈرۈشكە دىققەت قىلىشىمىز لازىم. ئۇنىڭدىن باشقا، بۇ مىسالدا بۆلەكلەرگە بۆلۈنگەن فۇنكسىيە ئىشلىتىلدى، بۇ فۇنكسىيە رېئال مەسىلىلەرنى سۈرەتلەيدىغان مۇھىم مودېلدۇر.

4 - مىسال نوپۇس مەسىلىسى نۆۋەتتىكى دۇنيا ئەللىرى ئومۇميۈزلۈك كۆڭۈل بۆلۈۋاتقان مەسىلىدۇر. نوپۇس سانىنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى بىلىۋالغاندا، نوپۇسنىڭ ئېشىشىنى ئۈنۈملۈك كونترول قىلىشنى ئاساس بىلەن تەمىن ئەتكىلى بولىدۇ. ئەنگلىيىلىك ئىقتىسادشۇناس مالساس (T.R.Malthus، 1766 ~ 1834) 1798 - يىلىلا تەبىئىي ھالەتتىكى نوپۇس ئېشىشىنىڭ مودېلىنى ئوتتۇرىغا قويغان:

$$y = y_0 e^{rt},$$

بۇنىڭدىكى t ئۆتكەن ۋاقىتنى، y_0 بولسا $t=0$ بولغاندىكى نوپۇس سانىنى، r نوپۇسنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتىنى ئىپادىلەيدۇ.

8.3 - جەدۋەلدە 1950 ~ 1959 - يىللاردىكى ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانىغا دائىر سانلىق مەلۇماتلار بېرىلدى:

8.3 - جەدۋەل

يىللار	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
10 مىڭ/نوپۇس سانى	55196	56300	57482	58796	60266	61456	62828	64563	65994	67207

(1) ھەرقايسى يىللاردىكى نوپۇس ئېشىش نىسبىتىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىنى ئېلىمىزنىڭ مۇشۇ مەزگىلدىكى نوپۇس ئېشىش نىسبىتى قىلىپ ئېلىپ (0.0001 گىچە ئېنىقلىقتا)، مالساس ئوتتۇرىغا قويغان نوپۇس ئېشىشىنىڭ مودېلىغا ئاساسەن، ئېلىمىزنىڭ مۇشۇ مەزگىلدىكى كونكرېت نوپۇس ئېشىشىنىڭ مودېلىنى تۇرغۇزايلى ھەمدە تۇرغۇزۇلغان مودېل بىلەن ئەمەلىي نوپۇس سانىغا دائىر سانلىق مەلۇماتلارنىڭ ماس كېلىدىغان - كەلمەيدىغانلىقىنى تەكشۈرەيلى.

(2) 8.3 - جەدۋەلدىكى ئېشىش يۈزلىنىشىگە ئاساسلانغاندا، تەخمىنەن قايسى يىلى ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى 1 مىليارد 300 مىليونغا يېتىدۇ؟

يېشىش: (1) 1951 ~ 1959 - يىللاردىكى نوپۇس سانىنىڭ ئېشىش نىسبىتىنى ئايرىم - ئايرىم ھالدا r_1، r_2، ⋯، r_9 دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$55196(1 + r_1) = 56300$$

گە ئاساسەن 1951 - يىلىدىكى نوپۇس سانىنىڭ ئېشىش نىسبىتى $r_1 \approx 0.0200$ بولىدىغانلىقىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ.

ئوخشاش يول بىلەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$r_2 \approx 0.0210,\quad r_3 \approx 0.0229,\quad r_4 \approx 0.0250,$$
$$r_5 \approx 0.0197,\quad r_6 \approx 0.0223,\quad r_7 \approx 0.0276,$$
$$r_8 \approx 0.0222,\quad r_9 \approx 0.0184.$$

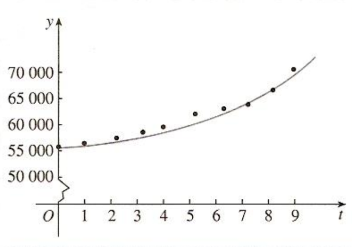
شۇنىڭ بىلەن، 1951 ~ 1959 - يىللاردىكى ئېلىمىز نوپۇس سانىنىڭ يىللىق ئوتتۇرىچە ئېشىش نىسبىتى مۇنداق بولىدۇ:

$$r = (r_1 + r_2 + \cdots + r_9) \div 9 \approx 0.0221.$$

$y_0 = 55196$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا ئېلىمىزنىڭ 1950 ~ 1959 - يىللاردىكى نوپۇس ئېشىشىنىڭ مودېلى مۇنداق بولىدۇ:

$$y = 55196 e^{0.0221t},\ t \in \mathbf{N}.$$

ئەمدى 8.3 ـ جەدۋەلدىكى سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن تارقاق نۇقتىلار گرافىكىنى ھەم فۇنكسىيە $(t \in \mathbf{N})y=55196e^{0.0221t}$ نىڭ گرافىكىنى سىزىمىز (9.2.3 ـ رەسىم).



9.2.3 ـ رەسىم

9.2.3 ـ رەسىمدىن تۇرغۇزۇلغان مودېل بىلەن 1950 ~ 1959 ـ يىللاردىكى ئەمەلىي نوپۇس سانىغا دائىر سانلىق مەلۇماتلارنىڭ ئاساسەن ماس كېلىدىغانلىقىنى كۆرەلەيمىز.

مودېلدىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان نەتىجە بىلەن ئەمەلىي مەۋجۇت بولۇۋاتقان ئەھۋالغا نىسبەتەن قانداق قاراشتا بولدىڭىز؟

(2) $y=130\,000$ نى $y=55196e^{0.0221t}$ غا قويۇپ، ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$t \approx 38.76.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، 8.3 ـ جەدۋەلدىكى ئېشىش يۈزلىنىشىگە ئاساسلانغاندا، تەخمىنەن 1950 ـ يىلدىن كېيىنكى 39 ـ يىلى (يەنى 1989 ـ يىلى) ئېلىمىزنىڭ نوپۇس سانى 1 مىليارد 300 مىليونغا يېتىدۇ. بۇنىڭدىن كۆرەلەيمىزكى، ئەگەر پىلانلىق تۇغۇت يولغا قويۇلماي، نوپۇس سانى تەبىئىي ھالەتتە ئېشىۋەرسە، ئېلىمىز بەرداشلىق بەرگىلى بولمايدىغان نوپۇس بېسىمغا دۇچ كېلىپ قالىدۇ.

دىققەت قىلىش كېرەككى، ئەمەلىي مەسىلىلەرنى بېرىلگەن فۇنكسىيە مودېلى بىلەن سۈرەتلىگەندە، ئەمەلىي مەسىلىنىڭ شەرتى بىلەن بېرىلگەن فۇنكسىيىنى كەلتۈرۈپ چىقارغاندىكى شەرت ئارىسىدا ئازدۇر ـ كۆپتۇر ئوخشىماسلىقلار بولىدىغانلىقتىن، كۆپ ھاللاردا مودېلغا نىسبەتەن تۈزىتىش ئېلىپ بېرىشقا توغرا كېلىدۇ.

مەشىق

1. مەلۇماتلارغا ئاساسلانغاندا، 1650 ـ يىلىدىكى دۇنيا نوپۇس سانى 500 مىليون بولۇپ، ئەينى چاغدىكى نوپۇسنىڭ كۆپىيىش نىسبىتى %0.3؛ 1970 ـ يىلىدىكى دۇنيا نوپۇس سانى 3 مىليارد 600 مىليون بولۇپ، ئەينى چاغدىكى نوپۇسنىڭ كۆپىيىش نىسبىتى %2.1 بولغان.

(1) مالساس نوپۇس مودېلىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاپ بېقىڭ، قايسى ۋاقىتتا دۇنيا نوپۇس سانى 1650 ـ يىلىدىكىنىڭ ئىككى ھەسسىسىگە يېتىدۇ؟ قايسى ۋاقىتتا دۇنيا نوپۇس سانى 1970 ـ يىلىدىكىنىڭ ئىككى ھەسسىگە يېتىدۇ؟

(2) ئەمەلىيەتتە، دۇنيا نوپۇس سانى 1850 ـ يىلىدىن بۇرۇنلا 1 مىلياردتىن ئېشىپ كەتكەن؛ 2003 ـ يىلى دۇنيا نوپۇس سانى تېخى 7 مىليارد 200 مىليونغا يەتمىگەن. سىز ئوخشاش بىر مودېلغا ئاساسەن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان بۇ ئىككى نەتىجىگە قانداق قارايسىز؟

2. دەسلەپكى تېزلىك v_0 m/s بىلەن تىك ھالدا يۇقىرىغا ھەرىكەت قىلغان جىسىمنىڭ t s تىن كېيىنكى ئېگىزلىكى h m فورمۇلا $h = v_0t - 4.9t^2$ نى، تېزلىك v m/s بولسا فورمۇلا $v = v_0 - 9.8t$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ. ئەگەر بىر پاي ئوق 75m/s تېزلىك بىلەن يۇقىرىغا تىك ئېتىلغان بولسا، ئوقنىڭ 100m دىن يۇقىرى ئېگىزلىكتە بولىدىغان ۋاقتى قانچە سېكۇنت بولىدۇ (0.01s قىچە ئېنىقلىقتا)؟ بۇ جەرياندا ئوقنىڭ تېزلىكى قايسى دائىرىدە بولىدۇ؟

بىز مەسىلىلەرنى بېرىلگەن فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلالايدىغان بولۇپلا قالماستىن، ئەمەلىي مەسىلىلەرگە دۇچ كەلگەندە يەنە مەسىلىنى ئۆزىمىز فۇنكسىيە مودېلى تۇرغۇزۇش ئارقىلىق ھەل قىلالايدىغان بولۇشىمىز كېرەك.

5 - مىسال مەلۇم بىر مىنېرال سۇ تىجارەت بۆلۈمىنىڭ ھەر كۈنلۈك ئۆي ئىجارىسى، خىزمەتچىلەرنىڭ ئىش ھەققى دېگەندەك مۇقىم تەننەرخى 200 يۈەن بولۇپ، ھەربىر قاچا مىنېرال سۇنىڭ كىرگۈزۈلۈش باھاسى 5 يۈەن. سېتىشتىكى يەككە باھا بىلەن ھەر كۈنلۈك ئوتتۇرىچە سېتىش مىقدارى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت 9.3 - جەدۋەلدە كۆرسىتىلدى:

9.3 - جەدۋەل

يۈەن/يەككە باھاسى	6	7	8	9	10	11	12
قاچا/كۈنلۈك ئوتتۇرىچە سېتىش مىقدارى	480	440	400	360	320	280	240

يۇقىرىقى سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن تەھلىل قىلىپ باقايلى، بۇ تىجارەت بۆلۈمى يەككە باھانى قانداق بېكىتسە ئاندىن ئەڭ چوڭ پايدىغا ئېرىشەلەيدۇ؟

يېشىش: 9.3 - جەدۋەلدىن كۆرەلەيمىزكى، سېتىشتىكى يەككە باھا ھەر 1 يۈەن ئاشۇرۇلسا، ھەر كۈنلۈك ئوتتۇرىچە سېتىش مىقدارى 40 قاچا ئازىيىدۇ. كىرگۈزۈلۈش باھاسىغا x يۈەن قوشقاندىن كېيىن، ھەر كۈنلۈك ئوتتۇرىچە پايدا y يۈەن بولىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، بۇ ئەھۋالدىكى ھەر كۈنلۈك ئوتتۇرىچە سېتىش مىقدارى مۇنداق بولىدۇ:

$$480 - 40(x-1) = 520 - 40x \ (\text{قاچا}).$$

$x > 0$ ھەمدە $520 - 40x > 0$، يەنى $0 < x < 13$ بولغانلىقتىن:

$$y = (520 - 40x)x - 200$$
$$= -40x^2 + 520x - 200, \quad 0 < x < 13.$$

ئاسانلا بىلەلەيمىزكى، $x = 6.5$ بولغاندا y ئەڭ چوڭ قىممەتكە ئىگە بولىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن، ئۇلار سېتىشتىكى يەككە باھانى 11.5 يۈەن قىلىپ بېكىتسە ئەڭ چوڭ پايدىغا ئېرىشەلەيدۇ.

6 - مىسال مەلۇم رايوندىكى ئېگىزلىكى ئوخشاش بولمىغان قۇرامىغا يەتمىگەن ئەرلەرنىڭ ئېغىرلىقلىرىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى 10.3 - جەدۋەلدە بېرىلدى.

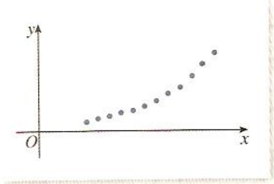
10.3 - جەدۋەل

ئېگىزلىكى/cm	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
ئېغىرلىقى/kg	6.13	7.90	9.99	12.15	15.02	17.50	20.92	26.86	31.11	38.85	47.25	55.05

(1) جەدۋەلدىكى سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن، بۇ رايوندىكى قۇرامىغا يەتمىگەن ئەرلەرنىڭ ئېغىرلىقى y kg بىلەن ئېگىزلىكى x cm نىڭ فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋىتىنى بىرقەدەر ئېنىق ئەكس ئەتتۈرۈپ بېرىدىغان مۇۋاپىق بىر فۇنكسىيە مودېلىنى تۇرغۇزغىلى بولامدۇ؟ بۇ فۇنكسىيە مودېلىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى يازايلى.

(2) ئەگەر بۇ ئەرلەرنىڭ ئېغىرلىقى ئوخشاش ئېگىزلىكتىكى ئەرلەرنىڭ بەدەن ئېغىرلىقلىرى ئوتتۇرىچە قىممىتىنىڭ 1.2 ھەسسىسىدىن يۇقىرى بولسا سېمىز، 0.8 ھەسسىسىدىن تۆۋەن بولسا ئورۇق ھېسابلانسا، بۇ رايوندىكى ئېگىزلىكى 175cm، ئېغىرلىقى 78kg كېلىدىغان بىر ئوغۇل ئوقۇغۇچىنىڭ ئېغىرلىقى نورمال ھېسابلىنامدۇ ـ يوق؟

تەھلىل: 10.3 ـ جەدۋەلدىكى سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن تارقاق نۇقتىلار گرافىكىنى سىزىمىز (10.2.3 ـ رەسىم). كۆزىتىش ئارقىلىق بۇ نۇقتىلارنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىقنىڭ يۇقىرىغا ئۆرلىگەن ئەگرى سىزىق ئىكەنلىكىنى بايقىيالايمىز. مۇشۇ نۇقتىلارنىڭ تارقىلىش ئەھۋالىغا ئاساسەن، بۇ رايوندىكى قۇرامىغا يەتمىگەن ئەرلەرنىڭ ئېغىرلىقى بىلەن ئېگىزلىكى ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋىتىنى فۇنكسىيە مودېلى $y=a\cdot b^x$ بىلەن تەقرىبىي ئىپادىلىسەك بولىدۇ.



10.2.3 ـ رەسىم

يېشىش: (1) بوي ئېگىزلىكىنى ئابسىسسا، بەدەن ئېغىرلىقىنى ئوردىنات قىلىپ 10.2.3 ـ رەسىمدىكى تارقاق نۇقتىلار گرافىكىنى سىزىمىز. نۇقتىلارنىڭ تارقىلىش ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، $y=a\cdot b^x$ نى مۇشۇ رايوندىكى قۇرامىغا يەتمىگەن ئەرلەرنىڭ ئېغىرلىقى بىلەن ئېگىزلىكىنىڭ مۇناسىۋىتىنى سۈرەتلەپ بېرىدىغان فۇنكسىيە مودېلى قىلساق بولىدۇ.

> 10.3 ـ جەدۋەلدىن ئوخشاش بولمىغان ئىككى گورۇپپا سانلىق مەلۇماتنى ئالغاندا، ئېرىشىلىدىغان فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىلىرى ئوخشاش بولماسلىقى مۇمكىن، قېنى، ئۆزىڭىز سىناپ كۆرۈڭ.

جەدۋەلدىكى ئىككى گورۇپپا سانلىق مەلۇمات (70, 7.90)، (160, 47.25) نى ئېلىپ، بۇلارنى $y=a\cdot b^x$ گە قويساق:

$$\begin{cases} 7.9 = a\cdot b^{70}, \\ 47.25 = a\cdot b^{160}, \end{cases}$$

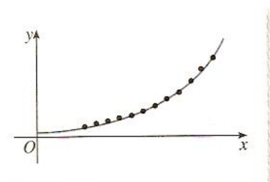
بۇنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق:

$$a\approx 2,\ \ b\approx 1.02.$$

شۇنداق قىلىپ، تۆۋەندىكى فۇنكسىيە مودېلىغا ئېرىشىمىز:

$$y=2\times 1.02^x.$$

بېرىلگەن سانلىق مەلۇماتلارنى يۇقىرىدىكى فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىگە قويۇش ياكى بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى (11.2.3 ـ رەسىم) نى سىزىش ئارقىلىق ئېرىشىلگەن بۇ فۇنكسىيە مودېلى بىلەن بېرىلگەن سانلىق مەلۇماتلارنىڭ ماس كېلىش دەرىجىسى بىر قەدەر يۇقىرى ئىكەنلىكىنى بايقىيالايمىز، بۇ، مۇشۇ فۇنكسىيىنىڭ بۇ رايوندىكى قۇرامىغا يەتمىگەن ئەرلەرنىڭ ئېغىرلىقى بىلەن ئېگىزلىكىنىڭ مۇناسىۋىتىنى خېلى ياخشى ئەكس ئەتتۈرىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.



11.2.3 ـ رەسىم

(2) $x=175$ نى $y=2\times 1.02^x$ گە قويساق:

$$y=2\times 1.02^{175},$$

بۇنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق:

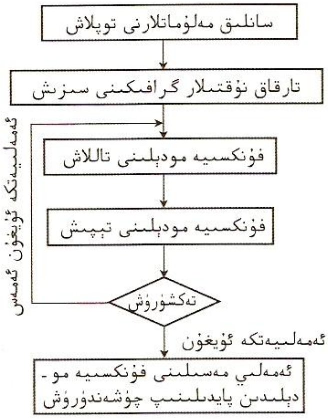
$$y\approx 63.98.$$

$$78\div 63.98\approx 1.22>1.2$$

بولغانلىقتىن، بۇ ئوغۇل ئوقۇغۇچى سېمىز ھېسابلىنىدۇ.

ئەگەر 6 ـ مىسالنى يەشكەندە ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ تەڭشەش ئىقتىدارىدىن پايدىلانساق، ئۇ ھالدا ئېرىشىلگەن فۇنكسىيە مودېلى تېخىمۇ توغرا بولىدۇ، قېنى، ئۆزىڭىز سىناپ كۆرۈڭ.

6 ـ مىسالنى يېشىش جەريانى توپلانغان سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن، فۇنكسىيە مودېلىنى تۇرغۇزۇش ئارقىلىق ئەمەلىي مەسىلىنى ھەل قىلىشنىڭ ئاساسىي جەريانىنى نامايان قىلىپ بېرىدۇ:



مەشىق

1. بىر شىركەتنىڭ مەلۇم خىل مەھسۇلاتنى ئىشلەپچىقىرىشىنىڭ مۇقىم تەننەرخى 150 تۈمەن (10000 = 1تۈمەن) يۈەن بولۇپ، ھەربىر مەھسۇلاتنىڭ ئۆزگىرىشچان تەننەرخى 2500 يۈەن، ھەربىر مەھسۇلاتنىڭ سېتىلىش باھاسى 3500 يۈەن.

(1) ئومۇمىي تەننەرخ y_1 (بىرلىكى: 10 مىڭ يۈەن)، بىرلىك تەننەرخى y_2 (بىرلىكى: 10 مىڭ يۈەن)، مال سېتىش ئومۇمىي كىرىمى y_3 (بىرلىكى: 10 مىڭ يۈەن)، ئومۇمىي پايدا y_4 (بىرلىكى: 10 مىڭ يۈەن) بىلەن ئومۇمىي مەھسۇلات مىقدارى x (بىرلىكى: دانە) ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىنى ئايرىم ـ ئايرىم تېپىڭ؛

(2) تېپىلغان فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكىغا ئاساسەن، بۇ شىركەتنىڭ ئىقتىسادىي ئۈنۈمىنى ئاددىي ھالدا تەھلىل قىلىڭ.

2. مەلۇم رايوندىكى بۇ يىل 1 ـ، 2 ـ، 3 ـ ئايدا مەلۇم خىل يۇقۇملۇق كېسەلگە گىرىپتار بولغانلارنىڭ سانى ئايرىم ـ ئايرىم 52 نەپەر، 61 نەپەر، 68 نەپەر. بۇنىڭدىن كېيىنكى ئايلاردا مۇشۇ كېسەلگە گىرىپتار بولىدىغانلارنىڭ سانىنى مۆلچەرلەش ئۈچۈن، A مودېل $y=ax^2+bx+c$ نى، B بولسا مودېل $y=pq^x+r$ نى تاللىغان، بۇنىڭدىكى y شۇ كېسەلگە گىرىپتار بولغۇچىلارنىڭ سانى، x بولسا ئاي سانى، a، b، c، p، q، r لار تۇراقلىق سان. ئەمەلىيەتتە 4 ـ، 5 ـ، 6 ـ ئايدا بۇ كېسەلگە گىرىپتار بولغانلارنىڭ سانى ئايرىم ـ ئايرىم 74 نەپەر، 78 نەپەر، 83 نەپەر بولۇپ چىققان. سىزنىڭچە ئۇلارنىڭ قايسىسى تاللىغان مودېل ياخشىراق؟

2.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. جەدۋەلدە پۇرژىنىنىڭ سوزۇلۇش ئۇزۇنلۇقى d بىلەن تارتىش كۈچى f قا مۇناسىۋەتلىك سانلىق مەلۇماتلار بېرىلدى:

f/N	14.2	28.8	41.3	57.5	70.2
d/cm	1	2	3	4	5

پۇرژىنىنىڭ سوزۇلۇش ئۇزۇنلۇقىنىڭ تارتىش كۈچىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىنىڭ گرافىكىنى نۇقتا تەسۋىرلەش ئارقىلىق سىزىڭ ھەمدە بۇ ئۆزگىرىش ھادىسىسىنى ئاساسىي جەھەتتىن ئەكس ئەتتۈرۈپ بېرەلەيدىغان بىر فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىنى يېزىڭ.

2. ئاپتوموبىلنىڭ جىددىي تورمۇزلانغاندىن كېيىنكى سىيرىلىپ مېڭىش ئارىلىقى y m بىلەن تورمۇزلانغان چاغدىكى تېزلىكى x km/h نىڭ مۇناسىۋەتنى مودېل $y=ax^2$ ئارقىلىق تەسۋىرلىنىدىغانلىقى ھەمدە تېزلىكى 60 km/h بولغان مەلۇم تىپلىق ئاپتوموبىلنىڭ جىددىي تورمۇزلانغاندىن كېيىنكى سىيرىلىپ مېڭىش ئارىلىقى 20 m بولىدىغانلىقى بېرىلگەن. مۇشۇ تىپلىق بىر ئاپتوموبىل تېزلىك چەكلىمىسى 100 km/h بولغان يۇقىرى سۈرئەتلىك تاشيولدا جىددىي تورمۇزلانغاندىن كېيىن 50 m سىيرىلىپ ماڭغان بولسا، بۇ ئاپتوموبىلنىڭ تېزلىكى چەكلىمىدىن ئېشىپ كەتكەنمۇ؟

3. بىر ئادەم A جايدىن 60 km/h تېزلىك بىلەن ئاپتوموبىل ھەيدەپ 150 km يىراقلىقتىكى B جايغا بارغان، ئۇ B جايدا 1 h تۇرغاندىن كېيىن، يەنە 50 km/h تېزلىك بىلەن A جايغا قايتقان. ئاپتوموبىل بىلەن A جاينىڭ ئارىلىقى x km نى ۋاقىت t h (A جايدىن يولغا چىققاندىن باشلاپ ھېسابلىنىدۇ) نىڭ فۇنكسىيىسى قىلىپ ئىپادىلەپ، بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ؛ ئاندىن ئاپتوموبىلنىڭ تېزلىكى v km/h نى ۋاقىت t h نىڭ فۇنكسىيىسى قىلىپ ئىپادىلەپ، بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.

4. سىغىمى 1200 m^3، چوڭقۇرلۇقى 6 m كېلىدىغان پاراللېلېپىپېد شەكىللىك قاپقاقسىز سۇ كۆلچىكى ياساشتا، كۆلچەك تېمىنىڭ پۈتۈش باھاسى 95/m^2 يۈەن، كۆلچەك تېگىنىڭ پۈتۈش باھاسى 135/m^2 يۈەن بولسا، كۆلچەكنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن كەڭلىكىنى قانچىلىك قىلىپ لايىھەلىگەندە، كۆلچەكنىڭ ئومۇمىي پۈتۈش باھاسىنى 70 مىڭ يۈەن ئىچىدە كونترول قىلغىلى بولىدۇ (0.1 m غىچە ئېنىقلىقتا)؟

5. دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكى x m بولغان جايدىكى ئاتموسفېرا بېسىمى y Pa بولۇپ، y بىلەن x ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت $y=ce^{kx}$، بۇنىڭدىكى c، k لار تۇراقلىق مىقدار. بىر ساياھەتچى ئاتموسفېرا بېسىمى 1.01×10^5 Pa بولغان دېڭىز تەكشىلىكى رايونىدىن دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكى 2400 m، ئاتموسفېرا بېسىمى 0.90×10^5 Pa بولغان بىر ئېگىزلىك رايونغا كەلگەندە، ئۇنىڭدا روشەن ئېگىز تاغ رېئاكسىيىسى كۆرۈلمىگەن، شۇنىڭ بىلەن بۇ ساياھەتچى شۇ جايدىكى دېڭىز يۈزىدىن ئېگىزلىكى 5596 m بولغان قارلىق تاغقا چىقىشقا تەييارلىق قىلغان. بەدەنىنىڭ ئوكسىگېنغا ئېھتىياجلىق بولۇش نۇقتىسىدىن چىقىپ (ئاتموسفېرا بېسىمى 0.775×10^5 Pa دىن تۆۋەن بولغاندا خەتەرلىك

ئەھۋال يۈز بېرىشى مۇمكىن)، ساياھەتچىنىڭ بۇ قارارى تەۋەككۇلچىلىك قىلغانلىق بولامدۇ؟ بۇ-نىڭغا ھۆكۈم قىلىڭ.

6. بىر خىل دورىنىڭ بىمارنىڭ قېنىدىكى مىقدارى 1500 mg دىن يۇقىرى بولغاندىلا، ئاندىن ئۇنىڭ داۋالاش ئۈنۈمى بولىدۇ؛ 500 mg دىن تۆۋەن بولسا، بىمار خەتەرلىك ئەھۋالدا قالىدۇ. ھازىر بىر بىمارنىڭ ۋېناسىغا مۇشۇ خىل دورىدىن 2500 mg ئوكۇل قويۇلدى، ئەگەر بۇ خىل دورا قاندا سائەتتە 20% تىن ئازىيىپ بارسا، بىمارنىڭ قېنىغا بۇ خىل دورىنى قايسى ۋاقىت دائىرىسىدە تولۇقلاش كېرەك (0.1 h قىچە ئېنىقلىقتا)؟

B گۇرۇپپا

1. ئېلىمىزنىڭ 1990 ~ 2000 - يىللىدىكى ئىچكى ئىشلەپچىقىرىش ئومۇمىي قىممىتى جەدۋەلدە كۆرسىتىلدى:

يىللار	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ئىشلەپچىقىرىش قىممىتى / 100 مىليون يۈەن	18598.4	21662.5	26651.9	34560.5	46670.0	57494.9	66850.5	73142.7	76967.1	80422.8	89404.0

(1) 1990 ~ 2000 - يىللىدىكى ئىچكى ئىشلەپچىقىرىش ئومۇمىي قىممىتىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ؛

(2) مۇشۇ مەزگىلدىكى ئىچكى ئىشلەپچىقىرىش ئومۇمىي قىممىتىنىڭ تەرەققىيات - ئۆزگىرىشىنى ئاساسىي جەھەتتىن ئەكس ئەتتۈرۈپ بېرەلەيدىغان بىر فۇنكسىيە مودېلىنى تۇرغۇزۇڭ ھەمدە ئۇنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ؛

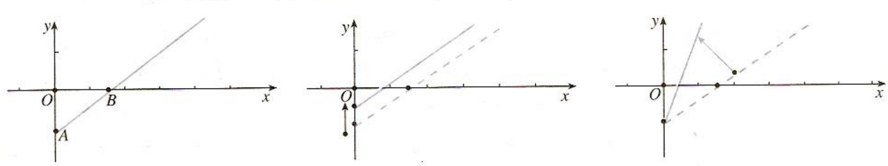
(3) تۇرغۇزغان فۇنكسىيە مودېلىڭىزغا ئاساسەن، 2004 - يىللىدىكى ئىچكى ئىشلەپچىقىرىش ئومۇمىي قىممىتىنى مۆلچەرلەڭ.

2. (1) رەسىمدىكىسى مەلۇم كوچا ئاپتوبۇس لىنىيىسىنىڭ كىرىم - چىقىم پەرقلىق سوممىسى y بىلەن يولۇچىلار مىقدارى x نىڭ گرافىكى.

(1) (1) رەسىمدىكى A، B نۇقتىلار ۋە AB نۇر ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ ئەمەلىي مەنىسىنى چۈشەندۈرۈڭ؛

(2) نۆۋەتتە بۇ لىنىيىدە زىيان تارتىش يۈز بېرىۋاتقانلىقى ئۈچۈن، شىركەتتىكى ئالاقىدار خادىملار زىياننى پايدىغا ئايلاندۇرۇش ھەققىدە ئىككى تەكلىپنى ئوتتۇرىغا قويدى ((2)، (3) رەسىملەردىكىدەك).

گرافىكلارغا ئاساسەن، بۇ ئىككى تەكلىپنىڭ نېمە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟



(1) (2) (3)

(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

ئۇچۇر تېخنىكسىنىڭ قوللىنىلىشى

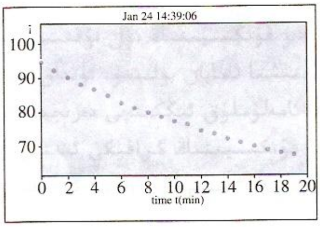
سانلىق مەلۇماتلارنى توپلاش ھەمدە فۇنكسىيە مودېلىنى تۇرغۇزۇش

تۇرمۇشتىكى زور كۆپ ساندىكى ئۆزگىرىش ھادىسىلىرىنىڭ فۇنكسىيە مودېلىنى بىز بىلىدىغان نەزەرىيىلەرگە ئاساسلىنىپلا بىۋاستە تۇرغۇزۇش ناھايىتى قىيىن. لېكىن، ئۆزگىرىش جەريانىدىكى ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا دائىر سانلىق مەلۇماتلارنى توپلىيالىساقلا، ئۇ ھالدا ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى ئاساسىي جەھەتتىن ئەكس ئەتتۇرۇپ بېرەلەيدىغان فۇنكسىيە مودېلىنى ئۇچۇر تېخنىكسىدىن پايدىلىنىپ تۇرغۇزۇۋالالايمىز.

تۆۋەندە سۇ تېمپېراتۇرىسىنىڭ ئۆزگىرىشىگە دائىر سانلىق مەلۇماتلارنى كومپيۇتېر، سانلىق مەلۇمات يىغقۇچ، تېمپېراتۇرا سېنزورى (تېمپېراتۇرا سېزىش ئاپپاراتى) قاتارلىق ئۇچۇر تېخنىكسى قوراللىرىدىن پايدىلىنىپ قانداق توپلاش ھەمدە تېمپېراتۇرا بىلەن ۋاقىت ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنىڭ فۇنكسىيە مودېلىنى قانداق تۇرغۇزۇشنى تونۇشتۇرۇپ ئۆتىمىز.

(1) كومپيۇتېر، سانلىق مەلۇمات يىغقۇچ ۋە تېمپېراتۇرا سېنزورىنى بىر ـ بىرىگە ئۇلاپ، سانلىق مەلۇمات يىغقۇچتا يىغماقچى بولغان تېمپېراتۇرىلارنىڭ سانى ۋە ھەر ئىككى تېمپېراتۇرا ئارىلىقىدىكى ۋاقىتنى بەلگىلىۋالىمىز، ئاندىن تېمپېراتۇرا سېنزورىنى ئىسسىق سۇ قۇيۇلغان ئىستاكانغا سالىمىز.

(2) كومپيۇتېر بىلەن سانلىق مەلۇمات يىغقۇچنىڭ ئىجرا قىلىش ئىقتىدارىنى قوزغاتساق، تېمپېراتۇرىنىڭ ۋاقىتقا ئەگىشىپ ئۆزگىرىش ئەھۋالى كومپيۇتېر ۋە سانلىق مەلۇمات يىغقۇچتا تەڭلا نامايان بولىدۇ (1 ـ رەسىم (1)، (2)).



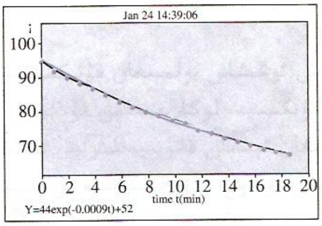
(1)

	Time ts	Temp +25 – 110
1	0.000	94.7
2	10.000	94.2
3	20.000	94.5
4	30.000	93.7
5	40.000	93.4
6	50.000	92.6
7	60.000	92.1
8	70.000	91.8
9	80.000	91.3
10	90.000	91.1

(2)

1 ـ رەسىم

(3) تېمپېراتۇرىنىڭ پۈتكۈل ئۆزگىرىش جەريانىنى كۆزەتكەندىن كېيىن، 1 ـ رەسىم (1) گە ئاساسەن كومپيۇتېردا مۇشۇ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى ئاساسىي جەھەتتىن ئەكس ئەتتۇرۇپ بېرەلەيدىغان بىر فۇنكسىيە مودېلىنى، مەسىلەن، $y=ae^{bt}+c$ نى تاللىۋالساق، كومپيۇتېردا بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى دەرھال سىزىپ چىقىلىدۇ ھەم ئۇنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىمۇ تېپىپ چىقىلىدۇ (2 ـ رەسىم).



2 ـ رەسىم

يۇقىرىدىكى فۇنكسىيە مودېلىنىڭ تۇرغۇزۇلۇش جەريانى ئاددىي، ئەپچىل، ئوبرازلىق ھەم كۆرسەتمىلىك بولۇپ، ئەنئەنىۋى ئۇسۇللار بۇنداق ئەۋزەللىكلەرگە ئىگە ئەمەس. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئۆگەنگەن فۇنكسىيە مودېللىرىنى پۇختا ئىگىلەپ، ئۇچۇر تېخنىكسىدىن ماھىرلىق بىلەن پايدىلانساقلا، مۇرەككەپ ھادىسىلەرنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى ئۈستىدە ئىزدىنىش ئېلىپ بارالايدىغان بولىمىز.

ئەنگلىيىلىك فىزىك ۋە ماتېماتىك نيۇتون (Issac Newton، 1643 ~ 1727 ـ يىللار) جىسىمنىڭ نورمال تېمپېراتۇرا مۇھىتىدىكى تېمپېراتۇرا ئۆزگىرىشىگە دائىر سوۋۇتۇش مودېلىنى ئوتتۇرىغا قويغان: ئەگەر جىسىمنىڭ دەسلەپكى تېمپېراتۇرىسى θ_1، مۇھىت تېمپېراتۇرىسى θ_0 بولسا، ئۇ هالدا t ۋاقىتتىن كېيىن جىسىمنىڭ تېمپېراتۇرىسى θ فورمۇلا

$$\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) \cdot e^{-kt},$$

نى قانائەتلەندۈرىدۇ، بۇنىڭدىكى k مۇسبەت تۇراقلىق سان.

بىر لايىھەنى ئوتتۇرىغا قويۇپ، نيۇتوننىڭ سوۋۇتۇش مودېلىنى ئىسپاتلاڭ، ئاندىن تۆۋەندىكى مەسىلىلەر ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرۈڭ:

1. بىر ئىستاكان قايناق سۇ تېمپېراتۇرىسىنىڭ تۆۋەنلەپ ئۆينىڭ تېمپېراتۇرىسىغا كېلىشى ئۈچۈن تەخمىنەن قانچىلىك ۋاقىت كېتىدۇ؟

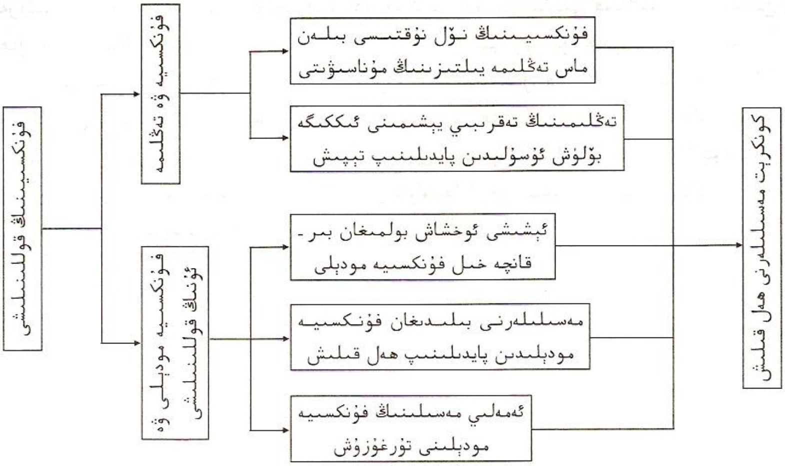
2. توڭلاتقۇدىكى گۆشنى قورۇما قورۇشتىن قانچىلىك ۋاقىت بۇرۇن چىقىرىپ قويۇش كېرەك؟

3. قەھرىتان قىشتا، سوغۇق سۇ تۇرۇبىسى ئاسان توڭلاپ قالامدۇ ياكى ئىسسىق سۇ تۇرۇبىسىمۇ؟

بۇ مەسىلىلەرگە جاۋاب بېرىش ئۈچۈن، ئالدى بىلەن تەقلىدىي تەجرىبە ئىشلەپ، ئاندىن تورغا چىقىپ ئالاقىدار ماتېرىياللارنى ئىزدەپ تاپسىڭىز ياكى كەسپىي خادىملاردىن سورىسىڭىز بولىدۇ، ئاخىرىدا ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن هەمكارلىشىپ، بىر پراكتىكا تاپشۇرۇقى دوكلاتىنى تاماملاڭ.

خۇلاسە

I بۇ بابنىڭ بىلىم قۇرۇلمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. فۇنكسىيە بىلەن تەڭلىمىنىڭ زىچ باغلىنىشى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بىلەن ماس تەڭلىمە $f(x)=0$ نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى ئارىسىدىكى باغلىنىشتا نامايان بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسى بىلەن بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە يىلتىزىنىڭ باغلىنىشىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟ ئەگەر بىر فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى ئىنتېرۋال $[a, b]$ دا ئۈزلۈكسىز بولسا، ئۇ ھالدا بۇ فۇنكسىيە قانداق شەرت ئاستىدا ئىنتېرۋال (a, b) ئىچىدە نۆل نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ؟

2. ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلى تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى تېپىشتا كۆپ قوللىنىلىدىغان ئۇسۇل. ئۇنداق بولسا، تەڭلىمىنىڭ تەقرىبىي يېشىمىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىشنىڭ ئومۇمىي باسقۇچلىرىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

3. رېئال دۇنيادىكى ئوخشاش بولمىغان ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى ئوخشاش بولمىغان فۇنكسىيە مودېللىرى بىلەن سۈرەتلىگىلى بولىدۇ. مەسىلەن، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە، لوگارىفملىق فۇنكسىيە، دەرىجىلىك فۇنكسىيە قاتارلىقلار رېئال دۇنيادىكى ئوخشاش بولمىغان ئېشىش قانۇنىيەتلىرىنى تەسۋىرلەشتە كۆپ قوللىنىلىدىغان فۇنكسىيە مودېللىرىدۇر. ئۇنداق بولسا، بۇ ئۈچ خىل فۇنكسىيە مودېلىنىڭ ئېشىش پەرقىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟ تۈز سىزىقنىڭ ئۆرلىشى، كۆرسەتكۈچنىڭ پارتلىشى، لوگارىفمنىڭ ئېشىشى قاتارلىق ئوخشاش بولمىغان فۇنكسىيە تىپىدىكى ئېشىشلارنىڭ مەنىسىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

4. فۇنكسىيىنىڭ قوللىنىلىشى دېگەندە، بىر تەرەپتىن، مەسىلىلەرنى ئۆزىمىز بىلىدىغان فۇنكسى
مودېللىرىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىش؛ يەنە بىر تەرەپتىن، مۇۋاپىق فۇنكسىيە مودېلىنى تۇرغۇزۇ
تۇرغۇزۇلغان بۇ فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ ئالاقىدار ھادىسىلەرنى چۈشەندۈرۈش ئارقىلىق بەز
بىر تەرەققىيات يۈزلىنىشلىرىنى مۆلچەرلەش كۆزدە تۇتۇلىدۇ. مەسىلىنى فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلا
نىپ ھەل قىلىشنىڭ ئاساسىي جەريانىنى ئەمەلىي مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

5. ئەمەلىي مەسىلىلەرنى فۇنكسىيە مودېلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىش جەريانى كۆپ ھاللاردا مە
رەككەپ سانلىق مەلۇماتلارنى بىر تەرەپ قىلىشقا چېتىلىدۇ، ھالبۇكى، مۇرەككەپ سانلىق مەلۇماتلار
بىر تەرەپ قىلىش جەريانىدا يەنە ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن كۆپلەپ پايدىلىنىشقا توغرا كېلىدۇ. شۇنى
ئۇچۇن، فۇنكسىيىنىڭ قوللىنىلىشىنى ئۆگىنىش داۋامىدا ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ رولىنى تولۇق جا
قىلدۇرۇشقا دىققەت قىلىشىمىز لازىم.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. ئەگەر $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ بىردىنبىر نۆل نۇقتىسى بىرلا ۋاقىتتا ئىنتېرۋال $(0, 16)$، $(0, 8)$، $(0, 4)$، $(0, 2)$ ئىچىدە بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى ھۆكۈملەرنىڭ ئىچىدە توغرا بولىدىغىنى ( ).

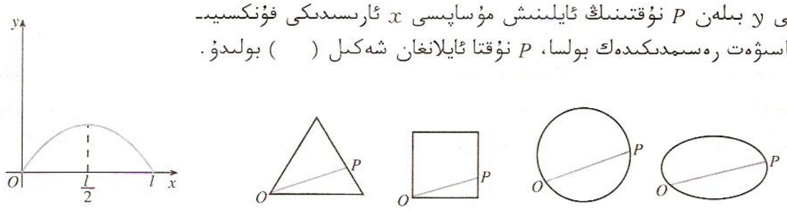
(A) $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $(0, 1)$ ئىچىدە نۆل نۇقتىغا ئىگە؛

(B) $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $(0, 1)$ ياكى $(1, 2)$ ئىچىدە نۆل نۇقتىغا ئىگە؛

(C) $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[2, 16)$ دا نۆل نۇقتىغا ئىگە ئەمەس؛

(D) $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $(1, 16)$ ئىچىدە نۆل نۇقتىغا ئىگە ئەمەس.

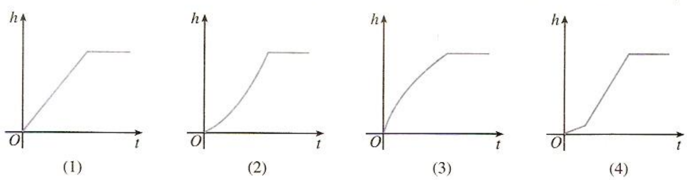
2. O نۇقتىدىن چىققان P نۇقتا ئايلانما ئۇزۇنلۇقى l بولغان شەكىلنى سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى يۆنىلىشى بويىچە بىر قېتىم ئايلاندى. ئەگەر O، P ئىككى نۇقتىنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىقنىڭ ئۇزۇنلۇقى y بىلەن P نۇقتىنىڭ ئايلىنىش مۇساپىسى x ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەت رەسىمدىكىدەك بولسا، P نۇقتا ئايلانغان شەكىل ( ) بولىدۇ.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)　(A)　(B)　(C)　(D)

3. A جايدىن چىققان پويىز $500\,\mathrm{km}$ يىراقلىقتىكى B جايغا ئۇدۇل بېرىشتا، يولدا A جايدىن $200\,\mathrm{km}$ يىراقلىقتىكى C جايدىن ئۆتىدۇ. ئەگەر پويىز تەكشى تېزلىك بىلەن مېڭىپ A جايدىن B جايغا $5\,\mathrm{h}$ تە يېتىپ بارغان بولسا، پويىز بىلەن C جاينىڭ ئارىلىقى (بىرلىكى: km) نىڭ ۋاقىت (بىرلىكى: h) قا دائىر فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىڭ.

4. 4 دانە ئىستاكاننىڭ شەكلىنى لايىھىلەڭ، نەتىجىدە ھەربىر ئىستاكانغا تەكشى تېزلىك بىلەن سۇ قۇيغاندا، ئىستاكاندىكى سۇ يۈزى ئېگىزلىكى h نىڭ ۋاقىت t غا ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىنىڭ گرافىكى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا تۆۋەندىكى گرافىكلارغا ماس كەلسۇن.



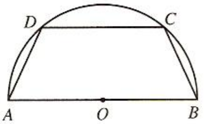
(1)　(2)　(3)　(4)

(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

5. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، تەڭلىمە $2x^3-4x^2-3x+1=0$ نىڭ ئەڭ چوڭ يىلتىزىنى ئىككىگە بۆلۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىڭ (0.01 گىچە ئېنىقلىقتا).

6. ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرنىڭ ياردىمىدە، فۇنكسىيە $f(x)=\lg x$ بىلەن $g(x)=\dfrac{1}{x}$ نىڭ كې-

سىششى نۇقتىسىنىڭ ئابسىسساسىنى تېپىڭ (0.1 گىچە ئېنىقلىقتا).



(7 ـ مىسال ئۈچۈن)

7. رەسىمدىكىدەك، رادىئۇسى 2 بولغان يېرىم چەمبەر شەكىللىك پولات تاختىنى تەڭ يانلىق تراپېتسىيە $ABCD$ شەكلىدە كېسىشتە، تراپېتسىيىنىڭ AB ئاستىنقى ئاساسى O چەمبەرنىڭ دىئامېتىرى بولۇپ، ئۇنىڭ ئۈستۈنكى ئاساسى CD نىڭ ئىككى ئۇچى چەمبەر ئايلانمىسى ئۈستىدە ياتسا، بۇ تراپېتسىيىنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى y بىلەن يېنىنىڭ ئۇزۇنلۇقى x ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك ئانالىتىك ئىپادىسىنى يېزىڭ ھەمدە ئۇنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىنى تېپىڭ.

8. مەلۇم خىل رادىئوئاكتىپ ئېلېمېنتنىڭ ئاتوم سانى N نىڭ ۋاقىت t غا ئەگىشىپ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى $N=N_0e^{-\lambda t}$ بولۇپ، بۇنىڭدىكى N_0، λ لار مۇسبەت تۇراقلىق سان.

(1) بۇ فۇنكسىيىنىڭ ئاشقۇچى فۇنكسىيە ياكى كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ؛

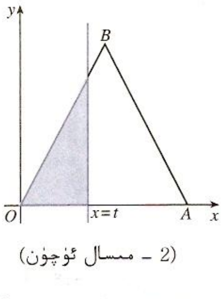
(2) t نى ئاتوم سانى N نىڭ فۇنكسىيىسى قىلىپ ئىپادىلەڭ؛

(3) $N=\frac{N_0}{2}$ بولغاندىكى t نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

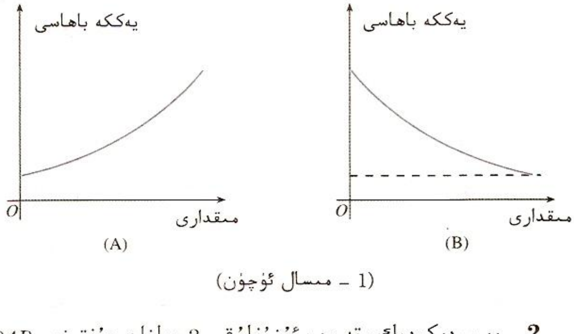
9. بىر شىركەت ھەربىر تۈركۈم مەھسۇلات ئىشلەپچىقارسا بازار ئېھتىياجىنى بىر مەزگىل قامدىيالايدۇ. شىركەت بۇ قېتىمقى بىر خىل يېڭى مەھسۇلاتنى ئىشلەپچىقىرىشقا باشلاپ x ئاي ئۆتكەندىن كېيىن، شىركەتتىكى ساقلاقلىق مال مىقدارى مودېل $f(x)=-3x^3+12x+8$ نى ئاساسي جەھەتتىن قانائەتلەندۈرگەن بولسا، كېيىنكى قېتىملىق ئىشلەپچىقىرىشنى قانچىلىك ۋاقىتتىن كېيىن باشلاش كېرەك؟

B گۇرۇپپا

1. ئىقتىسادشۇناسلار تەمىنلەش بىلەن ئېھتىياجنىڭ مۇناسىۋىتىنى تەتقىق قىلغاندا، ئادەتتە مەھسۇلات باھاسى (ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدار)نى ئوردىنات ئوقى بىلەن، مەھسۇلات مىقدارى (ئەگىشىپ ئۆزگەرگۈچى مىقدار) نى ئابسىسسا ئوقى بىلەن ئىپادىلەيدۇ. تۆۋەندىكى ئىككى ئەگرى سىزىقنىڭ قايسىسى زاۋۇت تەرەپ ئۈمىد قىلىدىغان ئەگرى سىزىقنى، قايسىسى خېرىدارلار ئۈمىد قىلىدىغان ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

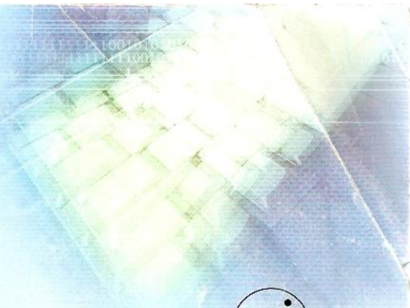


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 2 بولغان مۇنتىزىم $\triangle OAB$ نىڭ $x=t\,(t>0)$ تۈز سىزىقنىڭ سول تەرىپىدىكى قىسمىنىڭ يۈزى $f(t)$ بولسا، $f(t)$ فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىنى تېپىڭ ھەمدە $y=f(t)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.



ISBN978-7-5370-6731-7

9 787537 067317 >

باھاسى : 8.00 يۈەن